~~Warner Library~~
~~#81~~
matte. 198

135033
Ozr

ACADEMY OF NATURAL SCIENCES
OF
PHILADELPHIA.

Conveyed in 1892 from the estate of JOHN WARNER who died July 16, 1873.

NOT TO BE LOANED.

Hugenius works of
Physics
Mathematics

John Warner

CHRISTIANI HUGENII
ZUILICHEMII,
Dum viveret Zelhemi Toparchæ,

OPERA
RELIQUA.

VOLUMEN PRIMUM.

BOSTON COLLEGE LIBRARY
CHESTNUT HILL, MA.
MATH. DEPT.

AMSTELODAMI,
Apud JANSSONIO-WAESBERGIOS.
M. D. CC. XXVIII.

QA
33
.H87

OCLC 18074521
4-19-91

16.02.00
17.00

G. J. 's GRAVESANDE
L. S.

QUibus ſummos inter Mathematicos nomen acquiſivit Christianus Hugenius ſcripta laudare inutile duco. Inter hæc minora multa ſunt ab auctore ſeparatim edita; diſſertationeſque peculiares in diariis litterariis, aut Mathematicis Collectionibus, diſperguntur.

Hæc omnia a me collecta, & ordine diſpoſita, ante quatuor annos Leidæ fuere edita; ſed duobus tunc temporis datis voluminibus non omnia auctoris Opera continentur; deficiunt ut in præfatione monui tractatus duo, de Lumine uno, de Gravitate altero, ut & volumen Operum Poſthumorum.

Hæc autem omnia, quæ in Leidenſi editione deficiunt, cum de novo typis mandare vellent Bibliopolæ Amſtelodamenſes *Waesbergii*, ad quos hujus faciendi jus pervenerat, me rogarunt ut & hiſce ſcriptis operam meam non denegarem, quod, ut tanti viri Opera Omnia, eâdem formâ edita, unicum quaſi formarent Corpus,

libenter ſuſcepi, quantum enim hoc omnibus Mathematum æſtimatoribus gratum foret ſatìs ſuperque noveram.

Duobus ergo voluminibus, anno MDCCXXIV. Leidæ apud *Janſonios vander Aa* editis, duo nova adjiciuntur, quorum ultimum, quod Opera continet Poſthuma, in duos tomos ſubdividitur.

In horum autem voluminum primo Tractatus continetur *de Lumine*, & Diſſertatio *de Gravitate*, quæ ambo ſcripta gallice dedit auctor, quamvis primum ut ipſe in hujus præfatione monet, in linguam latinam vertere ſibi propoſuerat.

Ut autem opera omnia latinè ederentur, tractatus hos ambos in hanc linguam verti curarunt Bibliopolæ, quod cum minùs exactè præſtitum fuiſſet, vir Cl. qui nunc, in Academia Friſia Profeſſor, Philoſophiam ſumma cum laude docet, & qui alia noſtri auctoris opera quæ belgicè aut gallicè conſcripta, cum reliquis Leidæ jam ſunt edita, latinitate donaverat, ut eo tempore monui, hanc etiam verſionem cum gallicis auctoris verbis contulit, & juxta auctoris mentem emendavit.

Ad

Ad calcem diſſertationis de *Gravitate* addidit auctor Theoremata quindecim de *Logiſticæ*, aut *Logarithmicæ* lineæ proprietatibus, ſed nullâ adjecta horum demonſtratione.

Defectum ſupplevit Mathematicus ſubtiliſſimus GUIDO GRANDUS in tractatu Florentiæ MDCCI edito, & ne quid lector circa theoremata deſiderandum haberet, GRANDI demonſtrationes HUGENII ſcriptis addidimus eoque lubentius, quod non tantum ſingula, de quibus hic agitur, Theoremata demonſtrationibus diverſis illuſtrentur, ſed & auctor occaſione horum multa alia Geometrica, maximis laudis digniſſima, tradit. Unicum hoc deſideraſſem, quod primam decimi quarti Theorematis demonſtrationem * prætermiſiſſet, quæ difficultate non caret, dum ipſum Theorema ſequentibus demonſtrationibus pleniſſimè illuſtretur.

* vide pag. 264.

Non tamen pulcherrimo huic operi hac de cauſa quid detractum velim, ſed ea mente hæc obſervo, qua GRANDUS ipſe ſummorum Mathematicorum quorundam errorem, in quem in loco de quo agitur ipſe incidit, notavit †.

† vide pag. 272.

In hac prima Theor. 14. demonſtratione ſeriem adhibet GRANDUS hanc, $\frac{ddb}{a}$, $\frac{3ddb}{aa}$, $\frac{5ddb}{a^3}$, $\frac{7ddb}{a^5}$ &c, in qua cum unitate infinite parum differt *a*, qua de cauſa pro *a* ipſa unitas uſurpatur, & ponuntur æquales *a*, *aa*, a^3, a^5 &c, quod certe ſine errore fieri poteſt, quamdiu *a* ad poteſtatem finitam elevatur; ſed de poteſtate infinita agitur; quare differentia inter *a* & 1. negligi non debet; quod ſi fiat, omnes ordinatæ Logiſticæ fiunt æquales, & hæc mutatur in rectam ipſi aſymtoto parallelam.

Dum ſuam proſequitur demonſtrationem Grandus lineas conſiderat libræ applicatas, quas ſimul ſuperficiem formare ponit, ita ut ſingulis latitudinem, quamvis infinitè exiguam, tribuat; ad quam cum in demonſtratione non attendat, dum ſuperficies infinitè exiguas longitudinibus proportionales ponit, ſingulis eandem tribuit latitudinem, quod, propter inæquales inter puncta quibus lineæ applicantur diſtantias, fieri non poteſt, & hoc ipſum merito in aliorum demonſtrationibus culpavit.

Error ſecundus primum correxit, & ad veram con-

concluſionem conduxit. Aliquid autem in hac demonſtratione deeſſe ſatis monet ipſe auctor dum ad aliam tranſit in qua, ut ipſe loquitur, majorem *rigorem* obſervavit.

Tranſeo nunc ad *Opera Poſthuma* de quibus pauca tantum monenda habeo. In omnibus ſecutus ſum editionem, quæ jam anno MDCC., ut ſuperius monui, publici juris facta fuit; & cujus curam habuere viri celeberrimi BURCHERUS DE VOLTER & BERNHARDUS FULLENIUS, primus in Academia Batava, ſecundus in Academia Friſia Profeſſor, qui magno labore hæc auctoris ſcripta, nondum ad prælum parata, in ordinem reduxere. Unicum hoc mutavi, *Dioptricæ* figuræ ære inciſæ in præſenti editione ſunt, & rejeci tabulas ligno inciſas, quæ in prima editione uſu venerant, quia, ut viri laudati in ſua præfatione monent, non qualem deſiderarent artificem invenire potuere.

Ad calcem tractatus de Horologio oſcillatorio Theoremata, demonſtrationibus deſtituta, de Vi centrifuga propoſuerat auctor. Hæc nunc in hiſce operibus poſthumis demonſtrantur; & quia

ipſe auctor Theoremata in tractatu peculiari demonſtravit, ideo ad calcem ipſius tractatus de Horologio oſcillatorio non alias demonſtrationes adjeci, ut circa theoremata de Logiſtica factum, quorum Hugenii demonſtrationes nullibi extant.

In ſecundo Diario anni MDCLXIX. Pariſiis edito, ſinè demonſtrationibus, propoſuerat HUGENIUS regulas de colliſione corporum. Has reliquis operibus, jam memoratis, ante quadriennium Leidæ editis, non junximus; ratio eſt quod hæ ipſæ in hiſce operibus poſthumis cum demonſtrationibus habentur, in tractatu de *Motu corporum*. De quo tractatu monere debeo auctorem in fine* agere de ordine quodam corporum & ipſum indicare velocitatem ultimi corporis in uno caſu, & omnium motus quantitatem in alio; habetque numeros 14760000000 & 4677000000000. quos mutare nolui; quia auctor compendio quodam, quod non explicat, ſe ad hos perveniſſe dicit.

* vide pag. 104.

Errorem autem in primo numero dari certum eſt, cùm ſecundus bene ſit determinatus, cujus ſemis eſt primus. Si auctor, qui quatuor primas figuras horum numerorum tantum determi-

minavit decem voluiſſet determinare, quod potuiſſet, cum certo-certiùs logarithmicis tabulis uſus ſit, hos habuiſſet 233849218800o. & 4676984377000.

Huic editioni illam quam potui, libro in alia urbe prælo commiſſo, curam dedi; ſchedæ jam correctæ ad me fuere tranſmiſſæ, ipſas legi & cum figuris contuli, quod tamen circa ſecundam in Tractatu *de Lumine* fuit neglectum quare B. L. rogo ne ſequentia menda corrigere recuſet *pag.* 13. *lin. pen.* oppoſito *lege* oppoſitis. *pag.* 14. *lin.* 20. fixis *lege* fixæ. *pag.* 15. *lin.* 9. bb, dd, & cc *lege bb*, *dd*, &c. Præterea *pag.* 135. *lin.* 11. ordinatorum *lege* ordinatarum; & *pag.* 239. *lin.* 9. in marg. *lege.* fig. 3.

Negligentia etiam Typothetarum contigit (dum eâdem, ut loquuntur, formâ utuntur, in imprimendis ſchedis diverſis) ut, quæ ad marginem alicujus paginæ indicantur, in ſequentibus repetantur, non ſine lectoris incommodo cui figura indicatur de qua non agitur.

Quæ potui ad hæc vitanda præſtiti, non tamen cum deſiderato ſucceſſu. Remedium autem facile

** 2 eſt

eſt, delendo nempe quæ ſequuntur. In Tractatu *de Lumine pag.* 16. *dele* TAB. I. fig. 7. *pag.* 57. *del.* TAB. IV. fig. 3. *pag.* 75. *del.* TAB. VI. fig. 1. *pag.* 83. *del.* TAB. VI. fig. 6. *Grandi Demons. pag.* 172. *del.* TAB. XII. fig. 8. *pag.* 216. *del.* TAB. XIV. fig. 4.

Dabam Leidæ quinto Nonas Aprilis MDCCXXVIII.

CHRISTIANI HUGENII
TRACTATUS
DE
LUMINE.

PRÆFATIO.

Tractatum hunc jam a duodecim annis, dum in Gallia verſabar, conſcripſi; illumque anno 1678. *cum viris eruditis, eo tempore Academiæ Regiæ ſcientiarum ſociis, quibus & ipſe juſſu Regis adſcriptus eram, communicavi: Horum plurimi, qui adhuc in vivis ſunt, recordare poterunt, ſe eo tempore cum hunc ipſum prælegebam, adfuiſſe; quod faciliùs illi in memoriam revocabunt, qui ſcientiis Mathematicis animum applicarunt; inter quos nunc tantùm nominare poſſum Celebres viros Caſſinum, Romerum, & de la Hire. Et quamvis poſtea plurima correxerim imò mutaverim, exemplaria, eo tempore excerpta, fidem facient, me attamen nihil addidiſſe præter conjecturas circa formationem cryſtalli Iſlandici, & novam annotationem in refractionem cryſtalli rupis.*

Hæc memorare neceſſarium duxi ut conſtaret a quonam jam tempore, hæcce quæ nunc edo, meditatus fuerim, non verò, ut illis debitum honorem detraherem, qui eadem, tractare etiam potuerunt, licèt eorum nihil quæ ſcripſeram viderint, quemadmodum verè accidit duobus egregiis Geometris Newtono & Leibnizio reſpectu problematis de figura vitrorum ad colligendos radios, ubi data eſt una ex ſuperficiebus.

Hoc quæri poterit, cur tamdiu diſtulerim hæc in publicum edere, ratio eſt quod libellum hunc ſatìs negligenter linguâ gallicâ conſcripſeram, eo animo ut in latinam verterem, hoc ita agens ut ad res ipſas meliùs attenderem. Poſtea in animum induxi ipſum unà emittere cum alio tractatu dioptrico, in quo effectus teliſcopiorum, & omnia quæ ad hanc ſcientiam pertinent, explico, ſed voluptate ceſſante, ex novis detectis ſumendâ, diſtuli propoſitum hoc exequi, & neſcio quonam tempore id perficere potuiſſem, quia ſæpius diſtrahor vel negotiis vel novo quodam ſtudii genere. Quod perpendens, tandem præſtare judicavi hoc opus, qualecunque eſt, evulgare, ne diutiùs differendo, tandem perdatur.

PRÆFATIO.

Illius generis demonſtrationes hìc reperientur, quæ non æque ac geometricæ certæ ſunt, & quæ etiam multum ab his differunt, nam Geometræ ſuas propoſitiones deducunt ex principiis certis & indubitatis, hìc principia comprobantur per concluſiones quæ inde deducuntur, cum res ipſa hoc aliter fieri non patiatur. Fieri tamen poteſt ut hoc pacto ad eum veriſimilitudinis gradum perveniamus, qui fere ipſi evidentiæ æqualis eſt, ſcilicet ubi res, quæ demonſtratæ fuerunt per adſumta principia, congruunt perfecte cum phænomenis quæ experientia indicavit; in primis ubi magna illorum datur copia, & adhuc magis ubi nova ex his Hypotheſibus deducuntur & prævidentur phænomena, & ubi comperitur effectus noſtræ expectationi reſpondere. Si verò omnia hæc veriſimilitudinis argumenta in hocce quod mihi tractare propoſui occurrant, ut mihi perſuadeo, confirmabitur me optatum in inquiſitione ſucceſſum obtinuiſſe, & rem ipſam multum cum iis quæ ego dixi differre vix fieri poterit. Credo itaque illos omnes qui rerum cauſas cognoſcere deſiderant, & qui mira luminis phænomena admirari norunt aliquam percepturos eſſe voluptatem ex diverſis his ſpeculationibus, quæ ad lumen ſpectant, ut & ex nova explicatione de inſigni hujus proprietate, quæ fundamentum eſt noſtrorum oculorum conſtructionis, & magnarum illarum inventionum, quæ horum uſum inſigniter promovent. Spero quoque quoſdam fore qui hiſce principiis nixi, altiùs inquirent in hanc materiam, quàm ipſemet facere potui, cum multum abſit ut illam exhauſerim: Hoc patet ex locis quos notavi, ubi difficultates haud ſolutas relinquo; & adhuc magis ex iis quas intactas reliqui, ut ſunt corpora lucida diverſarum ſpecierum, & omnia, quæ ad colores ſpectant, in quibus nemo hactenus, ſe felicem habuiſſe ſucceſſum, gloriari poteſt.

Tandem plura reſtant inquirenda de natura luminis quàm me ipſum detexiſſe credo, & multum illi debebo qui ea ſupplere poterit, quæ in hiſce cognitioni meæ deficiunt.

Hagæ 8. *Jan.* 1690.

INDEX
IN
TRACTATUM DE LUMINE.

CAPUT I.

De Radiis directis.

LUmen oriri a certo quodam motu, Pag. 2
Nullam materiam a corpore lucido ad oculos noſtros pertingere, 3
Lumen ſe extendere in undas Sphæricas, fere inſtar ſoni, ibid.
Utrùm luminis motus ſucceſſivus ſit, 4
Experimentum quod probare videtur luminis motum eſſe inſtantaneum, ibid.
Experimentum quod probat illud aliquo indigere tempore, 6
Quantò ipſius velocitas ſit major velocitate ſoni, 7
Quomòdo luminis & ſoni emanationes differant, 8
Idem medium non inſervire utrique, ibid.
Quomòdo ſe extendat ſonus, 9
Quomòdo ſe extendat lumen, 11
Singularis annotatio in modum quo ſe extendit lumen, 14
Cur radii tantùm procedant ſecundùm lineam rectam, 16
Quomòdo radii luminis ex diverſis partibus profecti, ſeſe ſecent abſque impedimento. 17

CAPUT II.

De Reflexione.

Demonſtratio æqualitatis angulorum incidentiæ & reflexionis, ibid.
Cur radius incidens & radius reflexus ſemper ſint in uno eodemque plano perpendiculari ad planum reflectens, 19
Quòd non neceſſe ſit, ut ſuperficies repercutiens ſpectetur tanquam planum leve, ut fiat æqualitas angulorum incidentiæ & reflexionis, 20

CAPUT III.

De Refractione.

Quòd corpora poſſent eſſe pellucida etiamſi nulla materia illa pervaderet, 23
Experimentum quod probat materiam Æthereain corpora diaphana pervadere, ibid.
Quomòdo materia illa, quæ ibi tranſit, corpora reddat translucida, 24
Corpora, quæ videntur ſolidiſſima, eſſe texturæ valde raræ, ibid.
Lumen lentiùs permeare aquam & vitrum quàm aerem, 25
Tertia Hypotheſis ad explicanda corpora translucida & remoram quam ibi patitur lumen, ibid.
Quid corpora opaca reddere poſſit, 26
Demonſtratur cur refractio notam proportionem ſinuum ſervet, 27
Quare radius incidens & radius refractus reciprocè ſeſe producant, 30
Quare repercuſſio interior, quæ fit in priſmate vitreo triangulari, ſubitò multùm augeatur, ubi lumen amplius permeare illud non poteſt, 31
Corpora, quæ majoris refractionis cauſâ

ſâ ſunt, majorem quoque producunt reflexionem, 32
Demonſtratio Theorematis D. Fermat. 33

CAPUT IV.

De Refractione aëris.

Lumen non propagari per undas ſphæricas, 35
Quomòdo hinc corpora quædam magis elevata videantur, quàm re verâ ſunt, ibid.
Quomòdo ſol ante ortum ſupra Horizontem aparere poſſit, 35, 36. & ſeq.
Radios luminis incurvari in aëre Athmoſphæræ, & quinam inde ſequantur effectus. 37

CAPUT V.

De miranda refractione cryſtalli Iſlandici.

Naſcitur quòque hæc cryſtallus in aliis regionibus, 39
Qui primus de hac ſcripſit, 40
Deſcriptio cryſtalli Iſlandicæ, ejus materia, figura, & proprietates, ibid.
In hac cryſtallo duæ diverſæ obſervantur refractiones, 41
Radium qui cadit perpendiculariter in ejus ſuperficiem refringi, radios verò obliquos rectâ transire, ibid.
Obſervatio in hujus cryſtalli refractiones, ibid.
Datur in hac una refractio regularis, altera irregularis, 43
Modus menſurandi duas refractiones cryſtalli Iſlandicæ, ibid.
Notabilis proprietas refractionis irregularis, 45
Hypotheſis ad duplicem illam refractionem explicandam, ibid.
In cryſtallo rupis duplex etiam obſervatur refractio, 46
Hypotheſis emanationum ſphæroidearum luminis in cryſtallo Iſlandicâ, ad refractionem irregularem, ibid.
Quomòdo radius perpendicularis patiatur refractionem, 47
Quomòdò ſitus & forma emanationum ſphæroidearum in hac cryſtallo poſſit definiri, 49
Explicatio refractionis irregularis per has emanationes ſpæroideas, 50
Methodus facilis, quâ refractio irregularis radii cujuscunque incidentis poſſit inveniri, 52
Demonſtratur quòd radius, qui obliquè cryſtallum penetrat, non refringatur, 54
Aliæ refractionum irregularitates explicantur, 56
Quòd objectum poſitum ſub cryſtallo duplex conſpiciatur in duabus imaginibus diverſæ altitudinis, 59
Quare altitudines apparentes unius harum imaginum mutentur, ſi ſitus oculorum ſupra cryſtallum mutetur, 59
De diverſis cryſtalli ſectionibus, quæ adhuc alias producunt refractiones hanc theoriam confirmantes, 64
Modus ſingularis expoliendi cryſtalli ſuperficies ubi ſciſſum fuit, 66
Phænomenon mirabile radiorum, qui tranſeunt intra duo cryſtalli fruſta ſeparata, & cujus cauſa nondum fuit explicata, 67
Conjectura veroſimilis de cryſtalli Iſlandicæ compoſitione ejusque particularum figura, 69
Rationes quæ hanc conjecturam confirmant, 71
Computationes in hoc capite memoratæ. 72

CAPUT VI.

De figuris corporum Diaphanorum quæ ad refractionem reflexionemque conducunt.

Regulæ generales & faciles ad inveniendas illas figuras, 77

Inven-

Inventio Ovalium D. Carteſii pro Dioptricâ, 78
Quomòdo illas lineas invenire potuerit, 82
Methodus inveniendi vitri ſuperficiem pro refractione perfecta, ubi altera ſuperficies data fuit, 83
Animadverſio in radios refractos per ſuperficiem ſphæricam, 88
Animadverſio in lineam curvam quæ formatur a reflectione ſpeculi concavi ſphærici. 90

INDEX RERUM

In Tractatu de cauſâ Gravitatis contentarum.

MEam explicationem gravitatis a Carteſii explicatione differre, 98
Vis centrifuga comparata cum vi gravitatis, ibid.
Quomòdo ad gravitatem producendam conducat, ibid.
Experimentum quod gravitatis effectum repræſentat, 99
Experimentum Carteſii in eundem uſum, 100
Hypotheſis ad explicandam gravitatem, 101
Gravitatis definitio, 103
Cur non percipiatur motus materiæ, quæ gravitatem producit, 104
Dantur aliæ materiæ, quæ partes ſpatii replent, 104
Quòd materia, quæ gravitatis cauſa eſt, tranſeat per poros omnium corporum notorum, 105
Quid faciat diverſam corporum gravitatem, ibid.
Quòd gravitates corporum ſequantur rationem quantitatum materiæ quam continent, 106
Refutatur opinio Carteſii huic contraria, ibid.
Quænam ſit velocitas materiæ, quæ in terra gravitatem producit, 107
Celeritatem iſtius materiæ inſervire explicationi plurimorum aliorum effectuum naturalium, 109
Quòd eadem illa celeritas ſit cauſa, quare corpora cadendo motum ſuum continuò accelerant, 110
Et quare eorum velocitas creſcit ut tempora quibus cadunt, ibid.
De Obſervatione contractionis penduli ſingulis minutis ſecundis vibrationem peragentis circa lineam æquinoctialem, 111
Quænam ſit hujus effectus cauſa, ibid.
Quantùm horologia pendulis inſtructa ubi transferuntur Æquatorem verſus, retardantur, & quomòdo hæ retardationes ſupputari poſſunt, 114
Quòd funis, e quo pendet plumbum, non recta verſus Telluris centrum tendat, 115
Tellurem non eſſe ſphæricam, ibid.
Experimentum inſtitutum cum horologiis pendulis inſtructis ad inveniendum mari longitudinem, 117
Modus Telluris figuram determinandi, ibid.
Quænam poſſet eſſe Telluris figura, ſi hæc velociùs moveretur. 120
Animadverſiones in D. Newtoni ſyſtema, 121
Difficultates quæ in vorticibus Carteſii occurrunt, 122
An materia Ætherea debeat eſſe rara, 123
Quomòdo ejus denſitas non impediat, quò minùs corpora ſint gravia, 125
Annotationes in extenſionem luminis per lineam rectam, ibid.

Annotationes in Lunam, quæ confirmant pondus minui in ratione inverſâ quadratorum diſtantiarum à Telluris centro, 127
An inde ſecunda irregularitas in pendulis naſci non debeat, ibid.
De gravitate quæ percipitur in Planetis Saturno & Jove & in ſolis ſuperficie, 128
Conjectura circa cauſam intenſi luminis Solis, 129
De motu corporum gravium, quæ cadunt aut projiciuntur in medio reſiſtente, ibid.
De proprietatibus lineæ Logiſticæ. 135

ELENCHUS RERUM

Contentarum in Guidonis Grandi &c. Geometrica demonſtratione Theorematum Hugenianorum circa Logiſticam.

CAPUT I.

§. 1. 2 *Logiſticæ; ſeu Logarithmicæ deſcriptio,* 150
§. 3 *Ejus primaria proprietas,* 151
§. 4 *Logiſticæ aliorum graduum,* ibid.
§. 5 *Ejusdem per duos motus generatio,* ibid.
§. 6 *Axem habet pro Aſymptoto,* 152
§. 7 *Tam ſupra, quàm infra in infinitum continuari poteſt,* 153
§. 8 *Alio duplici motu deſcribitur,* 154
§. 9 *Spiralis Logarithmicæ per duos motus deſcriptio,* 155
§. 10 *Ejus primaria affectio,* ibid.
— *Ad alios gradus extendi poteſt,* 156
— *Centro per infinitos cincinnos circumvolvitur, licèt longitudine finita ſit,* ibid.
§. 11 *Æque inclinatur cuilibet radio,* ibid.
— *Gravia per ipſam delata eodem ſemper momento pollent, reſpectu momenti, quod haberent in perpendiculo, Carteſio etiam id primùm obſervante,* 157. & 158
§. 12 *Per convolutionem primæ Logiſticæ gigni poteſt,* 158
— *Fallax, ex nonnullorum methodo, ratiocinium circa ejus ſpatii dimenſionem,* ibid.

CAPUT II.

— *Logiſticæ proprietates ab Hugenio propoſitæ.* 160
§. 1. 2. 3 *Spatiorum ſive ad axem, ſive ad ejus parallelam ordinatis interjectorum, tum ad invicem, tum ad infinitum reliquum Logiſticæ ſpatium proportio,* 160. & 161
§. 4. 5 *Subtangentis longitudo ſemper eadem & quæ,* 161 & 162
§. 6 *Trilineorum Logiſticæ proportio,* 162
§. 7 *Infinitum Logiſticæ ſpatium, cujus trianguli duplum,* ibid.
§. 8 *Cui rectangulo æqualia reliqua ſpatia,* 163
§. 9. 10 *Solida ex infinito ſpatio Logiſti-*

giſticæ circa axem, vel circa ordinatam revoluto, quam proportionem habeant ad conos inſcriptos? 163

§. 11. 12 *Centrum gravitatis ſpatii Logiſtici, in qua ab axe & ab ordinatis diſtantia?* 164

§. 13. 14 *Prædictorum ſolidorum gravitatis centra determinantur.* ibid.

§. 15. *Quomòdo Logiſtica Hyperbolæ tetragonismo conducat,* 165

—— *Et quam proportionem habeant Hyperbolica ſpatia ad parallelogrammum quodlibet aſymptotis inſcriptum?* ibid.

CAPUT III.

§. 1. 2 *Primo Theoremate propoſito, oſtenditur aggregata quotlibet geometricè proportionalium a minimo eſſe inter ſe, ut differentiæ terminorum maximi & minimi.* 166. 167

§. 3 *Incommenſurabiles magnitudines per ablationem quantitatis minoris, qualibet data, reddi commenſurabiles.* 168

§. 4. 5 *Hinc primi Theorematis Hugeniani demonſtratio more Archimedeo.* 169. 170

§. 6 *Spatia Logiſticæ æquè alta ſunt inter ſe, ut homologæ ordinatæ,* 170

§. 7 *Spatia quoque infinitè longa ſunt ut baſes,* 171

§. 8 *Quodvis ſpatium ad ſubſequens infinitum eſt, ut differentia ſuarum ordinatarum ad minorem,* 172

§. 9 *Hinc ſecunda ejus primi Theorematis demonſtratio.* 172

CAPUT IV.

§. 1. 2. 3 *Ad ſecundum Hugenii Theorema demonſtrandum, quæ ſit Logiſticæ parameter oſtenditur, & quomòdo æqualis ſit ſubtangenti.* 173

§. 4 *Demonſtratio ſecundi Theorematis,* 174

§. 5. 6 *Determinatio rectanguli æqualis ſpatio Logiſticæ infinitè longo.* 174. 175

§. 7 *Exponitur Auctoris circumſpecta loquutio de ratione infinitè ſpatii ad finitum,* 175

§. 8 *Ac familiaribus exemplis ſuadetur, infinitè longa ſpatia determinatæ quantitati æqualia eſſe poſſe.* ibid.

§ 9. 10. *Spatia per variæ rationis ordinatas in Logiſticâ abſciſſâ quam proportionem habeant?* 177. 178

§. 11. 12 *Regula ad dignoſcendum quando ſpatia infinitè longa, aut infiniti termini, finitam aggregent quantitatem, quando verò infinitam,* 179

CAPUT V.

§. 1. 2 &c. *Quartum Hugenii Theorema, pridem demonſtratum, novâ demonſtratione per diverſam methodum ſtabilitur.* 182, 183

§. 2 *Tractoriæ proprietas, hinc deducta, quod ordinatæ ad æquales curvæ partes ſint invicem proportionales,* 183

§. 3 *Cuilibet curvæ tangentem ducere,* ibid.

—— *Velocitates in diverſis curvæ punctis ſunt, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alterne ſumptas.* 185

—— *In Hyperbola ſunt, ut quadrata temporum contrarie ſumptorum,* ibid.

§. 4 *Determinatio tangentium ad infinitas*

 finitas

finitas parabolas, 186
§. 5 *Eadem expeditior*, 187
§. 6 *In aliis curvis quomòdo tentanda*, 188
§. 7 *Variarum ad id conſtructionum demonſtratio*, 189
§. 8 *Subtangens curvarum, quæ ad modum ſpiralium deſcribuntur.* 190
§. 9 *Infinitæ ſpiralium ſpecies, quas ſubtangentes habeant.* 191
—— *Et quomòdo infinitis parabolis reſpondeant.* 192
§. 10 *Tangens ſpiralis Geometricæ, & quarumvis figurarum per alterius convolutionem genitarum.* 193
§. 11 *Tangens Conchoïdis Nicomedeæ, aliis infinitis Conchoïdibus & ſubconchoïdibus, applicabili methodo oſtenſa.* 194
§. 12 *Eadem geometrica demonſtratione confirmata.* 195
§. 13 *Tertia demonſtratio quarti Theorematis Hugeniani.* 196
§. 14 *Curva parabolica Logiſticæ ſemper perpendicularis.* 197

CAPUT VI.

§. 1 *Quintum Theorema proponitur.* 198
§. 2 *Quod ut demonſtretur, oſtenditur, Hyperbolica ſpatia parallelis aſymptoto proportionalibus definita æqualia eſſe.* 199
§. 3 *Spatia quælibet eam inter ſe rationem habere, quam entremarum ordinatarum rationes*, 200
§. 4 *Axi logiſticæ parallelæ inter ſe ſunt, ut Hyperbolica ſpatia iis reſpondentia.* 201
§. 5 *In Geometricâ ſpirali, arcus, & ſectores circulares ejus ramis interjecti, proportionantur ſpatiis, & ſectoribus Hyberbolicis reſpondentibus.* 202
§. 6 *Subtangens Logiſticæ ad quamvis axi parallelam eſt, ut parallelogrammum Hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium Hyperboilcum.* ibid.
§. 7 *Demonſtrandi modus a ſcrupulis vindicatur.* 203
§. 8 *Propoſitio univerſalior redditur.* 204
—— *Quid ſit facere univerſale.* 205
§. 9 *Prima Geametricæ ſpiralis ſubtangens eſt ad arcus circulares, ut Hyperbolæ parallelogrammum ad Hyperbolica ſpatia.* ibid.
§. 10 *Spatia Hyperbolica aut ſectores Hyperbolici in eâ ſunt ratione ad circulares ſectores correspondentes, in qua minima ordinatarum Hyperbolæ ad ſemiſſem ſubtangentis Logiſticæ.* 206
§. 11 *Parallelogrammum Hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium ordinatis duplæ proportionis interjectum eſt proxime, ut* 10. *ad* 7. ibid.
§. 12 *Qninti Theorematis Hugenii demonſtratio.* 208

CAPUT VII.

§. 1 *Sextum Theorema proponitur.* 210
§. 2 *Et univerſalius demonſtratur.* ibid.
§. 3 *Spatia Logiſticæ in data ratione dividere.* ibid.
§. 4 *Cavum trilineum convexo æquale.* 211
—— *Rectangula ſpatiis Logiſticis æqualia.* ibid.
§. 5 *Item ſpatiis Hyperbolicis.* ibid.
§. 6 *Ordinatæ in trilineo Logiſticæ, axi parallelæ, couvexis & cavis Hyperbolæ ſegmentis proportionales.* 212
§. 7 *Eadem aliis figuris applicare.* ibid.

Hyper-

—— *Hyperbolam ducere, quæ datam Logiſticam, vel in dato puncto contingat.* ibid.

—— *Maximum parallelogrammum Logiſticæ inſcribere & duo utrinque æqualia determinare.* 213

§. 8 *Datâ cujusvis figuræ tangente, maximum illi parallelogrammum inſcribere, & contra.* ibid.

—— *Idem circa alia maxima præſtare per alias Hyperbolas.* 214

§. 9 *Infinitarum Hyperbolarum tangentes.* 214

§. 10, 11 *Spiralis geometricæ ſpatia inter ſe, & cum ſuis partibus comparantur.* 215

§. 12 *Cujusvis convolutæ figuræ, ejusve partium, ad circum ſcriptum ſectorem, & ejus Zonas, proportio eadem, quæ Conoidis ab evolutâ figurâ, ejusve partium, ad circumſcriptum cylindrum & tubos cylindricos.* 216

§. 13 *Evolutæ ad convolutam ratio, quibus compoſita.* 217

—— *Exempla in ſpiralibus.* ibid.

§. 14 *Geometricæ ſpirali doctrina applicatur.* 218

CAPUT VIII.

§. 1. 2. 3 *Septimum Theorema pridem oſtenſum, ut novâ demonſtratione fulciatur, oſtenditur, ſpatio à qualibet curvâ contento quò ad totum, & quò ad partes, æquale ſpatium ex ſubtangentibus ad curvæ puncta applicatis, vel ad reſpectiva puncta baſis.* 219 220. 221

§. 4 *Item ducta per quodvis punctum tangentibus parallela, occurrente ordinatis, puncta interſectionum eſſe in curvâ, quæ cum priori comprehendet ſpatium primæ figuræ duplum, adeoque cum ejus baſi (niſi hanc nova curva ſecet ac congruo loco punctum acceptum ſit) ſpatium primo æquale.* 221

§. 5 *Eadem opera duæ ejusmodi curvæ deſcribuntur.* 222

—— *Eadem doctrina converſim accepta inventioni tangentium deſervire poterit.* ibid.

§. 6 *Dimenſio figuræ per normam & perpendiculum deſcriptæ.* ibid.

§. 7 *Spatii Cycloidis, obiter ejus tangente determinata, dimenſio, variorumque ſegmentorum proportio.* 224

§ 8 *Segmenta ejusdem quadrabilia.* 225

§. 9 *Ciſſoïdalis ſpatii, ejusque ſegmentorum menſura.* 226

—— *Spatium a Tractoriâ, & ejus axe interceptum æquale quadranti radio ſuæ tangentis deſcripto.* 227

§. 10, 11, 12 *Infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum quòque infinitarum ſpecierum, ſpiralium item cujusvis generis, etiam geometricæ, dimenſio expenditur.* 227, 228, 229.

§. 13 *Septimi Theorematis Hugeniani demonſtratio ex hac doctrinâ eruitur.* 231

§. 14 *Octavum quoque Theorema pridem oſtenſum, hinc novam demonſtrationem aſſumit.* ibid.

CAPUT IX.

§. 1, 2 *Prima noni Theorematis demonſtratio.* 232, 233

§. 3 *Hinc ſolida omnia ex infinitis Logiſticæ ſpatiis eſſe oſtenduntur, ut quadrata radiorum baſis, & portiones ut differen-*

rentiæ quadratorum à radiis extremis. 234

§. 4 *Alia Logiſtica in duplicatâ ordinatarum prioris ratione ſpatium comprehendit prioris ſubduplum.* ibid.

§. 5 *Item ſubtangentem ſubduplam habet.* 235

— *Generaliter quæcunque fuerit Logiſtica, ejus ſpatium & ſubtangens, tam ſubmultiplex erit prioris, quam ſubmultiplicata ordinatarum ratio.* ibid.

§. 6 *Idem nonum Theorema ſecundo demonſtratur.* ibid.

§. 7, 8. *In correlatis figuris ſolidum ab exteriori duplum ſemper eſt ſolidi quod ab interiori circa axem revoluta deſcribitur, & partes partium reſpondentium.* 236, 237

§. 9 *Hinc tertia ejusdem Theorematis demonſtratio.* 237

§. 10, 11. *Dimenſio ſolidi ex figurâ quadranti correlata, ejusve partibus tum concavis, tum convexis,* 237, 238

§. 12 *Item ſolidorum ex trilineo Cycloïdis, ipſave ſemicycloïde circa tangentem verticis revoluta, ejusque partium.* 238

— *ſolidorum quoque ex ſpatio Ciſſoïdis concavo aut convexo, tum circa Aſymptoton, tum circa ei parallelam ex vertice.* 239

§. 13 *Conoïdum ex infinitis parabolis ad circumſcriptos cylindros, vel conos.* ibid.

§. 14 *Item ſolidorum ab infinitis Hyperbolis ratio ad inſcriptos Cylindros nota.* 240

CAPUT X.

§. 1, 2 *Decimum theorema proponitur ac primâ demonſtratione ſtabilitur.* 242, 243

§. 3 *Infinita ſeries terminorum proportionalium æquatur maximo ducto in exponentem rationis, ac diviſo per eundem exponentem unitate minutum.* 244

§. 4. 5 *Ex hoc demonſtrandi modo, tum finitæ, tum infinitæ, ſeries æquales oſtenduntur ſummæ vel differentiæ duarum poteſtatum, per ſummam vel differentiam radicum diviſæ &c.* 245, 246

§. 6, 7 *Solidum rotundum, de quo in hoc Theoremate, per infinitæ ſeriei calculum ad menſuram redigitur.* 249, 250

§. 8 *Subtangentes Logiſticæ in ordinata acceptæ ſunt, ut rectangula Logiſticæ inſcripta.* 252

§. 9 *Solidum ex quovis Logiſticæ ſpatio circa ordinatam revoluto ad inſcriptum cylindrum eſt, ut congruum trilineum ad inſcriptum triangulum.* ibid.

§. 10. *Hæc ratio nota eſſe oſtenditur.* 253

— *Annulis quoque latis, per hæc ſpatia progenitis, demonſtratio applicabilis eſſe indicatur.* ibid.

CAPUT XI.

§. 1 *Propoſitio & demonſtratio undecimi Theorematis circa diſtantiam centri gravitatis Logiſticæ ab ordinata.* 254

§. 2 *Solida infinitorum Logiſticæ ſpatiorum circa ordinatas ſunt, ut eædem ordinatæ.* 255

§. 3 *Centrum gravitatis quomodo diſtet ab alterutrâ ordinatarum in ſpatiis determinatis Logiſticæ.* 256

§. 4 *Solida ex his ſpatiis circa quamvis ordinatam revolutis.* ibid.

Datum

—— *Datum ſolidum in data ratione dividere &c.* ibid.

§. 5 *Propoſitio ac demonſtratio Theorematis XII. circa diſtantiam centri gravitatis Logiſticæ ab axe.* 257

§. 6 *In Correlatis figuris diſtantia centri gravitatis interioris ſubdupla eſt ſimilis diſtantiæ exterioris.* ibid.

§. 7 *Talis diſtantia in figura correlata quadrantis circuli eſt ſesqui tertia baſis quadraticis.* 258

§. 8 *Centrum gravitatis trilinei Cycloidis diſtat a verticis tangente per ſemiſſem radii.* ibid.

§. 9 *Diſtantia centri gravitatis ſemi-Cycloidis, & ejus trilinei a baſi & vertice.* 259

—— *Nec non ſolida ab iis deſcripta.* ibid.

§. 10 *Ciſſodalis ſpatii centrum gravitatis, in qua ab Aſymptoto diſtantia.* ibid.

—— *Ejus ſolida.*

—— *Atque hinc ratio fuſi Cycloïdalis ad Cylindrum.* 260

§. 11 *Figuræ, quæ Logiſticæ ad axem correlata eſt, diſtantia centri gravitatis ab ordinatâ.* ibid.

—— *Similis diſtantia in harum, & generaliter omnium correlatarum figurarum complexo.* ibid.

§. 12 *Secunda demonſtratio duodecimi theorematis, & extenſio ad inventionem centri, in quibusvis Logiſticæ portionibus, ad ſolida ex iis circa quamvis lineam rotandis determinanda, utilem.* 261

CAPUT XII.

§. 1 *Theorema decimum tertium demonſtratur.* 263

§. 2 *Eadem ſemper centri gravitatis in quibusvis infinite longis Logiſticæ ſolidis diſtantia.* ibid.

—— *Quomodo in ejusdem ſolidi portionibus indaganda.* 264

§. 3 *Prima demonſtratio decimi quarti Theorematis.* ibid.

§. 4 *Ad majorem rigorem quomodo exigenda.* 266

§. 5 *Solidorum ab eadem figura circa baſim, & axim rotata diſtantiæ centri gravitatis ſunt, ut diſtantiæ centri gravitatis genetricis figuræ ab hujus axi & baſi.* ibid.

§. 6 *Altera ejusdem Theorematis demonſtratio.* 268

§. 7 *Variarum Conoideon centra hinc determinanda.* ibid.

§. 8 *In portionibus ſolidi rotundi, aut Cylindricis Logiſticæ truncis, aut figura Logiſticæ correlata, centra gravitatis dantur.* 269

§. 9 *Libræ infinitæ, geometrice decreſcentibus, & æque diſtantibus ponderibus gravatæ, aut finitæ quidem, ſed per intervalla continuè proportionalia arithmeticè in infinitum creſcentibus quantitatibus oneratæ, centra æquilibrii determinari poſſunt.* ibid.

§. 10 *Secunda demonſtratio a ſcrupulo vindicata.* 270

—— *Cautio in his adhibenda.* 271

—— *Aliorum lapſus notati, ut devitentur.* 272

§. 11 *Curvis ſuperficiebus ſolidorum generalis demonſtratio applicatur.* ibid.

§. 12 *Logiſtica curva centro gravitatis caret.* 274

—— *Circa axem rotata ſuperficiem infinite longam, finitæ dimenſionis producit.* ibid.

§. 13 *In qua ad determinatam hyperbolam ratione.* 276

—— *Hæc hyperbola, cujus parabolicæ lineæ in ſemitransverſum ductæ rectangulo æqualis.* ibid.

§. 14 *Curva illa ſuperficies, cujus circum-*

circumferentiæ, & peripheriæ parabolicæ rectangulo æqualis. ibid.

— *Ut ejus portiones correſpondeant ejusdem parabolæ partibus.* 277

§. 15 *Tractoriæ ſolidum finitâ ſuperficie gaudet.* ibid.

— *Ejus curva centro pariter caret.* ibid.

CAPUT XIII.

§. 1 *Theorema decimum quintum in quinque partes diviſum aliàs demonſtratum.* 278

§. 2. *Figurarum ad eumdem axem compoſitarum, ſi portiones unius proportionentur ordinatis alterius, quomòdo tangentes determinandæ.* 279

§. 3. *Alia demonſtratio primæ, & tertiæ partis hujus Theorematis.* 280

— *Hyperbolicum ſpatium æquale rectangulo ordinatæ in alteram Logiſticæ ſubtangentem.* ibid.

§. 4 *Tangens expanſæ Ungulæ cylindricæ determinata.* 281

§. 5 *Generalis conſtructio tangentium pro omnibus ungulis etiam ex cylindro non circulari abſciſſis.* 282

§. 6 *Solidi ex Logiſtica infinitè longi ſuperficiem finitam eſſe rurſus demonſtratur.* 283

— *Hyperbola Ungulæ Logiſticæ correlata* 284

§. 7 *Ut Parallelogrammum Logiſtico trilineo circumſcriptum ad ipſum trilineum, ita Cylindricus Logiſticus ad truncum ſuum, ita & Hyperbolicus cylindricus ad truncum ſuum.* ibid.

— *Rotundum ſolidum ex Hyperbola ad rotundum ex Logiſtica, ut inſcriptum Hyperbolæ parallelogrammum ad Logiſticæ ſubtangentis quadratum.* 285

§. 8. 9 *Cæteræ Theorematis partes ex longioribus Logarithmorum tabulis determinandæ.* 286. 287

§. 10 *Auctoris verba circa Hyperbolæ quadraturam ex tractatu de evolutione curvarum adducta.* 287

— *Hyperbolæ quadratura per tractoriam.* 288

EPISTOLA GEOMETRICA G. Grandi ad P. T. Cevam. 293

§. 1. 2. 3 *Noſtra Doctrina de Conicæ ſuperficiei dimenſione per P. Cevam ex Pappo confirmata.* 293. 294

— *Spiralium diverſi generis origo.* ibid. ibid.

§. 4. 5. 6 *Quælibet Conica ſuperficies quomòdo in planum explicanda.* 295. 296. 297

§. 7. *Et quævis plana figura quomòdo Cono advolvenda.* 297

§. 8 *Quarumvis linearum in Coni ſuperficie deſcriptarum Ichnographias determinare.* 298

§. 9 *Et datis Ichnographiis lineas in coni ſuperficie iis reſpondentes reperire.* 299

§. 10 *Curvarum transformatio ad illas comparandas utilis.* 300

§. 11. 12 *Ichnographiarum omnium, linearumque ex coni ſuperficie in planum explicatarum tangentes duplici methodo inventæ.* 301. 303

§. 13 *Nova ejusdem ſupra dictæ noſtræ doctrinæ confirmatio.* 305

§. 14 15 *Ad cono-Cylindricæ ſpiralis extenſionem in planum, oſtenditur ſpiralis Archimedeæ & Apollonianæ Parabolæ æqualitas.* 305 306

§. 16 *Quorumdam lapſus notati.* 307

Infini-

—— *Infinitarum Parabolarum & ſpiralium comparatio.* 308
§. 17 *Novus Cycloidem rectificandi modus.* ibid.
§. 18 *Transverſa Cylindri Cycloïdalis ſectio Parabolæ æqualis.* 309
—— *Ungula quoque nil niſi Parabola complicata eſſe dignoſcitur.* 310
—— *Rotunda ſuperficies ex Cycloide circa baſin dupla ejus, quæ ab ipſa circa tangentem verticis rotata producitur.* ibid.
§. 19 *Cylindrum invenire, cujus transverſa ſectio propoſitæ cuilibet curvæ ſit æqualis, & Ungula in quamlibet figuram datam explicetur.* 311
—— *Ex Cylindro Tractoriæ ſecanda eſt Logiſtica.* 312
§. 20 *Curva cono-cylindricæ ſpiralis cuidam Parabolæ, longitudine, non poſitione æqualis eſt.* 312
§. 21 *Dimenſio ſuperficiei Cylindricæ, utrique ſpirali, & axi coni interjectæ.* 314
§. 22 *Si ſpiralis fuerit Geometrica, explicatâ illâ cylindrico-ſpirali ſuperficie, in rectam expandetur.* 315

Tomi primi Operum Poſthumorum Index.

DIOPTRICA.

De refractione radiorum.

PROP. I. & II. *Datâ ſuperficie diaphani, quomòdo radius extrinſecus in illam incidens refringatur, & ubi diaphanum transpoſitum fuerit; quænam erit refractio.* 5.6
PROP. III. *Datâ ſuperficie diaphani, quomòdo radius intrinſecus incidens refringatur.* 6
PROP. IV. *Datâ diaphani ſuperficie planâ, & puncto, ad quod radii tendentes in ſuperficiem extrinſecus impingant, invenire punctum concurſus refractorum.* 8
PROP. V. *Datâ diaphani ſuperficie planâ, & puncto, a quo venientes radii in illam extrinſecus incidant, invenire punctum diſperſus refractorum.* 11
PROP. VI. *Datâ diaphani planâ ſuperficie & puncto ex quo manantes radii intrinſecus in eam deferantur, invenire punctum diſperſus refractorum.* ibid.
PROP. VII. *Datâ diaphani ſuperficie planâ, & puncto extra diaphanum ad quod tendentes radii intrinſecus in ſuperficiem ejus incidant, invenire punctum concurſus refractorum.* 12
PROP. VIII. *Datâ diaphani ſuperficie ſphæricâ convexâ in quam radii paralleli extrinſecus incidant, invenire punctum concurſus refractorum.* 15
PROP. IX. *Datâ diaphani ſuperficie ſphæricâ convexâ cui paralleli radii intrinſecus occurrant, invenire punctum concurſus refractorum.* 17
PROP. X. *Datâ diaphani ſuperficie ſphæricâ cavâ, in quam radii paralleli extrinſecus incidant, invenire punctum diſperſus refractorum.* 19
PROP. XI. *Datâ diaphani ſuperficie ſphærica cava, in quam radii paralleli intrinſecus incidant, in-*

venire punctum diſperſus refractorum. 20

PROP. XII. *Datâ diaphani ſuperficie convexâ vel cavâ, & puncto, ad quod pertinentes radii ſuperficiei dictæ occurrant; ſi tribus* (quæ hìc indicantur) *ab illo puncto diſtantiis quarta proportionalis conſtituatur in axe, qui per centrum ſuperficiei & punctum ipſum tranſit, terminus quartæ diſtantiæ erit punctum quò pertinebunt radii refracti.* ibid.

In dato loco ſuperficiem ſphæricam conſtituere, quæ radios ex dato vel ad datum punctum pergentes, ad aliud punctum datum concurrere faciat. - 41

PROP. XIII. *Sphærâ datâ, quæ ſit ex materia diaphana, invenire punctum concurſus radiorum parallelorum in illam incidentium.* 43

PROP. XIV. *Datâ lente, quæ ſuperficiem unam planam habeat, alteram convexam, invenire punctumconcurſus radiorum axi parallelorum.* 45

PROP. XV. *Datâ lente quæ cavam & planam ſuperficiem habeat, invenire ante ipſam punctum diſperſus radiorum parallelorum.* 46

PROP. XVI. *Datâ lente convexa parium vel diſparium ſuperficierum ſive utraque convexa ſit, ſive altera cava, ſed cavitas ſit convexitate minor; invenire punctum concurſus parallelorum.* 47

PROP. XVII. *Datâ lente cava duarum ſuperficierum ſphæricarum punctum diſperſus radiorum parallelorum invenire.* 49

PROP. XVIII. *Lentem invenire cujus ſuperficies altera convexa ſit, eadem datæ, quæque punctum concurſus parallelorum habeat ad datam diſtantiam.* 51

PROP. XIX. *Datæ lenti inæqualiter convexæ vel menisco, lentem aliam æquivalentem invenire, quæ convexam & planam ſuperficiem habeat, vel utramque convexam æqualiter.* 52

PROP. XX. *Poſitâ quavis lente convexâ vel cavâ, utrâque ſuperficie ſphæricâ conſtet, ſive alterâ planâ; datoque in axe ejus puncto, a quo vel ad quod radii tendentes lenti occurrant: Si duabus* (hìc indicatis) *ab eo punctis diſtantiis tertia proportionalis ſtatuatur: erit terminus tertiæ, ſumendæ a puncto dato in partem eandem cum prima, punctum concurſus vel diſperſus radiorum a dato puncto vel ad datum tendentium.* 53

PROP. XXI. *Radiorum qui ad axes lentium pertinent ab axe primario paulum declinantes, puncta concurſus vel diſperſus inveſtigare, & oſtendere eandem fere horum eſſe a lente diſtantiam, ac eorum quæ ad puncta radiorum in axe poſitorum pertinent, ſi vel paralleli vel ab æque procul diſtantibus punctis radii fuerint egreſſi.* 57

PROP. XXII. *In omni lente, duarum convexarum aut concavarum ſuperficierum, punctum quoddam eſt intus, per quod radius quilibet tranſiens ante & poſt lentem ſibi ipſi parallelus incedit. In Menisco autem & in illa quæ minori cavo quàm convexo conſtat, punctum ejusmodi extra lentem a parte ſphæræ minoris reperitur.* 60

PROP. XXIII. *Pictura cujusque viſibilis quæ fit in plano poſt lentem convexam, ad viſibile ipſum eam habet rationem, ſecundùm diametrum, quam picturæ diſtantia a lente ad viſibilis ab ea diſtantiam.* 61

De aberrationibus ex figura. 62

PROP. XXIV. *In minimis circuli ejusdem ſegmentis, altitudines*

ſeg-

ſeu diametri ſegmentorum eandem inter ſe rationem habere cenſendæ ſunt, quam quadrata baſium. 62

PROP. XXV. *In minimis circulorum inæqualium ſegmentis, æquales vel easdem baſes habentibus, altitudines ſegmentorum diametris ipſorum circulorum, contraria ratione reſpondere cenſendæ ſunt.* 63

PROP. XXVI. *Lentes convexæ eandem foci diſtantiam habentes, cavæ verò eandem diſtantiam puncti diſperſus, ſi & latitudinem æqualem habuerint, etiam æquali erunt craſſitudine & contra.* 65

PROP. XXVII. *Oſtendere quomòdo in lentibus aberrationes radiorum quæ ex figura ſuperficierum ſphærica oriuntur compendio inveniantur. Et quænam lens ſphærica convexa meliùs radios parallelos colligat inveſtigare.* 67

PROP. XXVIII. *Concavarum lentium quænam meliùs radios parallelos diſpergant, inveſtigare.* 74

PROP. XXIX. *In lentibus diverſarum latitudinum, convexis aut concavis, quæ ſuperficies radiis expoſitas ex eadem ſphæra habuerint, itemque adverſas ſuperficies ex eadem ſphæra licèt a priori diverſa, vel quæ alteram harum ſuperficierum planam habuerint; aberrationes radiorum extremorum axi parallelorum ſunt inter ſe, ſicut lentium craſſitudines, ſive etiam ut latitudinum quadrata.* 80

PROP. XXX. *In lente quavis convexa aut cava aberrationes radiorum axi parallelorum ſunt inter ſe ſicut quadrata diſtantiarum eorundem radiorum ab axe.* 82

PROP. XXXI. *Oculi conſtructionem, & quæ ſit videndi ratio explicare* 84

PROP. XXXII. *Senum & Myopum oculis auxilium comparare lente vitreâ.* 87

PROP. XXXIII. *Lentem vitream invenire, qua ſub aquis poſiti diſtinctè videant.* 89

PROP. XXXIV. *Perſpicillum ex datis duabus lentibus compoſitum cuilibet viſui accommodare.* 92

PROP. XXXV. *Quæ, vel ob interpoſitas lentes, vel ratione diſtantiæ, confuſe ſpectantur, diſtincta reddi poſſunt, vel addita lente una juxta oculum, vel oppoſita ibidem lamina cum foramine minimo; dummodo, non in ipſo maximæ confuſionis puncto oculus poſitus fuerit. Utracunque verò correctio adhibeatur eadem magnitudine, & poſitu viſibile ſpectabitur.* 93

De effectu lentium, quo ad magnitudinem & ſitum apparentem 95

PROP. XXXVI. *Oculo conſtituto inter lentem convexam & focum ejus, viſibile quodvis per lentem ſpectatur ſitu recto, & auctum magnitudine; habetque magnitudo apparens ad veram, ſi viſibile longinquum eſt, rationem eam, quam diſtantia inter lentem & focum, ad diſtantiam inter focum & oculum; ſi verò propinquum, rationem compoſitam ex eadem, quæ dicta eſt, & ex ratione diſtantiæ inter oculum & viſibile ad diſtantiam inter viſibile & punctum dirigens; ſi verò in foco lentis oculus ſtatuatur, viſibilia longinqua in infinitum augentur; propinqua verò ſecundùm rationem quam habet diſtantia eorum ab oculo ad diſtantiam oculi a lente.* ibid.

PROP. XXXVII. *Poſito oculo in axe lentis convexæ, ſed ita, ut ultra focum ab ea diſtet, viſibile ad alteram partem lentis ſitum, ſed citra punctum reſpondens, erectum*

ctum & majus ſpectatur. Ulterius verò quam punctum reſpondens a lente remotum, videbitur inverſum, & majus vel minus pro diverſa ipſius atque oculi a lente diſtantia. Ratio autem magnitudinis apparentis ad veram ſe habebit eodem modo atque in Theoremate præcedenti. 98

PROP. XXXVIII. *Poſito oculo poſt lentem cavam, viſibilia omnia erecta videntur, & vero minora; habetque magnitudo apparens ad veram, ſi viſibile fuerit longinquum, rationem eam quam diſtantia inter lentem & punctum diſpergens ad diſtantiam hujus ab oculo. Si verò propinquum, rationem compoſitam ex illa quæ dicta eſt, & ex ratione diſtantiæ inter oculum & viſibile ad diſtantiam viſibilis a puncto directionis.* 100

PROP. XXXIX. *Datis duabus lentibus, & poſitione earum tam inter ſe, quàm inter oculum & viſibile, invenire qua proportione illud augeant vel imminuant, & utrum ſitu erecto an everſo referant.* 101

PROP. XL. *Si per lentes quotlibet viſibile conſpiciatur, iiſque manentibus, oculus & viſibile viciſſim loca permutent. Eâdem hoc, qua prius magnitudine apparebit.* 107

PROP. XLI. *Manente oculo & viſibili, quocunque loco inter utrumque lens convexa ſtatuatur, cujus foci diſtantia major ſit quartâ parte intervalli, quod inter oculum & viſibile, erectum hoc conſpicietur; Et maximum tunc apparebit, cum medio loco inter viſibile & oculum lens ſtatuetur; ſi verò foci a lente diſtantia dicti intervalli quarta parte minor fuerit, etiam inverſum quandoque viſibile conſpicietur; eritque inverſarum ſpecierum minima, cum lens medium intervalli locum tenebit.* 111

PROP. XLII. *Manente oculo & viſibili, ſi lens cava inter utrumque conſtituatur, quo propinquior erit loco inter oculum & viſibile medio, & minorem hujus ſpeciem efficiet, & omnium cum medium tenebit ipſum.* 116

PROP. XLIII. *Manente diſtantiâ oculi a lente convexa, ſi inter lentem & focum oculus ſit, quò magis viſibile removebitur, eo minori conſpicietur magnitudine. Si verò ultra focum oculus a lente diſtet, abſcedens viſibile augebitur, quamdiu erectum apparet; inde verò, ſi porro removeatur, decreſcet inverſa imago. Quòd ſi in foco lentis conſtitutus fuerit oculus, quacunque viſibilis a lente diſtantiâ, eâdem ſemper magnitudine cernetur.* 118

PROP. XLIV. *Manente diſtantia lentis ab aſpectabili, ſi fuerit hoc lenti propiùs quàm focus ſuus; quò magis oculus a lente diſtabit, eò minori magnitudine conſpicietur; ſi verò ultra focum a lente diſſitum fuerit aſpectabile, removendo oculum a lente, augebitur quandiu erectum apparebit. Inde verò, ſi porro receſſerit oculus, everſa ſpecies diminuetur. Quòd ſi ad focum lentis ſitum ſit, quacunque oculi a lente diſtantia, æquali magnitudine conſpicietur.* 119

PROP. XLV. *Si loco conſpicilli duarum lentium, ejuſmodi adaptetur ex ſolido materiæ diaphanæ fruſto, cujus altera ſuperficies convexa ſit, altera cava, eâdem proportione viſibilia augebit longinqua, atque conſpicillum duarum lentium. Scilicet augmenti ratio ea erit, quæ diſtantiæ ſuperficiei convexæ a foco ſuo ad diſtantiam foci a cava,* cui

cui oculus ad motus fuit. 119
PROP XLVI. *Diſpoſitis, in linea recta oculum & viſibile jungente, lentibus aut ſuperficiebus quotvis, & quibuslibet, communem axem habentibus eandem lineam rectam, percipiet oculus poſt omnium refractiones aliquam viſibilis partem, etiamſi veluti ad punctum reductus fuerit, dummodo hoc punctum non ſit, quo poſt refractionem concurrunt radii a puncto viſibilis, quòd in axe eſt, egreſſi.* 122
PROP. XLVII. *Si inter oculum & rem viſam quotlibet lentes aut ſuperficies diaphani interjaceant, & a puncto rei viſæ, quod ſit in omnium axe communi, manantes radii, trajectis iisdem lentibus aut ſuperficiebus paralleli exeant; quocunque intervallo poſt ipſas oculus ſtatuatur, eadem apparebit rei viſæ magnitudo; idemque poſitus.* 123
DE TELESCOPIIS. 124
PROP. XLVIII. *Teleſcopium ex convexa & cava lente compoſitum viſibilia longinqua, diſtinctè ac recto ſitu videri facit, amplificatque ſecundùm rationem foci diſtantiæ lentis convexæ ad diſtantiam puncti diſperſus lentis cavæ.* 128
Amplitudinem anguli viſorii, ſeu ſpatii, quod uno intuitu exhibet Teleſcopium ex convexa & cava lente conſtructum, definire. 132
PROP. XLIX. *Teleſcopium e duabus convexis lentibus compoſitum procul poſita diſtinctè, ſed everſa oſtendit, amplificatque ſecundùm rationem foci diſtantiæ lentis exterioris ad foci diſtantiam interioris.* 134
PROP. L. *Conſtitutionem teleſcopii ad obſervandas ſolis Eclipſes maculasve demonſtrare, & quanta futura ſit ejus imago.* 137
PROP. LI. *Quomòdo pro duabus convexis, tria adhibendo amplius fiat teleſcopii proſpectus, quo, ad ſidera ſpectanda utimur.* 140
PROP. LII. *Tribus convexis lentibus diſtincta & erecta ſpectare viſibilia longinqua & majora, ſecundùm datam rationem.* 142
PROP. LIII. *E duabus convexis lentibus teleſcopium conſtruere, quo viſibilia erecta ſpectentur, ac magnâ copiâ ſimul uno intuitu comprehendantur.* 146
PROP. LIV. *Teleſcopii, ex quatuor convexis compoſiti, conſtructionem explicare, quo res viſæ erectæ ſpectantur & magnâ copiâ.* 147
PROP. LV. *In quibus caſibus differentia inclinationum radiorum incidentium æqualis eſt differentiæ inclinationum radiorum, qui poſt refractionem e vitro exeunt.* 150
De lentium aperturis. 153
PROP. LVI. *Lentium aperturas in teleſcopiis definire.* 158
Tabula ad determinandam proportionem aperturarum teleſcopiorum. 162
PROP. LVII. *Si in teleſcopiis duobus, differant inter ſe aperturarum diametri, & eâdem quoque proportione foci diſtantiæ lentium ocularium, æque diſtincte iis omnia conſpicientur; apparentesque viſibilium latitudines ejus proportionis contrariam habebunt; claritates verò directæ quadruplicatam.* 164
PROP. LVIII. *Tabulæ præcedentis teleſcopia viſibilibus omnibus ſive diurnis ſive nocturnis, applicare.* 165
De Microſcopiis. 170
PROP. LIX. *Simplicium microſcopiorum rationes & uſus exponere & quomodo ſphærulæ & exiguæ lentes parentur.* 171
PROP. LX. *Microſcopiorum compoſi-*

poſitorum rationes explicare. 176
De Microſcopiorum luce & aperturis. 178
PROP. LXI. *Dato quocunque Microſcopio ex binis lentibus, quomòdo diximus, compoſito, poteſt aliud brevius reperiri, ſervatâ eadem lente oculari, in quo eadem fiat rei viſæ magnitudo apparens, eadem claritas, viſio autem diſtinctior, vel ſervatâ eadem diſtinctione, major claritas.* 181
PROP. LXII. *Quomodo ſervatâ eadem claritate & diſtinctione, itemque latitudine ad pupillam, quæ eſt in microſcopio dato, nec non ratione diſtantiarum focorum, breviora fieri poſſint microſcopia, quæque ſimul res viſas magis amplificent.* 185
PROP. LXIII. *Angulum obſervationis ex diſſipatione in dato microſcopio, & quantus in Teleſcopiis & Microſcopiis nocere non poſſit, per calculum inquirere.* 190
PROP. LXIV. *Angulum aberrationis, ex figura eodem modo ut in præcedenti propoſitione, per calculum inveſtigare.* 193
Si in lentem convexam radii incidant axi paralleli, vel a puncto in axe ultra focum diſtante manantes, efficient ii refracti angulos aberrationis, ex figura, qui proxime triplicatam rationem habeant ejus, quam diſtantiæ punctorum incidentiæ ab axe. 194
PROP. LXV. *Quomòdo breviora fieri poſſint Microſcopia & magis amplificantia, in quibus ſervetur eadem claritas & diſtinctio, nec tamen priori incommodo a majori aberratione ex figura fiant obnoxia.* 196
PROP. LXVI. *Si Microſcopium e duobus convexis lentibus compoſitum quæratur, quod datam habeat lenti ocularis foci diſtantiam, itemque datam amplificationem, & in quo angulus aberrationis ex diſſipatione radii, ut & claritas, ſit eadem quæ in alio dato microſcopio, invenire foci diſtantiam lenticulæ inferioris ejusque poſitum & aperturam.* 199

COMMENTARII DE FORMANDIS VITRIS. 203

De efficiundis modulis, & catinis politoribus. 205
De eligendis vitris. 211
De præparatione vitrorum antequam poliantur. 212
De vitris poliendis. 215
De perpoliendis vitris. 218

Tomi Secundi Operum Poſthumorum Index.

DE CORONIS & PARHELIIS.

§. 1. *De Coronis & Parheliis.* 3
§. 2. *De coronæ formatione, & cauſis ubi Carteſii ſententia circa illam refellitur.* 4
§. 3. 4. *Coronarum phænomena circa Solem & Lunam explicatio.* 6
§. 5. *De Diametro coronæ.* 9
§. 6. *De generatione grandinum ſemiaquearum.* 10
§. 7. *De Parheliis & Paraſelenis, ubi eorum phænomena primaria proponuntur.* 11
§. 8. *Phænomenon Romanum A. 1629. die 20. Martii a Scheinero obſervatum proponitur.* 12
§. 9. 10. *Auctoris animadverſiones circa*

circa hoc phænomenon. 13

§. 11. *De cauſis horum mirabilium phænomenon.* 14

§. 12. *De generatione, poſitu, figurâ, & magnitudine granorum unde Parhelia formantur.* 15

§. 13. *Explicatio phænomeni Romani.* 16

§. 14. *Parheliorum explicatio.* 18

§. 15. *De duobus Parheliis lateralibus.* 19

§. 16. *Quòd hi parhelii ſimul cum caudis in magno albo circulo neceſſariò debeant conſpici.* 21

§. 17. *Quo loco, quaque a Sole diſtantiâ conſpici debeant iſti Parhelii.* 22

Tabulæ, quibus conſtat quòd diſtantia Parhelii lateralis à Sole eo eſt major, quo craſſior eſt cylindrulus niveus pro ratione aquei, rurſusque poſitâ certâ proportione illius ad hunc, major ſit eadem diſtantia, quo magis alte Sol ſupra horizontem ſcandit. 23

§. 18. *Harum tabularum ulterior uſus.* 24

—— *Tres Soles quomodo viſi fuerint, Auguſti Cæſaris ætate.* ibid.

§. 19. *De Coronis quæ cum Parheliis lateralibus fere ſemper apparent.* 25

§. 20. *Illarum cauſæ.* 26

§. 21. *Figuræ Cylindrorum, unde coronæ illæ producuntur, examen.* 27

§. 22. *Quòd iidem erecti cylindruli, qui magno circulo albo ut & Parheliis à latere fulgentibus materiam præbent, coronas itidem per Parhelios tranſeuntes, producant.* 29

§. 23. *Cur circulus per Parhelia tranſiens languidus ſæpenumèro & evanidus apparet verſùs ſuperiora & inferiora & maximè lucidus ubi proximè Parhelia attingit.* ibid.

§. 24. *Cauſæ binorum Parheliorum, qui in parte circuli albo poſtica viſi ſunt.* ibid.

§. 25. 26. *Quæ ſit refractio in rotunda gutta, & quæ cauſa Iridis, quam Carteſius primus invenit.* 30

§. 27. *Cur bina Parhelia dicto modo genita non niſi circulo albo inſerta ſpectari poſſint.* 31

§. 28 *Ratio, cur hi Parhelii certis in locis circuli albi conſpiciuntur.* 32

Tabula quæ exhibet dimidiam diſtantiam Parheliorum in albo circulo ſecundùm varias ſolis altitudines. 33

§. 29. *Binorum Parheliorum poſticorum phænomeni Romani diſtantiæ examen ſecundùm hanc tabulam, ex qua detecta fuit viſûs fallacia.* ibid.

§. 30. *Ejus erroris cauſa.* 34

§. 31. *Cur Parhelia quæ alba dicuntur apparuiſſe in hac obſervatione contra colorata eſſe debuerunt.* 35

§. 32. *Cur in pluribus obſervationibus hi Parhelii omnino viſi non fuerint, cum tamen apparuerit circulus albus.* ibid.

§. 34. *Cur Parhelia poſtica ad ſphæricam magis figuram, quàm duo lateralia accedant.* 36

§. 35. *Obſervatio Heveliana 20. Februarii anni 1661, in qua plures Soles pluresque circuli & in utriſque aliqui diverſo à præcedentibus ſitu notantur.* 37

§. 36. &c. *Hujus obſervationis phænomenon explicatio.* 40. & ſeq.

§. 41. *Figuras arcuum coronarum inveniendi ratio.* 44

§. 45. *Meteori à Chriſtophoro Rothmanno obſervati Caſſellis 2. Januarii anni 1586. deſcriptio.* 48

Tabellarum, quarum mentio facta. pag. 23 & 33, conſtructio, quibus fundamentis nitatur. 49

Narratio obſervationis Halonis ſive Coronæ circa Solem factæ Pariſiis, in Bibliotheca Regia, 12. Maji A. 1667. horâ 9. matutinâ, ſimul cum diſſertatione de cauſa & origine horum

rum Meteororum & Parheliorum. 55

Obſervatio Scheineri anno 1630. *à Gaſſendo rogata per litteras ad Scheinerum.* 65

Reſponſio Scheineri ad Gaſſendum. 66

Hevelii obſervationes anno 1660. *die* 30. *Martii manè conſpectæ Gedani.* 69

Anno 1660. *die* 6. *April. hor.* 5. 30. *veſpere.* 70

Anno 1660. *die* 17. *Decemb. Gedani.* ibid.

Obſervatio ex Matthæo Paris. Signum in cælo admirabile viſum in Anglia anno Domini M. CC. XXXIII. *ſexto Idus Aprilis, duravit ab ortu ſolis uſque ad meridiem.* 71

Vera delineatio Parhelii cælo ſereno viſi Lugd. Batav. A. 1653. *Jan.* $\frac{14}{24}$. *inter primam & ſecundam pomeridianam, & in obſervatorio Academico obſervati à Samuele Car. Kechelio a Hollenſtein.* ibid.

Hugenii obſervatio. 72

DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE. 73

HYPOTHESES. 75

PROP. I. *Si corpori quieſcenti aliud æquale occurrat, poſt contactum hoc quidem quieſcet, quieſcenti verò acquiretur eadem, quæ fuit in impellente celeritas.* 76

PROP. II. *Si corpora duo æqualia inæquali celeritate lata ſe mutuo impellant, poſt contactum permutatis invicem celeritatibus ferentur.* 78

PROP. III. *Corpus quàmlibet magnum à quàmlibet exiguo corpore & qualicunque celeritate impacto movetur.* 79

PROP. IV. *Quoties duo corpora inter ſe colliduntur, eadem eſt, mutuo reſpectu, diſcedentibus celeritas, quæ fuit appropinquantibus.* 81

PROP. V. *Si duo corpora, eâdem celeritate ſingula ad occurſum revertantur, qua ab impulſu reſilierunt, ſingula, poſt alterum impulſum, eandem acquirent celeritatem, qua ferebantur ad occurſum primum.* 83

PROP. VI. *Corporibus duobus ſibi mutuò occurrentibus non ſemper poſt impulſum eadem motûs quantitas in utroque ſimul ſumpto conſervatur quæ fuit ante, ſed vel augeri poteſt vel minui.* 84

PROP. VII. *Si corpus majus minori quieſcenti occurrat, minorem ei velocitatem dat quàm duplam ſuæ.* 85

PROP. VIII. *Si corpora duo ſibi ex adverſo occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contrariâ ratione reſpondeant, utrumque eâdem qua acceſſit celeritate reſiliet.* 86

PROP. IX. *Datis corporibus duobus inæqualibus, directe ſibi occurrentibus, quorum utrumque vel alterum tantùm moveatur, datâque utriuſque celeritate, vel unius, ſi alterum quieſcat, invenire celeritates quibus utraque poſt occurſum ferentur.* 92

PROP. X. *Celeritas quam majus corpus dat minori quieſcenti, ad eam quam ſimili velocitate minus inprimit quieſcenti majori, eandem habet rationem quàm majoris magnitudo ad minoris magnitudinem.* 94

PROP. XI. *Duobus corporibus ſibi mutuò occurrentibus, id quod efficitur ducendo ſingulorum magnitudines in velocitatum ſuarum quadrata, ſimul additum, ante & poſt occurſum corporum æquale invenitur; ſi videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineiſve ponantur.* 95

PROP. XII. *Si quod corpus majori vel*

vel minori quieſcenti obviam pergat, majorem ei celeritatem dabit per interpoſitum corpus mediæ magnitudinis itidem quieſcens quàm ſi nullo intermedio ipſi impingatur. Maximam verò celeritatem tum conferet, quum corpus interpoſitum fuerit medium proportionale inter extrema. 99

PROP. XIII. *Quò plura corpora interponentur inter duo inæqualia quorum alterum quieſcat, alterum moveatur, eò major motus quieſcenti conciliari poterit. Maximus autem per unamquamque interpoſitorum multitudinem ita confertur, ſi interpoſita cum extremis continuam proportionalium ſeriem conſtituant.* 102

DE VI CENTRIFUGA. 105

PROP. I. *Si mobilia duo æqualia æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia ad eam quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri.* 114

PROP. II. *Si mobilia æqualia in iiſdem, ſive æqualibus, circulis rotisve gyrentur celeritatibus inæqualibus, verùm utraque motu æquabili; erit vis recedendi a centro celerioris ad vim tardioris in duplicata ratione celeritatum. Hoc eſt, ſi fila quibus illa retinentur, per centrum rotæ deorſum educantur, ſuſtineantque pondera, quibus vis mobilium centrifuga inhibeatur, atque exactè adæquetur, erunt hæc pondera, inter ſe, ſicut velocitatum quadrata.* 115

PROP. III. *Si duo mobilia æqualia in circulis inæqualibus, æquali velocitate ferantur, erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum, ita ut in minori circumferentia dicta vis major exiſtat.* 116

PROP. IV. *Si mobilia duo æqualia in circumferentiis inæqualibus circumlata vim centrifugam æqualem habuerint, erit tempus circuitûs in majori circumferentia ad tempus circuitûs in minori in ſubduplicata ratione diametrorum.* 117

PROP. V. *Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam æquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis, habebit conatum a centro recedendi æqualem ſuæ gravitati, hoc eſt, æque validè filum, quo retinetur, trahet, atque cum ex illo ſuſpenſum eſt.* 118

PROP. VI. *Data altitudine, quam certo tempore, puta ſecundi minuti unius, mobile emetitur, cadendo ex quiete perpendiculariter; invenire circulum in cujus circumferentia mobile circumiens horizontaliter, atque uno item ſecundo circuitum abſolvens, habeat vim centrifugam gravitati ſuæ æqualem.* 120

PROP. VII. *In curva ſuperficie conoidis Parabolici, quod axim ad perpendiculum erectum habeat; circuitus omnes mobilis circumferentias horizonti parallelas percurrentis, ſive parvæ, ſive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peragentur: quæ tempora ſingula æquantur binis oſcillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti Parabolæ genitricis.* 122

PROP. VIII. *Si mobilia duo ex filis inæqualibus ſuſpenſa gyrentur, ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente, fuerint autem conorum, quorum ſuperficiem fila hoc motu deſcribunt, axes ſive altitu-*

titudines æquales, tempora quoque quibus utrumque mobile circulum ſuum percurrit, æqualia erunt. 123

PROP. IX. *Tempora lationum per circulos horizontales, angulo gyrationis eodem exiſtente, ſunt in ſubduplicata ratione longitudinum filorum.* 125

PROP. X. *Si mobilia duo quælibet filis ſuſpenſa gyrando deſcribant circulos horizonti parallelos; erunt tempora circulationum in ſubduplicata ratione altitudinum conorum, quorum ſuperficies filis diſcribuntur.* 125

PROP. XI. *Si mobile filo ſuſpenſum, capite fili ſuperiore quieſcente, deſcribat motu ſuo circulos horizonti parallelos inæquales, erunt tempora lationum per dictos circulos in ſubduplicata ratione ſinuum angulorum, quibus filum ad planum horizontis inclinatur.* 126

PROP. XII. *Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum ſingulorum tempora, ad tempus caſûs perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia ſunt tempori duarum oſcillationum lateralium ejuſdem penduli minimarum.* ibid.

PROP. XIII. *Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque ſingulos abſolvat eo tempore, quo pendulum longitudinem ſemidiametri circumferentiæ ejus habens motu conico circuitum minimum abſolveret, vel duplicem oſcillationem minimam lateralem, habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem.* 128

PROP. XIV. *Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitûs æqualia erunt tempori caſûs perpendicularis ex altitudine penduli filo æquali: cum angulus inclinationis fili ad planum horizontis fuerit partium 2 ſcrup. 54, proximè. Exactè verò, ſi anguli dicti ſinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inſcriptum ad quadratum a circumferentia ejus.* 129

PROP. XV. *Si pendula duo pondere æqualia, ſed inæqualia filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila ſua intendent, in eadem ratione, quæ eſt filorum longitudinis.* 130

PROP. XVI. *Si pendulum ſimplex oſcillatione laterali maximâ agitetur, hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet quàm ſi ex illo ſimpliciter ſuſpenſum foret.* 131

PROP. XVII. *Globus filo ex centro circuli ad horizontem perpendicularis ſuſpenſus, per circumferentiam iſtius circuli rotari non poteſt, niſi filum ſextuplum ponderis appenſi ſuſtinere queat.* 132

AUTOMATI PLANETARII DESCRIPTIO. 157

FINIS.

TRACTATUS DE LUMINE.

CAPUT PRIMUM.

De Radiis directis.

QUæ ad Opticen pertinent demonſtrationes, ut fit in omnibus disciplinis in quibus Geometria ad corpus applicatur, nituntur axiomatibus ex experientia deprompitis, qualia ſunt: Radios luminis rectâ lineâ pergere, angulos reflexionis & incidentiæ æquales eſſe, in Refractionibus radium rumpi juxta regulam ſinuum nunc celebratam adeo, & haud minus certam quam præcedentes.

Plerisque, qui de variis Optices partibus ſcripſere, ſatis fuit viſum hæc axiomata præſupponere, ſed viri quidam diligentiores eorum originem cauſasque indagare operæ pretium duxerunt, quippe qui ea ipſa exiſtimarent eſſe mira naturæ opera. In quibus cùm ingenioſa quidem protulerint, ſed non tamen talia, quin eruditiores deſiderent explicationes quæ ſatisfaciant magìs. Lubet mihi in medium afferre ea quæ hac de re meditatus ſum, ut pro virili hujus partis ſcientiæ naturalis illuſtrationem adjuvem, quæ non immerito fertur eſſe difficillima. Agnoſco multum me debere illis, qui primi inceperunt denſas, quibus hæ res involutæ erant, tenebras diſcutere, ſpémque dederunt fore, ut explicari poſſent per cauſas intellectu faciles. Verùm & ab altera parte miror, quo pacto iidem ſæpe Ratiocinia parùm clara pro certiſſimis & demonſtrativis venditârint; imo huc uſque fuit nemo qui, meo qui-

dem judicio, probabiliter explicuerit prima iſta & inſignia luminis Phænomena, ſcilicet cur lumen rectâ duntaxat lineâ progrediatur & quî poſſit fieri, ut radii optici variis è partibus profecti ſeſe variis modis ſecent, nec ſibi officiant mutuo.

Conabor itaque in hoc opere, juxta placita in Philoſophiâ hodie recepta, rationes adducere clariores & verò magis ſimiles, primò proprietatum luminis rectâ lineâ progreſſi, dein ejusdem reflexi à corporibus obviis; quo facto aggrediar docere Symptomata radiorum eorum qui dicuntur refringi, cum permeant corpora diaphana diverſæ ſpeciei: ibique agam de effectis Refractionis aëris ex diverſis Atmoſphæræ denſitatibus.

Pergam deinde ad examen cauſarum miræ illius Refractionis cujusdam Cryſtalli quæ huc ex Iſlandia advehitur; ultimò denique loco agam de variis corporum pellucidorum & reflectentium figuris, quarum vi luminis radii aut in unum punctum colliguntur aut variis modis diſſipantur: Ibique patebit quam facile inveniantur, ex Theoria noſtra nova, non modo Ellipſes, Hyperbolæ, cæteræque lineæ curvæ quas Carteſius ſubtiliſſime ad illum effectum excogitavit; at eæ ipſæ quoque quibus conſtare oportet ſuperficies altera vitri, ubi prior data eſt aut Sphærica, aut plana, aut cujuslibet figuræ.

Nemini dubium eſſe poteſt quin lumen conſtet ex motu certæ cujusdam materiæ. Sive enim quo pacto producatur ſpectes, produci hîc in terra obſervatur ab igne in primis & flammâ quibus profecto inſunt corpora quædam rapido motu abrepta, cum diſſolvant & fundant corpora ſolidiſſima. Sive effecta ejus reſpicias, apparet, quod lumen, quando collectum eſt, ut ſpeculorum concavorum ope fit, vim habeat, ignis inſtar urendi, id eſt, quòd disjungat partes corporum; id quod certiſſimè motum deſignat, ſaltem in verâ Philoſophiâ, in qua omnium effectuum naturalium cauſæ concipiuntur per rationes mechanicas: id quod

meo

meo judicio fieri debet, niſi velimus omnem ſpem abjicere aliquid in Phyſicis intelligendi.

Cum autem juxta illam Philoſophiam pro certo teneamus ſenſationem illam, quæ *Viſio* dicitur, excitari dumtaxat, cum nervi in fundo oculorum à materia quadam agitentur, hoc etiam nos adducit ad credendum, lumen eſſe motum quendam materiæ lucidum inter corpus noſtroſque oculos interjectum.

Inprimis ſi perpendas quam citiſſime luminis radii undequaque diffundantur, & quomodo è variis imò ex oppoſitis partibus profecti ſeſe interſecent nec ſibi officiant mutuo, facilè comperias corpora lucida non videri ope cujusdam materiæ quæ ab ipſis ad nos perveniat, quemadmodum globus vel ſagitta per aërem tranſit; hoc enim certiſſimè contrariatur duabus hisce, præſertim poſteriori, luminis proprietatibus; Aliâ itaque ratione promovetur, quàm ut intelligamus, noviſſe juvabit, quo pacto ſonus per aërem progrediatur.

Novimus ſonum ope aëris qui eſt corpus, quod nec videri nec tangi poteſt, diffundi circa locum ubi natus eſt, motu quodam qui ſucceſſive ab una parte aëris ad alteram pergit; motumque illum fieri undique eàdem velocitate; adeo ut debeant efformari quaſi quædam ſuperficies Sphæræ quæ continuo latiores fiant, aureſque noſtras demum feriant. Non autem dubium eſt, quin lumen etiam à corpore lucido ad nos uſque pertingat ope motus impreſſi materiæ interjectæ, quandoquidem, ut jam vidimus, hoc non poteſt fieri ope corporis cujusdam quod ab objecto lucido ad nos commearet. Quod ſi nunc aliquo temporis ſpacio opus eſt ut lumen ad nos uſque perveniat (quod modo examinandum erit) ſequetur motum illum impreſſum materiæ ſucceſſivum eſſe, adeoque illum, ut in ſono fit, extendi in quasdam ſuperficies undasque Sphæricas: Undas autem voco à ſimilitudine earum, quas in aqua animadvertas facile, ſi in eam lapidem mit-

tas; illæ enim (quanquam hoc ex alia cauſa oritur fitque dumtaxat in ſuperficie plana) talem ſucceſſivam in orbem expanſionem repræſentant.

Ut igitur videamus an Luminis extenſio ſucceſſive fiat, conſiderandum primo eſt an experimenta quædam contrarium arguant. Quod attinet ad ea quæ hic in terra fieri poſſunt ope ignium ad magnas diſtantias accenſorum, quamvis inde pateat lumen tempore haud ſenſibili tranſire per hæc ſpacia, jure tamen ac meritò dici poteſt, nimis hæc brevia eſſe; adeoque inde tantum ſequi Lumen quam citiſſime pergere. Carteſius qui motum luminis inſtantaneum eſſe exiſtimabat, longè meliori, nec injuriâ, nitebatur experimento quod ex defectibus Lunæ depromebat, quod tamen ut oſtendam non convincit; at illud paulo aliter, ac ille, proponam, ut illius conſequentiæ omnes intelligantur melius.

TAB. I. Fig. 1. Sit A locus Solis, B D pars annuæ orbitæ telluris, A B C linea recta quam ſuppono occurrere in puncto C orbitæ Lunæ, quæ per circulum C D repræſentatur.

Si jam Lumini opus eſt tempore aliquo, v. g. horâ unâ, ut permeet ſpatium quod Terram inter & Lunam patet, ſequetur, quòd ubi Terra pervenerit in B, umbra illius ſive interruptio Luminis nondum pervenerit ad punctum C nec niſi poſt integram horam illud attinget. Horâ igitur unâ poſtquam Terra fuerit in B Luna perveniens tandem ad C ibi obſcurabitur, at obscuratio illa aut interruptio luminis tantum poſt alterius horæ ſpatium ad terram perveniet, ſumamus nunc duabus illis horis illam perveniſſe in E. Ubi igitur tellus erit in E videbis Lunam obſcuratam in C unde profecta eſt ante horam unam, eodemque tempore cernes Solem in A. Cum enim Sol immobilis ſit, ut ſuppono cum Copernico, & lumen rectis lineis pergat, Sol videri debet ſemper ubi eſt. At obſervatum eſt usque, inquiunt, Lunam deficientem videri in illo loco Eclipticæ qui oppoſitus eſt Soli, & hìc tamen videretur

retro

retro poſt locum illum, angulo G E C qui eſt complementum A E C ad duos angulos rectos. Ergo hoc experientiæ contrarium eſt, cum Angulus G E C eſſet maximè ſenſibilis & triginta trium aut circiter graduum. Namque ex noſtra ſupputatione quam in tractatu de cauſis phænomenorum Saturni videre eſt, diſtantia B A Terram inter & Solem quaſi duodecim millia Diametrorum terreſtrium complectitur, adeoque quadringentis vicibus major eſt quam B C, diſtantia, Lunæ quæ triginta continet diametros. Ergo Angulus E C B erit fere quadringentis vicibus major quam B A E, qui eſt quinque minutorum; ſcilicet via quam conficit terra intra duas horas in ſua orbita: ac proinde Angulus B C E fere 33. grad. ſic & Angulus C E G, qui illum excedit quantitate 5′.

At notandum eſt velocitatem luminis hoc in ratiocinio poſitam eſſe ejusmodi, ut horâ indigeat integrâ, ad ſpatium hinc ad Lunam usque patens emetiendum. Nunc ſi fingas minuto tantum uno opus eſſe, ut lumen viam hanc conficiat, manifeſtum eſt tunc Angulum C E G tantum fore trium minutorum; &, ſi decem ſecundæ tantum requirantur, Angulum eundem haud ſex minutorum fore; cumque ille non facile animadvertatur in obſervationibus defectuum Lunæ, non licebit inde concludere motum luminis eſſe inſtantaneum.

Non diffiteor hic ſupponi ſtupendam prorſus velocitatem, quæ nempe centies millies major eſſet velocitate ſoni; Sonus enim, ut obſervavi ſæpius 180. hexapedas conficit intra ſecundam unam, aut, intra ſingulum arteriæ pulſum. at ſuppoſitio illa nemini impoſſibilis videri debet, cum haud agamus de tranſlatione continua corporis tanta cum velocitate, at de motione quadam ſucceſſiva, quæ ex uno corpore in alia tranſit. Non igitur dubitavi, ubi his de rebus meditatus ſum, ponere emanationem Luminis indigere tempore, cum viderem, hoc poſito, omnia Luminis Phænomena explicari poſſe, quæ contrariam ſequendo

opinionem omnino non comprehenderentur. Etenim mihi aliisque viſum eſt ſemper ipſum etiam Carteſium, cui propoſitum erat claré & nitidè de omnibus Phyſicæ ſubjectis diſſerere, quodque revera melius fecit, quam ante eum quisquam, nihil tamen de lumine ejusque proprietatibus dixiſſe quod non difficultatibus innumeris intricatum ſit, vel & quod poſſit intelligi.

At quod pro Hypotheſi tantum adhibebam, illud ipſum veritatis conſtantis magnam ſpeciem accepit ab ingenioſa demonſtratione Romeri quam hic ſubjiciam, expectans, ut ipſe edat omnia, quæ ad hanc confirmandam faciunt. Illa quemadmodum ſuperior nititur obſervationibus cœleſtibus, probatque, non modo lumen in itinere ſuo tempus impendere, ſed & oſtendit quanto tempore opus ſit, velocitatemque illius eſſe ſexies majorem ac eam de qua ſupra dixi.

TAB. I. Fig. 2. Utitur ad id defectibus minorum illorum Planetarum qui Jovem circumeunt, ejusque umbram ingrediuntur ſæpius, & ſic diſſerit. Sit A Sol B C D E orbita annua telluris, F Jupiter G N orbita proximi Satellitum Jovialium, ille enim majoris uſus ad id eſt quam tres reliqui, quia citius revolvitur. G Satelles ille umbram Jovialem ingrediens, & H idem eâdem umbrâ egreſſus.

Igitur poſito quod, ubi Terra eſſet in B paulò ante ultimam quadraturam, viſus ſit idem Satelles umbrâ egredi, oporteret ſi terra eodem in loco maneret, ſimilem emerſionem iterum poſt 42 $\frac{1}{2}$ horas videri, quia nempe intra hoc tempus orbitam ſuam peregerat & rurſum Soli oppoſitus eſt. Quod ſi Terra in B verſaretur ſemper, dum v. g. Satelles ille trigeſies orbem ſuum peregiſſet, illud denuo videret umbra egredi poſt trigeſies 42 $\frac{1}{2}$ horas. At cum Terra interea pervenerit in C receſſeritque amplius à Jove, ſequitur quod, ſi lumini opus ſit tempore aliquo, illuminatio exigui Planetæ ſerius videnda ſit in C quam fuiſſet in B. Et quod illis trigeſies 42 $\frac{1}{2}$ horis, addendum ſit, inſuper tem-

tempus illud intra quod lumen conficit ſpatium M C, quod eſt differentia ſpatiorum C H, B H. Eodemque modo verſus alteram quadraturam, ubi terra pervenit à D in E & propior Jovi facta eſt, neceſſe eſt immerſiones Satellitis G in umbram prius obſervari in E quam viſæ fuiſſent ſi Terra manſiſſet in D.

Ex multis autem obſervationibus defectuum illorum factis per decennium integrum differentiæ illæ valde notabiles inventæ fuerunt, quippe decem aut amplius minutorum; unde concluſum eſt Lumini opus eſſe circiter 22. minutis, ut peragret Diametrum Orbis annui K L, quæ dupla eſt diſtantiæ terram inter & Solem interjectæ.

Motus Jovis in ſua orbita, dum Tellus tranſit à B in C aut à D in E comprehenditur in illo calculo, probaturque moram illuminationum illarum & anticipationem Eclipſium neque tribui debere irregularitati quæ reperitur in motu illius exigui Planetæ, neque illius excentricitati.

Quod ſi conſideretur magnitudo vaſta diametri K L, quæ, meo quidem judicio, eſt fere viginti quatuor millium diametrorum Terræ, patebit quam prodigioſa ſit Luminis velocitas. Etenim poſito K L continere dumtaxat viginti & duo millia ejuſmodi diametrorum, ſequitur, cum intra 22. minuta percurrantur, ſingula mille diametros intra minutum unum & $16\frac{2}{3}$ diametros intra ſecundum unum vel pulſum arteriæ permeari, quod non minus eſt quam undecenties centies centum millia hexapedarum; quoniam diameter terræ continet 2865. leucas, quarum 25. continentur in uno gradu, & ſingula quæque leuca eſt 2282. hexapedarum juxta menſuram exactam, quam adhibuit Picard, juſſu Regis Galliæ anno 1669. At ſonus, ut ſupra obſervatum eſt, intra ſecundum unum peragrat tantum 180. hexapedas. ergo lumen plusquam ſexcenties millies majori velocitate fertur, quàm ſonus, quæ tamen longè alia eſt ac momentaneus

taneus motus: eadem enim intercedit differentia, ac finitum inter & infinitum. Quandoquidem ergo motus ſucceſſivus luminis hunc in modum probatus eſt, ſequitur, prout ſuperius affirmavi, quod ſoni inſtar in undulas ſphæricas ſeſe extendat.

At lumen & ſonus licet hoc habeant commune, tamen quoad reliqua multum diſcrepant, cum nempe alio modo producatur motus, qui eſt utriusque cauſa, alia ſit materia in quâ motus ille fit, & diverſus modus ſit quo motus ille communicatur. Nam ſonus in cauſa habet concuſſionem ſubitam totius corporis, aut maximæ illius partis, quæ aëra contiguum agitat; lumen autem debet oriri ex ſingulis partibus corporis lucidi, ut omnes omnino cernantur, quemadmodum infra melius videre eſt. Nec puto motum illum explicari melius poſſe quam, ſi ponamus corpora lucida, quæ liquida ſunt, ut flamma, &, forſitan, Stellæ & Sol, conſtare particulis fluctuantibus in materia multo ſubtiliori, quæ illas quàm rapidiſſime agitet impellatque in particulas ætheris, quæ illas circumeunt illisque multo minores ſunt. Motum autem illum, in corporibus lucidis quæ ſunt ſolida, ut carbo metallumve candens, oriri ex concuſſione violenta particularum ligni aut metalli quarum eæ quæ ſunt in ſuperficie materiam æthercam eodem modo impellunt. Cæterum agitatio particularum illarum, quæ lumen producunt, deſideratur multò magis ſubita & rapida, quam agitatio corporum ſonororum, cum non videamus Lumen; oriri poſſe ex fremitu corporis ſonantis ut ſonus ex motu manûs in aëre produci non poteſt.

Si nunc inveſtigemus quænam poſſit eſſe materia illaætherea, in qua ille ſe expandit motus à corporibus lucidis oriundus, patebit eundem non eſſe cum illa quæ propagando ſono inſervit; hæc enim diverſa non eſt ab aëre quem ſpiramus, quo ſublato, altera tamen ſuperſtes erit. Et hoc probatur, ſi corpus Sonorum in vaſe vitreo incluſeris, unde

de per machinam Boyleanam, cujus ope hic tot pulchra inſtituit Experimenta, aërem educas. Quo in Experimento obſervandum, ut corpori ſonoro ſubſternantur vel goſſypium vel plumæ, ne tremores ſuos cum vaſe includente aut & ipſâ machinâ communicet, quod huc usque neglectum eſt. Tum enim, educto aëre, minimè auditur ſonus percuſſi licet Metalli.

Inde ſatis liquet non modo aëra noſtrum, qui vitrum non penetrat, eſſe materiam illam in qua ſe extendit ſonus, ſed etiam aëra illum non eſſe materiam, in qua diffunditur lumen, quandoquidem, aëre ſublato, non minus lumen penetrat per vitrum, quam antea.

Et poſtremum hoc patet clarius ex celebrata Torricellii experientia, in qua parvula tubi vibex, ex qua Mercurius decidit, licet aëre omnino vacua, tamen lumen transmittit; quod probat, materiam quandam ab aëre diverſam ſupereſſe hoc in tubo, materiamque illam penetraſſe aut vitrum aut hydrargyrum aut utrumque, quod tamen utrumque impenetrabile eſt aëri. Cumque eadem in experientia fiat vacuum, infundendo paululum aquæ hydrargyro, concluditur pariter eamdem materiam vitrum aut aquam aut utrumque permeare.

Quod ad diverſos modos attinet quibus dicimus motum luminis & ſoni ſeſe ſucceſſive communicare, facile intelliget quisque quomodo hoc in ſono fiat, modo conſideret aëra ejus eſſe naturæ, ut poſſit facile comprimi redigique in ſpatium multo minus quam quod naturaliter occupare ſolet; & eum, proportionaliter prout premitur, niti ut ſe reſtituat. Ex hoc enim, ſi penetrabilitatem, quæ cum ipſa compreſſione remanet, adjungas, probari videtur aëra conſtare corpusculis natantibus celerique motu abreptis in materia ætherea, quæ ipſa partibus multo magis exiguis componitur. Adeoque ut nulla ſit cauſa cur undæ ſoni ſeſe extendant, præter corpuſculorum illorum, ad ſe mutuo collidentium, vim elaſticam, quando paulo

magis compreſſa ſunt in circuitu undarum illarum quam alibi.

At luminis concitatiſſimus motus aliæque ipſius proprietates, eodem modo illud propagari non ſinunt. Et oſtendam quo pacto id fieri poſſe cenſeam; ſed prius explicandum eſt quâ ratione corpora dura motum ſecum invicem communicent.

Si capias plures Globos ejusdem magnitudinis, ſingulosque materiâ duriſſima quacunque conſtantes, & in lineâ rectâ disponas, ita ut contigui ſint; ſi Globo ſimili primum Globum impellas, motus quaſi in inſtanti transmittetur ad ultimum usque, qui à cæteris ſe ſeparabit, quamvis eos motos fuiſſe minimè videris, quin & Globus impellens immobilis manebit. Ubi apparet exemplum motus velociſſimi, & eo majoris, quo materia Globorum durior eſt.

Sed & conſtat, progreſſum illum motûs non momentaneum eſſe, ſed ſucceſſivum, proindeque indigere tempore. Nam, ſi motus, aut, ſi mavis, inclinatio ad motum, non tranſiret ſucceſſive per ſingulos globos, omnes eodem tempore motum ſive inclinationem ad motum acquirerent, adeoque ſimul omnes moverentur; quod non fit; imo Globus extremus alios linquit, & velocitatem acquirit quam habuerat Globus impellens. Præterea patet ex experimentis plurimis, corpora illa, quæ in duris numeramus (putà chalybem temperatum, vitrum & achatem) elaſtica eſſe & quodammodo plicari; non modo cum porrecta ſunt in longum, ſed etiam ubi formata ſunt in globulos, aut alio modo; id eſt in ſe ipſa paululum redire eo in loco ubi percuſſa ſunt, ſtatimque priorem figuram iterum induere. Nam inveni, quod ubi impuleram Globum ex vitro vel achate in fruſtum aliquod denſum & grande ejusdem materiæ, cujus ſuperficies plana eſſet & halitu meo aut alio modo obſcurata paululum, quædam maculæ rotundæ ſupererant majores

aut

aut minores, prout major aut minor ictus fuerat; unde manifeſtum eſt corpora illa pauxillum cedere, deindeque ſe reſtituere; cui tempus impendant, neceſſe eſt.

Si nunc motum iſtum referamus ad motum qui producit lumen, nil vetat quominus credamus particulas æthereas conſtare materiâ, quæ tam ad duritiem perfectam accedat elateremque habeat, tam promtum quam volumus. Nec neceſſe eſt ut examinemus hic, quæ ſit cauſa elateris duritieique illius, quia longius ab argumento noſtro diſtraheremur. Dicam tamen obiter, poſſe concipi, quod particulæ iſtæ æthereæ, quantumvis tenues, adhuc aliis particulis conſtent, & elater illarum conſiſtat in rapidiſſimo materiæ cujusdam ſubtilis motu, quæ illas undecumque pervadens earum texturam ita disponit ut præbeat materiæ illi fluidæ patentiſſimum facillimumque aditum. Hoc autem conſentaneum eſt cum ratione elateris quam adduxit Carteſius, niſi quod non ſupponam cum illo poros quosdam in ſpeciem canalium rotundorum & cavorum. Neque hoc ulli abſurdum aut impoſſibile videri debet, cum è contrario valde credibile ſit, quod Natura in tot miris effectibus edendis utatur progreſſu infinito variæ magnitudinis corpusculorum, & diverſis horum velocitatibus.

At licet ignoramus veram elateris cauſam, videmus ſaltem quotidie, multa corpora quæ hanc proprietatem habent, adeoque nil miri facimus, ubi eandem tribuimus corpusculis tenuiſſimis quæ non videmus, putà materiæ æthereæ. Quod ſi inveſtigetur alia ratio quâ motus luminis ſe ſucceſſive communicare queat, nulla occurret quæ melius conveniat quam elater cum progreſſu æquali, qui videtur eſſe neceſſarius; quia nempe, ſi motus ille remitteret, prout pluri materiæ ſe communicaret, longius remotus à fonte luminis, magnam illam velocitatem in magnis diſtantiis retinere non poſſet. Si vero ponas elaterem eſſe in materia ætherea, particulæ illius ſeſe reſtituent æ-

quali velocitate, ſive parum ſive multum preſſæ fuerint, adeoque lumen æquali velocitate ſemper progredietur.

TAB. I. Fig. 3. Sciendum vero eſt, etiamſi particulæ æthereæ non diſpoſitæ ſint rectâ lineâ quemadmodum Globi illi de quibus ſuprà, ſed è contra confusè ſint locatæ, ita ut ſingula quæque plures tangat; id tamen non obſtare quò minus motum ſuum particulæ illæ inter ſe communicent & in anteriora ſemper provehantur. In quo obſervari oportet legem motûs quæ huic propagationi inſervit, & ab experientia confirmatur. Si globus, ut A, plures alios ſimiles C C C tangat, & impellatur ab alio Globo B, ita ut motum imprimat omnibus C C C quos tangit, transfert in illos omnem ſuum motum, & poſt impulſum manet immobilis, ut & Globus B; Etſi non ſupponantur particulæ æthereæ eſſe figuræ Sphæricæ (neque enim video cur tales ſupponerentur) facilè concipitur, quòd hæc proprietas impulſionis tamen contribuat ad dictam motus propagationem.

Æqualitas magnitudinis videtur magis neceſſaria, quia ſecus hac enim regula dabitur aliqua reflexio motûs retrorſum, eum à minori particula ad majorem tranſit, juxta regulas percuſſionis quas ante paucos annos edidi.

Tamen infra videbimus æqualitatem illam magnitudinis non tam eſſe neceſſariam, ut propagetur lumen, quam ut facilius validiusque propagetur; cum ſatis etiam veriſimile ſit particulas æthereas factas fuiſſe æquales ut tantum effectum ederent, quantum eſt lumen, ſaltem in immenſo illo ſpatio, quod ultra Atmoſphæram eſt, quod videtur tantum inſervire transmittendo lumini Solis & Syderum.

Oſtendi igitur quo modo poſſit concipi lumen ſeſe diffundere ſucceſſive per undas ſphæricas, quo pacto id fieri poſſit cum ea celeritate quam Experientiæ & Obſervationes cœleſtes poſtulant. Obſervandum adhuc eſt, quanquam partes Ætheris ſuppoſitæ ſunt in motu perpetuo

tuo (quod probabile eſt multis de cauſis) propagationem tamen ſucceſſivam undarum inde non poſſe impediri; quia illa non conſiſtit in tranſlatione particularum illarum, ſed tantum in levi concuſſione, quam, non poſſunt non communicare partibus vicinis, non obſtante omni motu qui agitantur & locum inter ſe mutant.

Verum particularius adhuc examinemus oportet originem undarum illarum, & modum, quô ſe extendunt. Et primo ſequitur, ex iis quæ dicta ſunt de productione luminis, ſingulam parvam partem corporis lucidi, Solis v. g. candelæ, vel carbonis ardentis emittere ſuas undas quarum pars illa eſt centrum. Si itaque diſtinguas in flamma candelæ tria puncta A B C. Circuli concentrici circa ſingulum quodque punctum deſcripti repræſentant undas quæ inde oriuntur, ſimilesque undæ concipiendæ ſunt circa ſingulum punctum ſuperficiei, & partis interioris flammæ. TAB. I. Fig. 4.

Sed cum percuſſiones in centro undarum illarum non fiant ordinata ſerie, ita putandum non eſt undas ipſas ſeſe paribus intervallis ſequi, etſi intervalla videntur paria hacce in figura, id potius feci ut videretur progreſſus ejusdem undæ æqualibus temporibus quam ut cernerentur plures undæ eodem è centro profectæ.

Cæterum non impoſſibilis videri debet prodigioſa illa multitudo undarum, quæ ſeſe mutuo interſecant absque perturbatione ulla, aut mutua deletione, cum certum ſit eandem materiæ particulam poſſe inſervire pluribus undis quæ diverſis imo contrariis è locis veniant; non modo ſi particula illa propellatur per plures ictus qui ſeſe proximè ſequantur, ſed etiam per illos qui agant in ipſam eodem inſtanti; idque propter motum qui ſucceſſive diffunditur.

Hoc clarius patebit exemplo Globorum illorum materiæ duræ, de quibus ſuprà, in quos ſi eodem tempore ex oppoſitis partibus Globos ſimiles A & D impellas; uterque eâdem, qua venit velocitate reſiliet, cæterique immobiles TAB. I. Fig. 5.

perſtabunt, quamvis motus, isque duplus, eos omnes permeaverit. Si autem motus illi contrarii ſibi invicem occurrunt in Globo B qui in medio eſt, aut in alio Globo, puta C, debet intro premi Globus ille, & utrinque reſilire, ac proinde eodem inſtanti inſervire transmittendis duobus illis motibus.

At mirum hoc videri poteſt atque incredibile, quod undulationes, ortæ à motibus corporibusque tam exiguis, poſſint ad tam immenſas diſtantias diffundi; ut e. g. à Sole aut Syderibus ad nos usque. Undarum enim illarum vis debet remittere, prout longius ab origine ſua proceſſere, adeo ut actio ſingulæ cujusque undæ ita procul dubio infirma futura fuerit, ut oculos noſtros fugiat. At non erit, quòd miremur amplius, ſi conſideremus longiſſime à corpore lucido innumeras undas, licet profectas è variis corporis illius punctis, inter ſe conjungi adeo ut unam duntaxat ſenſibiliter componam undam, quæ proinde ſatis habet efficaciæ, ut ſentiri poſſit. Itaque numerus ille infinitus undarum, quæ oriuntur uno eodemque inſtanti ex omnibus punctis ſtellæ alicujus fixiæ, ejusdem forſitan magnitudinis ac Sol; ille unam dumtaxat ſenſibiliter componit undam, quæ proinde poteſt ſatis fortis eſſe, ut in oculos noſtros impreſſionem aliquam faciat. Præterquam quod è ſingulo lucido puncto poſſunt naſci vel breviſſimo, quod imaginari queas, tempore multa millia undarum, ope frequentis percuſſionis corpusculorum quæ æthera in illis punctis impellunt; quod confert etiam ad reddendam actionem earum ſenſibilem.

TAB. I. Fig. 6. Supereſt conſiderandum in emanatione undarum illarum, quod ſingula particula materiæ, in qua unda quævis ſe extendit, debeat communicare motum ſuum, non modo particulæ proximæ quæ eſt in linea recta ducta à puncto lucido, ſed etiam cæteris omnibus quæ illam contingunt ejusque motui ſe opponunt. Ita ut neceſſario circa quamlibet particulam fiat unda una, cujus particula illa

la centrum ſit. Sic ſi D C F eſt unda manans è puncto lucido A ut centro; particula B, una ex iis quæ continentur Sphærâ D C F, jam fecerit undam ſuam K C L, quæ tanget undam D C F in C eodem inſtanti quo unda principalis manans ex puncto A pervenit in D C F; & patet, quod ſolum punctum C ex unda K C L continget undam D C F, nempe illud quod eſt in recta linea ducta ab A B. Eumdem in modum cæteræ particulæ quæ continentur Sphærâ D C F ut b b, d d & e e, ſingulæ ſuam undam fecerint. At quælibet ex undis illis non poteſt non eſſe infinitè debilis in relatione ad undam D C F, cui componendæ inſerviunt cæteræ in partem ſuæ ſuperficiei quæ maxime remota eſt à Centro A.

Apparet præterea undam D C F determinatam eſſe per extremitatem motûs egreſſi è puncto A certo temporis ſpatio, cum nullus ſit motus, ultra undam illam, licet aliquis ſuperſit in ſpatio quo comprehenditur, ſcilicet in undarum particularium partibus, quæ non tangunt Sphæram D C F. Neque hoc ſubtilius aut longius quæſitum eſſe quisquam putet; poſtea enim videbimus proprietates luminis cæteraque quæ ad Reflexionem & Refractionem pertinent inde præcipuè explicari poſſe. Et hoc latuit eos qui primi examinare inceperunt undas luminis, quos inter ſunt Hookius in ſua Micrographia & P. Pardies, qui in Tractatu quodam cujus partem videndam mihi dedit, & quem perficere non potuit paulò poſt mortuus, ſibi ſumpſerat ex illis undis probare Reflexionis & Refractionis effecta. At præcipuum fundamentum quod nititur obſervatione quam modò feci, deſiderabatur in illius demonſtrationibus, & in cæteris opiniones fovebat multum à meis diverſas ut forſitan aliquando patebit, ſi ſcriptum illius ſervatum ſit.

Ut veniamus ad proprietates luminis, obſervandum eſt primo ſingulam quamque partem undæ debere ita ſe extendere, ut extremitates illius ſemper comprehenſæ ſint

eis-

eiſdem lineis rectis ductis à puncto lucido. Sic pars undæ B C, habens punctum lucidum A pro centro, extendet ſe in arcu C E terminato per rectas A B C, A G E. Enimvero etſi undæ particulares, productæ à particulis quas comprehendit ſpatium C A E, ultra hoc ſpacium etiam progrediantur, tamen, non eodem inſtanti concurrunt ut ſimul componat undam quæ terminet motum, niſi præcisè in peripheria C E quæ eſt earum communis tangens.

TAB. I. Fig. 1. Exinde videre eſt cur lumen, niſi radii illius reflexi ſint aut fracti, ſe diffundat tantum per lineas rectas; adeo ut ſola corpora illuminet ad quæ via ab origine ſuâ rectâ patet. ad illa uſque. Si enim v. g. eſſet foramen B G terminatum per corpora opaca B H, G I, unda luminis egreſſa è puncto A terminata ſemper eſſet per lineas rectas A C, A E, ſicut modo demonſtratum eſt; quia partes undarum particularium, quæ extendunt ſe ultra ſpacium A C E, infirmiores ſunt quam ut lumen gignant.

Quantumvis autem exiguum ſit foramen B G, eâdem tamen ex causâ tranſibit ſemper lumen rectâ lineâ, quia foramen illud ſemper ſatis magnum eſt, ut poſſit magnum numerum capere particularum materiæ æthereæ, quippe quæ ſint incredibilis prorſus tenuitatis; ita ut pateat, quod ſingula quæque particula undæ procedat neceſſario, ſecundum lineam illam rectam quæ ducitur à puncto lucido. Et hinc radii luminis ſpectari poſſunt quaſi eſſent totidem lineæ rectæ.

Cæterum patet ex iis quæ obſervavimus de debilitate undarum particularium, non neceſſe eſſe, ut particulæ omnes ætheris æquales ſint inter ſe, quamquam æqualitas illa ad propagationem motûs plus conferret. Verum enim eſt inæqualitatem futuram eſſe in cauſa cur particula una particulam majorem impellens conetur reſilire cum aliqua motûs ſui parte; at inde orientur tantum paucæ undæ particulares retrorſum verſus punctum lucidum quæ-

que

que lumini excitando ineptæ ſunt: nulla vero inde naſcetur unda quæ ex pluribus conſtet, veluti C E.

Altera proprietas luminis eaque haud minus admirabilis eſt, quod duo radii variis imo oppoſitis partibus profecti agunt alter per alterum, absque ullo impedimento. Unde etiam fit, ut plures ſpectatores per idem foramen poſſint videre ſimul diverſa objecta, & ut duo homines poſſint alter alterius oculos eodem inſtanti cernere. Juxta autem ea, quæ dicta ſunt & de actione luminis & quomodo undæ ſeſe non deſtruant, neque altera alteram interrumpat, quando ſeſe invicem ſecant non difficile eſt phænomena illa intelligere; quod tamen, meo quidem arbitratu, non ita obtinet in Hypotheſi Carteſii, qui vult lumen conſiſtere in preſſione quâdam perpetuâ quæ tantummodo ad motum tendit. Cum enim preſſio illa non poſſit agere ſimul ex duabus oppoſitis partibus in corpora quæ nullam inclinationem habent ad accedendum ad ſe invicem, nullo modo concipi poteſt, quo pacto duo homines alter alterius videant oculos, aut duæ faces ſe mutuæ illuminent.

CAPUT II.

De Reflexione.

Explicatis Phænomenis undarum luminis, quæ extenduntur in homogenea materia, deveniendum eſt ad ea quæ iis accidunt, ubi in corpora alia incidunt. Ac primum docebimus quomodo ex iisdem undis explicetur reflexio luminis, & cur hæc æqualitatem Angulorum ſervet. Sit ſuperficies plana & levis ex aliquo aut metallo aut vitro aut alio corpore A B, quam primo ſumam eſſe perfecte levem, (differam enim loqui de aſperitate quâ carere non poteſt, ad finem demonſtrationis iſtius) & TAB. I. Fig. 7.

C linea

linea A C inclinata in A B repræſentet partem undæ luminis cujus centrum adeo remotum ſit, ut pars illa A C conſiderari poſſit, tanquam linea recta. Specto enim hæc omnia, quaſi eſſent in uno quodam plano; concipiens Planum, in quo eſt figura hæc, ſecare ſphæram undæ in centro & Planum A B ad Angulos rectos, quod monuiſſe ſemel ſufficit.

Pars C undæ A C, certo temporis ſpatio, progreſſa erit ad planum usque A B in B, juxta rectam C B, quam imaginari oportet venire à centro lucido, adeoque perpendicularem eſſe ad undam A C. Eodem autem temporis intervallo, pars A ejusdem undæ, quæ impedita fuit, ſaltem pro parte quominus motum ſuum communicaret ultra planum A B, debet continuaſſe motum ſuum in materia quæ eſt ſupra hoc planum, idque in ſpatio, quod æquale ſit rectæ C B, efformans ſuam undam ſphæricam, juxta id quod ſupra diximus; quæ unda hîc repræſentatur per circumferentiam S N R, cujus centrum eſt A, & ſemi-diameter A N æqualis C B.

Quod ſi porro conſideremus cæteras partes H undæ A C, patet fore ut non modo pervenerint ad ſuperficiem A B, per rectas H K parallelas C B; ſed etiam produxerint ex centris K undas particulares ſphæricas in diaphano, quæ repræſentantur hîc per peripherias, quarum ſemidiametri æquales ſunt K M, id eſt continuationibus rectarum H K ad rectam usque B G, parallelam A C.

Sed circumferentiæ illæ omnino omnes habent pro tangente communi Rectam B N, eamdem ſcilicet quæ à B facta eſt tangens primi ex his circulis, cujus A erat centrum, & A N ſemi-diameter æqualis B C, ut videre facile eſt.

Linea igitur B N (comprehenſa puncto B & puncto N ubi cadit perpendicularis puncti A) quaſi efformata eſt ex illis omnibus circumferentiis, terminatque motum factum à reflexione undæ A C; & in ea etiam motus eſt in multo majori quantitate quam alibi. Idcirco, juxta ea quæ expli-

explicata fuere, B N eſt propagatio undæ A C, quo momento pars illius C pervenit in B. Etenim nulla alia eſt linea, quæ, ut B N, ſit communis tangens omnium dictorum circulorum, niſi fortè B G infra planum A B; quæ B G eſſet propagatio undæ, ſi motus per materiam homogeneam potuiſſet ad materiam infra planum progredi. Quod ſi quis videre velit quomodo unda A C ſucceſſive venerit in B N, ducantur in eadem figura rectæ K O parallelæ B N, & rectæ K L parallelæ A C. Ita patebit undam A C confractam quaſi fuiſſe in omnibus O K L ſucceſſive, iterumque rectam fuiſſe factam in N B.

Exinde videre eſt angulum reflexionis æqualem eſſe angulo incidentiæ. Nam cum triangula A C B, B N A rectangula ſint habeantque latus A B commune, & latus C B æquale N A; ſequitur angulos lateribus illis oppoſitos, & proinde angulos quoque C B A, N A B, fore æquales. At veluti C B perpendicularis ad C A deſignat directionem radii incidentis, ita A N perpendicularis undæ B N directionem radii reflexi deſignat. Ergo radii illi æqualiter inclinantur ad Planum A B.

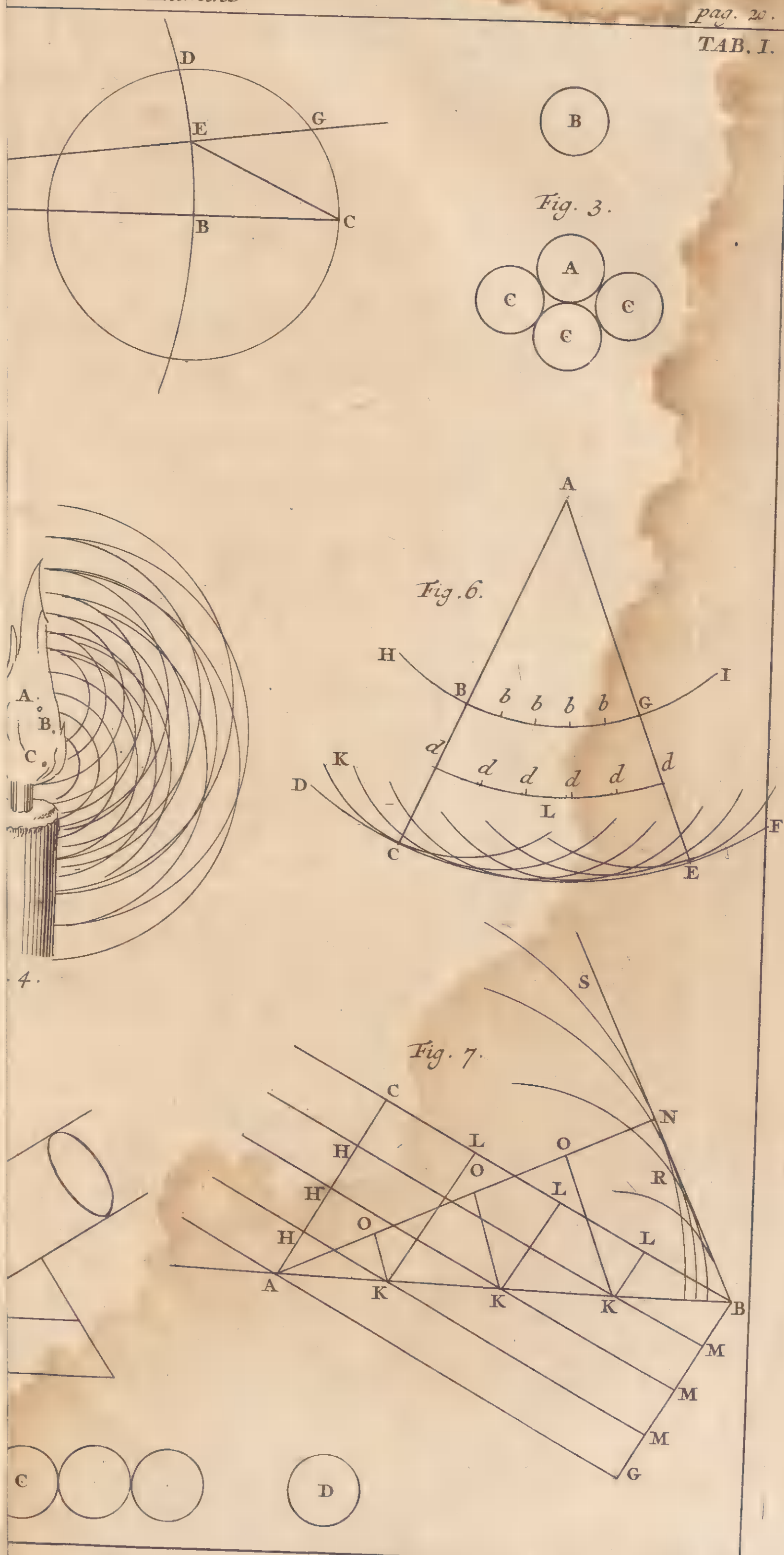
Verum in conſiderandâ præcedenti demonſtratione poſſet quis dicere lineam quidem illam B N eſſe tangentem communem undarum circularium in plano figuræ; ſed undas illas, cum revera ſint ſphæricæ, habere adhuc infinitas ejuſmodi tangentes, nempe omnes lineas rectas, quæ à puncto B ducuntur in ſuperficie coni formati à recta B N circa axem B A. Supereſt igitur probandum ne minimam quidem in hoc difficultatem eſſe; ſimulque patebit cur radius incidens & radius reflexus ſemper ſint in uno eodemque plano perpendiculari ad planum reflectens. Dico igitur undam A C, cum ſpectetur tantummodo ut linea, nullum poſſe lumen gignere. Etenim radius viſibilis luminis, quantumlibet ſit tenuis, tamen ſemper aliquam craſſitudinem habet; adeoque, ad repræſentandam undam cujus progreſſus radium illum efformat, loco lineæ A C concipienda eſt figura quædam plana, qua-

TAB. I. Fig. 8. lis eſt Circulus H C, ponendo, ut ante, punctum lucidum infinite diſtans. Facile autem patet, ex ſuperiori demonſtratione, ubi unaquæque particula undæ H C pervenerit ad planum A B, indeque genuerit ſingula ſuam particularem undam; undas illas omnes, ubi C pervenerit in B habituras eſſe commune planum quod illas tangat, circulum ſcilicet B N æqualem C H & quod ſectum erit in medio, & ad angulos rectos ab eodem plano, quod ita ſecat circulum C H & Ellipſim A B.

Patet etiam dictas Sphæras particularium undarum non poſſe aliud commune planum tangens habere, præter circulum B N; ac proinde in illo plano major multo erit copia motûs reflexi quam alibi, adeoque planum id transferet lumen continuatum undæ C H.

Dixi etiam in demonſtratione ſuperiori motum partis A undæ incidentis non potuiſſe ultra planum A B ſe communicare, aut ſaltem non potuiſſe in totum. Ubi hoc obſervatu opus eſt quod, etiamſi motus materiæ æthereæ ſe communicaret ex parte ipſi corpori repercutienti, hoc tamen minime poteſt mutare velocitatem progreſſus undarum, à qua angulus reflexionis pendet. Etenim levis percuſſio, ut & validiſſima quævis, undas velocitatis ejusdem in ſimili materia neceſſario gignit; quod fit quia corpora elaſtica, ut ſupra dictum eſt, ſive leviter premantur ſive valide, tamen æqualibus temporis intervallis ſe reſtituunt ſemper. Itaque, in quavis reflexione luminis in quodcunque corpus, Anguli reflexionis & incidentiæ æquales eſſe debent; etſi corpus ejus eſſet naturæ, ut aliquid de motu detraheret qui lumen incidens facit. Et vero experientia teſtis eſt nullum eſſe corpus leve, quod repercuſſum hanc regulam non ſequatur.

At hoc imprimis in demonſtratione noſtra obſervandum eſt quod ea non poſtulat ut ſuperficies repercutiens ſpectetur tanquam planum leve, ut ſuppoſuere omnes quicumque


TAB. I.
D
E
G
B
C
B
Fig. 3.
A
C
C
C
A
Fig. 6.
H
B
b b b b
G
I
K
d
d d d d
d
D
L
C
E
F
A.
B.
C.
4.
S
Fig. 7.
C
N
H
L
O
H
O
L
R
O
H
L
A
K
K
K
B
M
M
M
G
C
D

que conati ſunt explicare reflexionis phænomena; ſed tantummodo ut ei levitas illa tribuatur quæ oritur particulas corporis repercutientis aliis juxta aliis poſitis, quæ majores ſunt particulis materiæ æthereæ, ſicut videre eſt ubi dicemus de transparentia & opacitate corporum. Cum enim ſuperficies conſtet partibus ita juxta ſe invicem poſitis, particulæque æthereæ ſupra fluctuent ſintque minores, evidens eſt non poſſe demonſtrari æqualitatem angulorum incidentiæ & reflexionis ex eo quod accidit globo in parietem injecto, quanquam eâ comparatione ſemper uſi ſunt alii. E contrario in hypotheſi noſtra res absque ullo labore explicari poteſt. Namque particulæ hydrargyri v. g. cùm ita exiguæ ſint, ut in minima quavis ſuperficie viſibili, neceſſario ſint concipiendæ ad multa millium millia, diſpoſitæ veluti acervus arenæ levigatus quantum fieri potuiſſet; tum ſuperficies illa ſit levis reſpectu noſtri ut vitrum politiſſimum, licétque reſpectu particularum ætherearum ſemper aſpera maneat, manifeſtum eſt centra Sphærarum omnium particularum reflexionis, de quibus diximus, eſſe fere in eodem plano polito; adeoque communem tangentem poſſe illis convenire ſatis perfectè, quantum ad lumen gignendum neceſſe eſt. Atque hoc unum requiſitum eſt, in noſtro demonſtrandi modo, ut fiat æqualitas dictorum angulorum, & reliquus motus undiquaque reflexus contrarium effectum producere non poterit.

CAPUT III.

De Refractione.

QUemadmodum phænomena reflexionis explicata fuere per undas repercuſſas in ſuperficie corporum levium, ita nunc explicabimus quid ſit perlucidum & refractionis phænomena per undas quæ ſe extendunt intra & per corpora dia-

diaphana, ſive ſolida ſint, ut vitrum, ſive liquida ut aqua, olea, &c. Ut autem nemini mirum videatur, quod ponam undis corpora illa permeari, oſtendam prius quod hoc non unico modo poſſibile concipiatur.

Ac primum, etiamſi materia ætherea non pervaderet corpora diaphana, tamen ipſæ corporum illorum particulæ poſſent ſucceſſive inter ſe motum undarum communicare, ut particulæ æthereæ faciunt; ſi, æque ac hæ, vi elaſticâ inſtructæ ponantur. Et hoc facile concipi poteſt, quoad aquam cæteroſque diaphanos liquores, quippe qui particulis haud cohærentibus conſtent. At difficilius idem videtur, quantum ad vitrum aliaque corpora diaphana & dura pertinet, quia non videtur eorum ſoliditas permittere, ut partim moveantur, quin moveantur ſimul tota. Hoc tamen minime neceſſarium eſt, quia ſoliditas illa non eſt talis, qualis nobis apparet, cum probabile ſit corpora illa conſtare potius particulis aliis juxta alias collocatis, quas teneat una conjunctas preſſio materiæ alicujus exterioris, & figurarum irregularitas. Nam primo raritas corporum illorum apparet quia facile hæc penetrat materia vorticum magneticorum ut & illa, quæ gravitatis cauſa eſt. Præterea dici nequit, corpora illa texturam habere ſimilem illi, quæ eſt aut ſpongiarum aut panis levioris, quia à calore ignis liqueſcunt illa, ſituſque particularum inter ſe ſic mutatur. Supereſt igitur, veluti dictum eſt, ut ſint acervus quidam particularum, quæ quidem ſe contingant, nec tamen ſolidum unum continuum faciant ſimul. Quod cum ita ſit, motus, quem particulæ illæ accipiunt ad continuandas undas luminis, cum ſe communicet ex una ad alteram, nec tamen inde particulæ illæ locum aut ordinem ſuum mutent, poteſt facillimè agere, neque tamen ullo modo officere ſoliditati compoſiti illius quod nobis viſibile eſt.

Preſſionis autem exterioris nomine minime intelligenda eſt preſſio aëris quæ non ſufficeret, ſed alia quædam materiæ

teriæ alicujus ſubtilioris, quæ preſſio ſe manifeſtat in certa experientia quam fortuna mihi jamdudum obtulit; ſcilicet in aqua aëre expurgata, quæ ſuſpenſa manet in tubo vitreo cujus foramen inferius patet, licet eductus ſit aër vaſculo, in quo includitur tubus.

Poteſt itaque hunc in modum translucidum corpus concipi, etiamſi materia ætherea quæ lumini inſervit, vitrum non pervadat, neque ullos reperiat poros, per quos ſe inſinuet. At veriſſimum eſt materiam illam non modo id permeare, ſed etiam facile; quod probat experimentum Torricellianum ſuprà memoratum; quia ubi hydrargyrum & aqua ex ſuperiori parte tubi vitrei cedunt eodem inſtanti plena materiâ ætherea videtur eſſe, quia nempe lumen tranſit. Sed & alterum experimentum eſt, quod probat eandem facile penetrare, non modo in corpora dura, ſed etiam in alia quæcunque.

Ubi tranſit lumen per Sphæram concavam vitream, undique occluſam, conſtat ſphæram illam non minus materiâ ætherea refertam eſſe, quam illam ambientia ſpatia. Materia ætherea autem conſtat particulis aliis alias proximè tangentibus. Si igitur ita incluſa eſſet vitro, ut per poros egredi nequiret, neceſſario ſequeretur illa motum Sphæræ, cum Sphæra moveretur loco; adeoque eadem fere vi opus foret ut certus quidam motus imprimeretur illi Sphæræ poſitæ in plano horizontali, ac ſi plena eſſet hydrargyro aut aquâ, quia corpus quodcumque reſiſtit velocitati motûs, quem ipſi volumus imprimere, pro quantitate materiæ quam continet & quæ motum illum debet ſequi.

At è contrario reperimus Sphæram reſiſtere dumtaxat impreſſioni motûs, pro quantitate vitri ex quo conflata eſt; ergo neceſſe eſt ut materia ætherea quæ vitro continetur, non ſit incluſa, ſed poſſit liberrime per poros elabi. Infra videre eſt eandem penetrabilitatem eodem modo probari in corporibus opacis.

Altera

Altera ratio, eaque veriſimilior, explicandi quomodo corpora ſint translucida, eſt hæc undas luminis continuari in materia ætherea, quæ ſemper occupat poros & interſtitia diaphanorum corporum. Cum enim poros pervadat illa facile & ſemper, ſequitur eos ejusmodi materiâ continuo eſſe plenos. Quinimmo demonſtrari poteſt interſtitia illa multo plus ſpatii capere, quam particulæ cohærentes quibus conſtant corpora. Etenim ſi verum eſt quod modo diximus, requiri vim aliquam ad imprimendam certam velocitatem horizontalem corporibus, pro quantitate materiæ cohærentis, quam continent; & ſi proportio vis illius rationem gravitatum ſequitur, quod experientia confirmat; ergo quantitas materiæ quæ conſtituit corpora, gravitatum etiam rationem ſequitur. Videmus autem aquæ ineſſe tantum decimam quartam partem ponderis quæ ineſt pari portioni hydrargyri; ergo materia aquæ non occupat decimam quartam partem ſpatii quod ſua maſſa capit. Verum ſpatium multo minus occupare debet, cum mercurius levior ſit auro, & materia auri admodum parum denſa; quod colligitur ex eo quod materia vorticum magneticorum, & ea, quæ gravitatis cauſa eſt, aurum quam liberrime pervadant.

Objiciat procul dubio quis mirum eſſe omnino, ſi corpus aquæ adeo rarum ſit, particulæque illius tam exiguam occupent partem ſpatii extenſionis ſuæ apparentis; quomodo ita compreſſioni reſiſtat, nec ſinat ſe condenſari quantumvis illam premas, imo retineat ſemper liquiditatem ſuam, ipſo preſſionis tempore.

Eſt ſane difficultas non parva quam tamen ſolvere non impoſſibile eſt, ſi dicas motum rapidiſſimum concitatiſſimumque materiæ ſubtilis qui aquam liquidam reddit, concutiendo nempe ejus particulas, quibus conſtat, retinere fluiditatem, non obſtante preſſione applicitâ huc usque.

Itaque cum ejusmodi ſit corporum diaphanorum raritas,

tas, facile intelligitur undas continuari poſſe in materia ætherea quæ particularum replet interſtitia. Quin & credibile eſt, progreſſum undarum illarum debere intra corpora paulo lentiorem fieri, præ exiguis anfractibus, quos eædem particulæ faciunt. Et in diverſa hac velocitate luminis oſtendam conſiſtere refractionis cauſam.

Indicabo prius tertium ultimumque modum quo concipi poteſt corpora eſſe translucida, nempe ponendo motum undarum luminis ſe communicare indifferenter, tum particulis materiæ ætheree quæ occupant interſtitia corporum, tum particulis quæ corpora ipſa componunt; adeo ut motus ille ab aliis ad alias tranſeat. Inferius patebit hypotheſim hanc multum conducere ad explicandam quorumdam corporum diaphanorum refractionem duplicem.

Objiciat mihi quis, quod, cum particulæ ætheris minores ſint corporum diaphanorum particulis, quippe quæ earum intervalla pervadant, ſequatur inde, non poſſe illis multum motus imprimere; reſponderi poteſt particulas corporum illorum conſtare aliis adhuc particulis minoribus, quæque adeo motum ab ætheris particulis accipiunt.

Cæterùm, ſi particulæ corporum diaphanorum habent elaterem paulo minus promptum quam particulæ ætheris, quod nil vetat quominus ponamus, ſequitur rurſum progreſſum undarum luminis fore intra corpora illa lentiorem, quam eſt extra in materia ætherea.

Atque hoc omne eſt, quod veriſimilius mihi viſum fuit de modo, quo undæ luminis corpora diaphana pervadunt; addendumque eſt, quâ in re corpora illa à corporibus opacis differant; & hoc eò magis, quod videri poſſet, propter facilem penetrationem corporum per materiam ætheream, nullum non corpus diaphanum futurum eſſe. Etenim ex eodem exemplo Sphæræ concavæ, quo uſus ſum, ut parvam denſitatem vitri probarem, & facilem per illam materiæ æthereæ penetrabilitatem, probari

 poſſet

poſſet eandem penetrabilitatem cæteris corporibus metalliſque ipſis convenire. Etſi enim Sphæra eſſet ex argento, v. g., certe contineret in ſe aliquantulum materiæ illius æthereæ quæ lumini ſervit, cum, ubi obturabatur Sphæra, erat in ea portio quædam materiæ illius ſimul cum aëre. Attamen ubi Sphæra illa argentea occluſa eſt & plano horizontali impoſita, reſiſtit tantum impreſſo motui pro quantitate argenti è quo conflata eſt. Ergo dicendum eſt, ut ſupra, materiam æthream incluſam non ſequi motum Sphæræ; adeoque argentum non minus libere permeari à materia illa, quam vitrum ipſum. Ergo particulæ illæ æthereæ frequenter & perpetuo inter poros corporum opacorum eunt & redeunt; &, cum propagando lumini inſerviant, videntur corpora illa opaca debere quoque, ut vitrum, diaphana eſſe, quod tamen non eſt.

Unde dicemus ergo, opacitatem illorum oriri? an à mollitie particularum quibus conſtant, quia ſcilicet particulæ hæ, utpote particulis minoribus conſtantes, aptæ ſunt mutare figuram ubi impelluntur à particulis æthereis, quarum motum ſic retardant, adeoque continuationem undarum luminis impediunt? At hoc impoſſibile prorſus eſt, ſi enim particulæ metallorum molles ſunt, quî fit ut argentum lævigatum mercuriusque lumen tam valide repercutiant? Veriſimillimum igitur puto corpora metallorum, quæ fere ſola ſunt vere opaca, particulas habere molles duris intermixtas; ita ut aliæ repercutiant lumen, aliæ tranſitum luminis impediant. Cum contra corpora diaphana particulis tantum duris conſtent, quæ elaterem habent, inſerviuntque unà cum Particulis materiæ æthereæ, ut ſuprà obſervatum eſt, propagandis undis luminis.

Deveniamus nunc ad explicanda refractionis phænomena, ponendo, ut jam fecimus, undarum luminis per corpora diaphana tranſitum, & diminutionem velocitatis quam undæ ibidem patiuntur.

Præ-

Præcipua proprietas Refractionis eſt, quod, ubi Radius luminis, ut, A B eſt in aëre, & obliquè incidit in ſuperficiem levem corporis diaphani, ut F G, frangatur in puncto incidentiæ B; ita ut cum recta D B E, quæ perpendiculariter ſuperficiem ſecat, faciat angulum C B E, minorem A B D, quem faciebat cum eadem perpendiculari in aëre. Menſura autem angulorum reperietur, ſi deſcribas circulum è puncto B qui ſecet radios A B, B C. Perpendiculares enim A D, C E ductæ à punctis interſectionis in rectam D E, quæ vocantur Sinus Angulorum A B D, C B E, habent inter ſe certam quandam rationem, quæ ſemper eadem eſt in quibusvis radii incidentiæ inclinationibus, quantum ad certum quoddam corpus diaphanum; quæ eſt in vitro fere ut 3 ad 2 in aqua fere ut 4 ad 3, & ſic in diverſis corporibus diaphanis diverſa. TAB. II. Fig. 1.

Altera proprietas eaque ſimilis priori eſt ea, quod, nempe refractiones reciprocæ ſint inter radios qui ingrediuntur corpus diaphanum, eosque qui exeunt, id eſt, ſi radius A B ingrediundo corpus diaphanum frangitur in B C, ita C B, ſumptus pro radio qui intra idem corpus eſt, frangetur egrediendo in B A.

Ut explicemus ergo phænomena iſta ex principiis noſtris, ſit recta A B quæ repræſentat ſuperficiem planam, terminantem corpora diaphana C & N verſus collocata. Cum autem dico planam, non de perfecta æqualitate loquor, ſed de ea quam poſuimus tractando de Reflexione, idque iisdem de cauſis. Linea A C repræſentet partem undæ alicujus luminis, cujus centrum adeo remotum ſumatur, ut pars illa poſſit ſpectari tanquam linea recta. Ergo pars C undæ A C, intra certum temporis ſpatium, perveniet ad planum A B, juxta rectam C B, quam imaginari debemus oriri à corpore lucido, & quæ proinde ſecabit A C ad angulos rectos. At, intra idem temporis intervallum, pars A perveniret in B, per rectam A G æqualem & parallelam rectæ C B; & TAB. II. Fig. 2.

pars integra undæ A C eſſet in G B, ſi materia corporis diaphani æque velociter transmitteret motum undæ ac materia ætheria. Verum ponamus lentius transmittere, ex. gr. tertiâ parte. Diffuſus igitur erit motus à puncto A, in materia corporis diaphani; per ſpatium æquale duabus tertiis rectæ C B ſuam propriam undam emittentis, juxta ea quæ ſuperius diximus; quæ unda repræſentatur per circumferentiam S N R, cujus centrum eſt A, & ſemi-diameter æqualis $\frac{2}{3}$ rectæ C B. Quod ſi conſideremus deinde alias partes H undæ A C, apparet eas, eodem inſtanti quo pars C venerit in B, non modo perventuras fuiſſe ad ſuperficiem A B per rectas H K parallelas C B; ſed etiam effuſuras fuiſſe in diaphano è centris K particulares undas, repræſentatas in figura per peripherias, quarum ſemidiametri æquales ſunt $\frac{2}{3}$ linearum K M, id eſt $\frac{2}{3}$ continuationum rectarum H K ad rectam B G. Illæ enim ſemidiametri æquales fuiſſent lineis K M integris, ſi ambo diaphana eſſent æque penetrabilia. Omnes autem circumferentiæ illæ habent pro tangente communi lineam rectam B N, eamdem ſcilicet quæ ex puncto B fit tangens circumferentiæ S N R; quam priorem conſideravimus. Nam in promptu eſt videre cæteras omnes circumferentias tangere eamdem B N, â puncto B ad punctum contactus N, in quem cadit A N perpendicularis ad B N.

Ergo B N, quæ quaſi efformata eſt ex arcubus exiguis circumferentiarum illarum, terminat motum quem corpus diaphanum ab unda A C accepit; ibique motus multo majori quantitate eſt quam alibi. Adeoque linea illa, juxta ea quæ ſæpius diximus, eſt propagatio undæ A C, eo ipſo momento quo pars hujus C pervenit in B. Enimvero nulla alia eſt linea infra planum A B, quæ ut B N, ſit undarum omnium particularium communis tangens. Quod ſi ſcire velimus, quo modo unda A C venerit ſucceſſive in B N, ducantur in eadem figura rectæ K O parallelæ rectæ B N, & omnes K L paral-

rallelæ A C. Hunc in modum videbimus undam C A ex recta factam fuiſſe fractam in omnibus L K O ſucceſſive & rurſum factam fuiſſe rectam in B N. Quod cum evidens ſit ex demonſtratione ſuperiori, ſupervacaneum eſt plura addere.

Atqui, in eadem figura, ſi ducatur E A F quæ ſecet planum A B ad angulos rectos in puncto A, & A D ſit perpendicularis undæ A C, D A radium incidentem luminis, & A N, quæ perpendicularis eſt ad B N, radium fractum repræſentabunt; cum radii nihil aliud ſint præter lineas rectas, ſecundum quas undæ luminis ſe extendunt.

Unde facile eſt agnoſcere præcipuam hanc refractionum proprietatem, ſcilicet ſinum anguli D A E habere ſemper unam eamdemque rationem cum ſinu anguli N A F, qualiscumque ſit inclinatio radii D A; & rationem illam eſſe eandem ac rationem velocitatis undarum in diaphano ſito A E verſus cum earumdem velocitate in altero A N verſus. Conſideratâ enim rectâ A B, quaſi eſſet radius circuli, ſinus anguli B A C eſt B C, & ſinus anguli A B N, A N. At Angulus B A C æqualis eſt D A E, cum uterque additus angulo C A E faciat angulum rectum. Et Angulus A B N æqualis eſt N A F, cum uterque ſimul cum B A N faciat Angulum rectum. Ergo ſinus Anguli D A E etiam eſt ad ſinum Anguli N A F, ut B C ad A N. Atqui ratio B C ad A N erat eadem ac ratio velocitatum luminis, tum in materia A E verſus, tum in materia A F verſus; ergo ſinus quoquorum Anguli D A E, & N A F, erunt ut velocitates ſupra dictæ luminis.

Ut videamus deinde qualis debeat eſſe refractio, ubi undæ luminis ingrediuntur corpus aliquod in quo motus propagatur velocius quam in eo unde exeunt, (ponamus iterum juxta rationem trium ad duo) ſatis eſt repetere eandem tum conſtructionem tum demonſtrationem quæ TAB II. Fig. 3.

D 3 ſupra,

ſupra, modo ubique loco $\frac{2}{3}$ ponamus $\frac{3}{2}$. Ex eadem argumentandi ratione patebit, in altera figura, quod, ubi pars C undæ A C pervenerit ad ſuperficiem A B in B, pars integra undæ A C pervenerit in B N; ita ut B C perpendicularis ad A C ſit ad A N perpendicularem ad B N, ut duo ad tria. Et eadem ratio 2 ad 3 erit ſinum inter anguli E A D, ſinumque anguli F A N.

Hinc videmus reciprocationem refractionum radii ingredientis diaphanum, ejusdemque exeuntis; ſcilicet ſi N A incidens in ſuperficiem exteriorem A B, frangitur in A D, radius quoque D A diaphano egrediens frangetur in A N.

Patet ratio quoque phænomeni notatu digni, quod in hac refractione occurrit; nempe à certa quadam obliquitate radii incidentis D A, non poteſt hic in diaphanum alterum penetrare. Si enim angulus D A Q aut C B A ejusmodi eſt, ut in triangulo A C B, C B æqualis ſit $\frac{2}{3}$ lineæ A B, aut major; tum A N non poteſt conſtituere latus unum trianguli A N B, quia evadit æqualis lineæ A B aut major: adeo ut pars undæ B N reperiatur nullibi, nec proinde A N quæ perpendicularis illi eſſe debebat. Itaque radius incidens D A tunc non penetrat ſuperficiem A B.

Cum ratio velocitatum undarum eſt, ut in exemplo noſtro, duorum ad tria, quæ eſt ratio quæ vitro & aëri convenit; tunc angulus D A Q debet eſſe major 48. grad. 11. min. ut radius D A poſſit ſe frangendo tranſire. Ubi vero ratio velocitatum illarum eſt trium ad quatuor, quod fere contingit in aqua & aëre; tunc angulus ille D A Q excedat oportet 41. grad. 24. min. Hocque cum experientia plene conſentaneum eſt.

Verum poſſet quis petere, cum incurſus undæ A C in ſuperficiem A B motum debeat producere in materia quæ eſt ad alteram partem, cur lumen ibi non tranſeat? cui facile reſpondebimus, ſi ſuperiorum obſervationum memine-

minerimus. Licet enim innumeræ undæ peculiares diffundantur in materia trans A B collocata, tamen nunquam accidit undas illas habere eodem inſtanti eamdem lineam tangentem (ſive rectam ſive curvam) adeoque nulla eſt linea in quam deſinat propagatio undæ A C ultra planum A B, neque ubi ſatis motûs ad producendum lumen colligatur. Et haud difficulter rei hujus veritas patebit, nempe, cum C B ſit major $\frac{2}{3}$ A B, undas, ultra planum A B excitatas, non habere communem tangentem; ſi è centris K deſcribantur circuli qui radios habeant æquales $\frac{3}{2}$ L B quæ reſpondent. Omnes enim circuli illi alii aliis incluſi erunt, & ultra punctum B ſe extendent.

Hoc autem obſervandum eſt quod, cum angulus D A Q minor ſit quam ut ſinat radium D A fractum in alterum diaphanum ingredi, repercuſſio interior, quæ fit in ſuperficie A B, multo clarior fiat; quemadmodum facile eſt experiri cum triangulari prismate: quod nullo negocio ex hypotheſi noſtra explicari poteſt. Cum angulus D A Q adhuc ejus eſt magnitudinis, ut radio D A poſſit tranſitum præbere, manifeſtum eſt lumen partis undæ A C minori ſpatio contineri, ubi pervenit in B N. Apparet quoque undam B N eò minorem fieri, quò angulus C B A aut D A Q factus eſt minor, donec, diminuto hoc ad usque determinationem ſupra dictam, unda illa B N quaſi tota unum in punctum colligitur. Sive, quod idem eſt, ubi pars C undæ A C pervenit in B, undam B N, quæ eſt propagatio A C, totam in idem punctum B reductam eſſe; quemadmodum, quando pars H pervenerat in K, pars A H tota in idem punctum K erat reducta. Unde liquet, prout unda C A occurrit ſuperficiei A B, magnam fuiſſe motûs copiam ſecundum ſuperficiem illam; motumque illum ſeſe intra corpus diaphanum diffudiſſe & in eo multum virium addidiſſe undis particularibus, quæ producunt repercuſſionem interiorum in ſuperficiem

ciem A B, ex regulis repercuſſionis ſuperius explicatis.

Et quoniam, minuto paululum incidentiæ D A Q, unda B N utcunque magna ad nihilum redigitur; (namque, ubi angulus ille eſt in vitro 49. graduum & undecim minutorum, angulus B A N adhuc eſt 11. graduum & 21. minutorum, &, ubi angulus D A Q unum modo gradum amiſit, angulus B A N ad nihilum eſt reductus, & proinde unda B N ad unum tantum punctum reducitur) inde venit quod reflexio interior ex obſcura ſubito fit clara, ubi angulus incidentiæ talis eſt, ut non amplius liberum tranſitum refractioni præbeat.

Quod autem attinet ad reflexionem interiorem ordinariam, id eſt, eam quæ fit ubi angulus incidentiæ D A Q ſatis habet magnitudinis ad faciendum ut radius fractus trans ſuperficiem A B penetrare queat; reflexio illa fieri debet in particulas materiæ quæ corpus diaphanum extrinſecus contingit; & forſitan in particulas aëris aliasque materiæ æthereæ immixtas eâque magis craſſas. Quemadmodum ab altera parte reflexio exterior corporum illorum fit in particulas illas, quibus conſtant, & quæ craſſiores etiam ſunt materiâ æthereâ, cum iſta inter eorum intervalla fluat. Fateor hîc ſupereſſe difficultatem aliquam in experimentis, ubi reflexio illa interior fit, licet particulæ aëris nil ad id conferre poſſint, ut accidit in tubis unde aër exſuctus eſt.

Cœterum Experientia nos docet ambas illas reflexiones parem fere vim habere, quæ in variis corporibus eo magis intenditur, quo major eſt corporum illorum refractio. Itaque manifeſto liquet vitrum fortiùs repercutere quam aquam, & adamantem fortiùs quam vitrum.

Theoriæ huic noſtræ circa refractionem finem imponam, ubi demonſtravero propoſitionem quandam notabilem quæ inde pendet; ſcilicet radium aliquem luminis, ut ab uno puncto ad alterum tranſeat, quando puncta illa in di-

diverſis ſunt diaphanis, frangi eum in modum in ſuperficie plana quæ utrumque medium conjungit, ut quam minimo fieri poteſt tempore id faciat, ſicuti contingit in repercuſſione adverſus ſuperficiem planam. D. Fermat primus proprietatem hanc refractionis propoſuit, exiſtimabatque, ut nos ipſi, ac planè diverſè à Carteſio, lumen per vitrum & aquam tardius meare quam per aëra. Verum præterea ſupponebat proportionem illam conſtantem ſinuum, quam modo probavimus ex ſolis variis gradibus velocitatis; ſive, quod idem eſt, ponebat, præter varias illas velocitates, lumen in tranſitu ſuo omnium minimum tempus impendere, ut inde proportionem conſtantem ſinuum colligeret. Demonſtratio illius quam videre licet, tum in Libris quos edidit, tum in Epiſtolis Carteſii, longiſſima eſt; ideoque aliam ſimpliciorem facilioremque proponam.

Sit ſuperficies plana K F; punctum A in diaphano, quod lumen faciliùs permeat, aëra puta; punctum C in altero quod difficilius pervaditur, puta aquam; ponamus radium perveniſſe ab A per B in C & fractum fuiſſe in B ex lege paulo ſuperius demonſtrata. Sive datâ lineâ P B Q, quæ ſecat planum ad angulos rectos, ſinus anguli A B P habeat ad ſinum anguli C B Q eamdem rationem, quam velocitas luminis in diaphano ubi eſt A, ad ejuſdem velocitatem in diaphano ubi eſt C. Demonſtrandum eſt tempora tranſitûs luminis per A B & B C, ſimul ſumpta, eſſe omnium breviſſima. Ponamus ergo lumen veniſſe per alias lineas, & primo per A F, F C, ita ut punctum refractionis F magis diſtet quam B a puncto A; & ſit A O perpendicularis ad A B, F O parallella A B; B H perpendicularis ad F O, & F G perpendicularis ad B C. TAB. II. Fig. 4.

Cum ergo angulus H B F æqualis ſit P B A, & angulus B F G æqualis Q B C; ſequitur ſinum anguli H B F habiturum etiam ad ſinum anguli B F G eandem rationem, quam velocitas luminis in diaphano A ad velocita-

tem ejusdem in diaphano C. Atqui ſinus illi ſunt rectæ H F, B G, ſumptâ B F pro ſemi-diametro circuli. Ergo lineæ illæ H F, B G habent inter ſe eamdem velocitatum rationem. Itaque tempus luminis per H F, poſito quod radius eſſet O F, æquale eſſet tempori luminis per B G intra diaphanum C; ſed tempus per A B æquale eſt tempori per O H; ergo tempus per O F æquale eſt tempori per A B, B G. Rurſum tempus per F C longius eſt quam per G C, ergo tempus per O F C erit longius quoque quam per A B C. At A F eſt major quam O F; ergo tempus per A F C tanto longius erit tempore per A B C.

Ponamus nunc, radium luminis veniſſe ab A in C per A K & K C; puncto refractionis K propiori A quam punctum B, & ſit C N perpendicularis ad B C, K N parallela B C, B M perpendicularis ad K N, & K L ad B A.

Hîc B L & K M ſunt ſinus angulorum B K L & K B M, id eſt angulorum P B A & Q B C, adeoque ſunt inter ſe, ut velocitas luminis in diaphano A ad velocitatem ejusdem in diaphano C. Ergo tempus per B L æquale eſt tempori per K M, &, cum tempus per B C æquale ſit tempori per M N, tempus per L B C æquale erit tempori per K M N. At tempus per A K longius eſt quam per A L; ergo tempus per A K N longius eſt quam per A B C. Et cum K C longior ſit quam K N, tempus per A K C eò longius erit tempore per A B C. Itaque liquet tempus per A B C eſſe omnium breviſſimum, quod demonſtrandum erat.

CAPUT IV.

De Refractione Aëris.

DEmonſtravimus, quo pacto motus ille, qui luminis cauſa eſt, extendatur per undas ſphæricas in materia homogenea; & manifeſtum eſt quod, ubi materia non eſt

eſt homogenea, ſed ejus generis ut motus citius communicetur unam partem quam alteram verſus, tunc illæ nequeant eſſe ſphæricæ, ſed diverſas figuras induant pro diverſis ſpatiis quæ motus ſucceſſivus æqualibus temporibus percurrit.

Ex eo primum explicabimus refractiones aëris, qui hinc ad nubes ultraque extenditur; quarum phænomena ſunt notabilia; per eas enim ſæpenumero videmus corpora quæ ſecus præ rotunditate terræ non videremus: inſulas nempe & cacumina montium quæ à navigantibus cernuntur. Earumdem ope, Sol & Luna videntur orti eſſe antequam reipſa ſint, & occidere tardius quam occidant; ita ut ſæpe viſa ſit Luna deficiens, cum Sol adhuc ſupra Horizontem appareret. Et inde altitudines Solis, Lunæ, aliorumque Syderum ſemper videntur paulo majores quam ſunt, quod ex iisdem refractionibus oritur, ut Aſtronomi omnes probe norunt. Atque hoc ex experimento ſequenti ad oculum manifeſtatur. Scilicet ſi teleſcopium ita collocaris, ut ſpectet objectum quod diſtet ſemileuca aut amplius, puta turrem ſive domum; ſi ejus ope idem corpus variis horis obſerves, tubusque eodem modo maneat converſus ſemper; videbis non easdem ſemper objecti partes in medio foramine tubi ſe oculis objicere; at plerumque mane & veſperi, ubi plures ſunt vapores prope terram, objecta illa altius adſcendere videntur, ita ut media illorum pars aut amplius jam non videri poſſit; eademque circa meridiem deſcendent, ubi diſſipati erunt vapores.

Qui ad refractionem attendunt dumtaxat in ſuperficiebus quæ diſtinguunt corpora diaphana diverſæ naturæ, illi laborarent non parum in explicandis phænomenis, quæ tamen ex Theoria noſtra nullo explicantur negocio. Nemo neſcit, aëra illum qui nos circumdat, præter particulas quæ illi propriæ ſunt, & fluctuant in materia ætheria, ut jam docuimus, adhuc repleri particulis aqueis, quas calor at-

tollit: & aliunde conſtat ex certiſſimis experimentis eo magis imminui denſitatem aëris, quo altior eſt. Sive igitur particulæ aquæ & aëris, ope particularum materiæ æthereæ, participent de motu qui luminis cauſa eſt, ſed ita, ut illæ elaterem habeant minus promptum quam hæ; ſive occurſus & impactus particularum aëris & aquæ in propagationem motus particularum ætherearum, progreſſum harum retardet. Sequitur ſemper utrasque, cum inter particulas æthereas volitent, debere facere ut aër, ab ingenti altitudine ad terram usque per gradus, viam minus facilem extenſioni undarum luminis præbeat.

Idcirco figura undarum debet fere talis fieri, qualem figura exhibet. Scilicet, ſi A eſt lumen aliquod aut apex turris alicujus, qui videri poſſit; debent undæ inde ortæ ſe in altum magis extendere, minusque verſus inferiora, ſed verſus cæteras partes magis aut minus, prout partes illæ magis aut minus â duobus iis extremis diſtant. Quod cum ita ſit, ſequitur neceſſario lineam quamlibet, quæ unam ex his undis ad angulos rectos ſecat, ſupra punctum A tranſire, præter unicam illam quæ horizonti perpendicularis eſt.

TAB II. Fig. 5.

Sit B C unda quæ lumen defert ad ſpectatorem qui in B eſt, & B D ſit recta quæ perpendiculariter undam illam ſecat. Ergo, cum radius ſive linea recta, ex qua judicamus quo in loco ſit objectum, nihil aliud ſit præter perpendicularem undæ quæ ad oculum pervenit, ut intelligi poteſt ex iis, quæ ſuperius dicta ſunt; manifeſtum eſt punctum A viſum iri, quaſi foret in recta B D, adeoque viſum iri altiùs quam re vera eſt.

Eumdem in modum, ſi terra eſt A B, & extremitas atmoſphæræ C D, quæ, ut veriſimile eſt, non eſt ſuperficies perfecte ſphærica, quandoquidem novimus aëra eo rariorem fieri quo altior eſt, quia tunc pauciorem ſupra ſe habet aëra à quo prematur; ſi undæ Solis ita veniant v. g., ut, quamdiu non attigerint atmoſphæram C D,

TAB.III. Fig. 1.

C D, ad perpendiculum à recta A E ſecentur: eædem undæ, ubi in atmoſphæram intrant, debent velocius verſus altiores partes progredi quam eas versùs, quæ terræ viciniores ſunt. Ita ut, ſi C A ſit unda quæ defert lumen ad ſpectatorem in A, pars illius C erit magis progreſſa; & recta A F, quæ ſecat undam illam ad angulos rectos, determinatque locum apparentem Solis, verget ſupra Solem verum, qui videretur per lineam A E. Proinde fieri poteſt ut Sol, qui absque vaporibus non videri deberet, quia linea A E incurrit in rotunditatem terræ, cernatur tamen refractionis ope, per lineam A F. At angulus ille E A F numquam fere major eſt dimidio gradu, quia tenuitas vaporum undas luminis leviter tantùm immutat. Præterea refractiones non ſemper omni tempore conſtantes ſunt, præſertim in exiguis altitudinibus duorum aut trium graduum, quod oritur à varia copia vaporum aquoſorum, qui è terra attolluntur.

Et hoc in cauſa eſt, cur certo tempore corpus aliquod diſtans lateat pone alterum propius, alio vero appareat, quamvis locus, unde ſpectatur, idem ſit ſemper. Atque ratio phænomeni illius evidentior fiet, ex iis quæ de curvitate radiorum mox obſervaturi ſumus. Patet ex ſuperius dictis progreſſum ſeu propagationem particulæ alicujus undæ luminis, id proprie eſſe, quod vocamus radium. Radii autem illi, cum ſint recti in diaphanis homogeneis, debent curvi fieri in aëre inæqualis penetrabilitatis, quippe qui neceſſariò ſequantur lineam quæ ab objecto ad oculum usque, ſecat progreſſiones omnes undarum ad angulos TAB. II.
rectos, ut in linea A E B, quod infra probabitur; Fig. 5.
& linea eadem determinat quænam corpora interpoſita debeant impedire aut non, quominus videamus objectum.

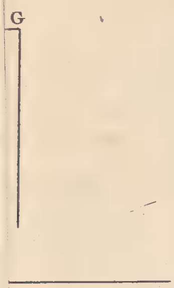
Etſi enim apex turris A videatur in D, attamen non videretur ab oculo B, ſi turris H interpoſita foret, quia turris iſta curvam A E B ſecat. Verum turris E, quæ

infra hanc curvam eſt, non obſtat quominus videatur apex A. Prout autem aër vicinior terræ, magis condenſatur quam aër ſublimior, curvitas radii A E B major evadit; adeo ut aliquando ſuperior ſit apice E, quod in cauſa eſt cur apex A videatur ab oculo in B; aliquando interrupta ſit ab eadem turri E, quod facit ut idem oculus jam non amplius videat A.

TAB. III. Fig 2. Verùm ut demonſtremus curvitatem hanc iſtius radiorum ex ſuperiori Theoria noſtra, fingamus A B eſſe particulam alicujus undæ luminis, quæ veniat à parte C, quam poſſumus conſiderare tamquam lineam rectam. Ponamus quoque illam perpendicularem eſſe ad horizontem. Cum locus B propior ſit terræ quam locus A, cumque vapores minus craſſi ſint in A quam in B, unda particularis, quæ procedit â puncto A, extenditur per certum quoddam ſpacium A D, dum unda particularis, quæ exſurgit è puncto B, extenditur juxta ſpacium minus B E, & A D, B E horizonti parallelæ ſint. Præterea, poſitis rectis F G, H I & ductis ex innumeris punctis rectæ A B, & terminatis in recta, (vel quæ poteſt conſiderari ut talis) D E, per varias illas lineas exhibeantur variæ penetrabilitates in variis altitudinibus aeris inter A & B; ita ut unda nata è puncto F, ſe extendet per ſpatium F G, undaque, orta è puncto H, per ſpatium H I, dum ea quæ emiſſa eſt ex A extenditur per totum ſpacium A D.

Nunc ſi è centris A, B deſcribantur circuli D K, E L qui exhibeant extenſionem undarum ortarum ex duobus illis punctis; ducaturque recta K L, quæ duos illos circulos tangat: facile patet eandem illam lineam fore tangentem omnium circulorum qui deſcripti ſunt centris F, H, &c. futurumque ut puncta omnia contactûs incidant in partem lineæ illius, quæ eſt inter perpendiculares A K, B L. Ergo recta K L terminabit motus undarum natarum è puncto undæ A B, motusque ille validior erit inter puncta K L, quam alibicumque, eo ipſo inſtanti

TAB. II.



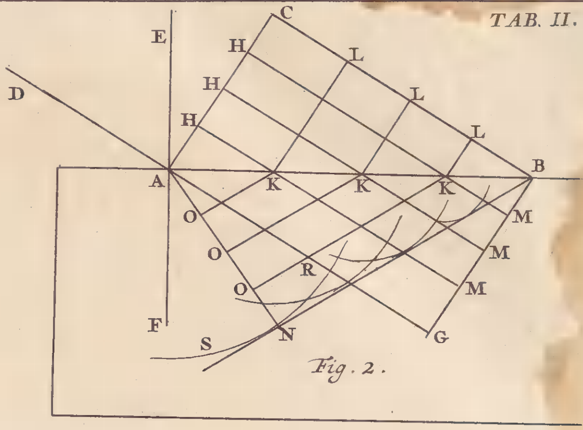
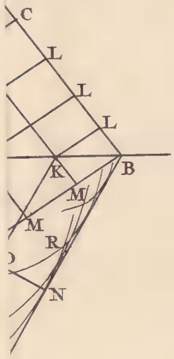


Fig. 2.

Fig. 3.



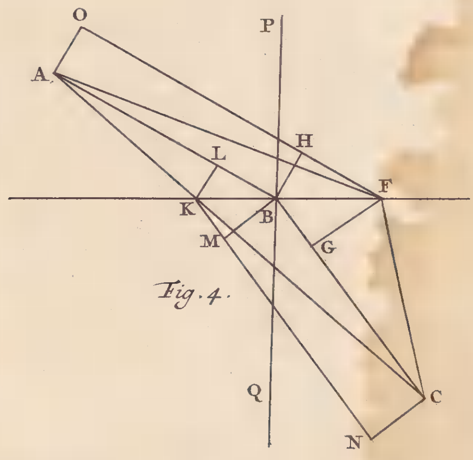
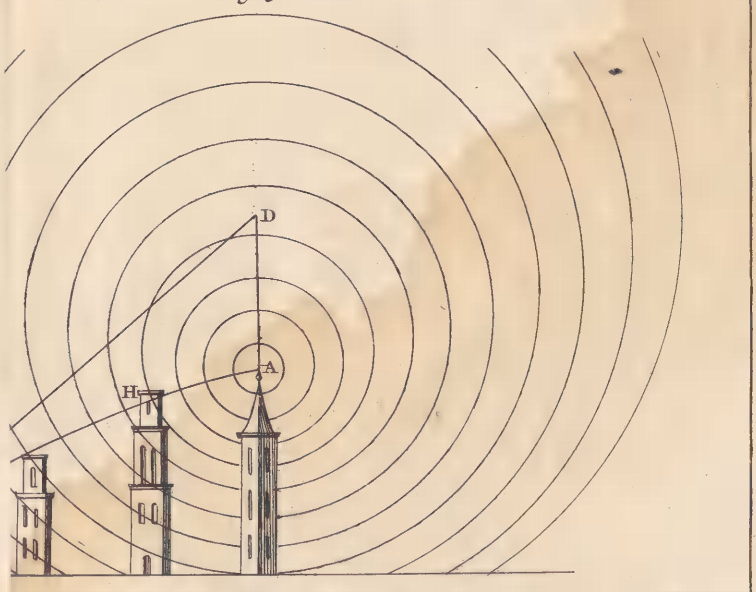


Fig. 4.

Fig. 5.



ti, quia infinitæ circumferentiæ ad formandam rectam illam concurrunt Idcirco K L futura eſt propagatio partis undæ A B, juxta ea quæ diximus, ubi de reflexione & refractione vulgari egimus. Apparet autem A K & B L inclinari verſus locum, ubi aër minus facilè penetrabilis eſt; cum enim A K ſit longior quam B L, eique parallela, ſequitur A B & K L productas concurrere ex parte L. Sed Angulus K rectus eſt, ergo K A B neceſſario acutus eſt, adeoque minor quam D A B. Quod ſi eadem ratione indagare velimus progreſſum partis undæ K L, eam reperiemus alio tempore perveniſſe in M N, adeo ut perpendiculares K M, L N inclinentur adhuc magis quam A K, B L. Et hinc patet, radium continuari ſecundum lineam illam curvam, quæ omnes undas ad angulos rectos ſecat, uti dictum eſt.

CAPUT V.

De miranda Refractione Cryſtalli Iſlandici.

1. ADvehitur huc ex Iſlandia, Inſulâ Maris Borealis ad altitudinem 66. graduum, ſpecies Cryſtalli vel lapidis diaphani valde notabilis ob figuram ſuam aliasque qualitates, ſed inprimis ob miras ejus Refractiones. Earum autem cauſas eò digniores curioſa indagatione exiſtimavi, quod, hoc unum è corporibus diaphanis, circa radios luminis, conſuetas regulas non ſequatur; neceſſitas etiam quædam me impulit, ut ad eam rem animum applicarem, quandoquidem refractionis hujus Cryſtalli noſtram opinionem de refractionibus regularibus funditus evertere videatur; quamvis è contrario illam non parum confirmet, ubi ex meis explicatur principiis. In Iſlandia reperiuntur plurima ejus Cryſtalli fruſta, quorum quædam ad quatuor aut quinque libras vidi. Sed præterea naſcitur quoque in aliis Regionibus, namque ejuſmodi lapides habui qui in Gal-

Galliâ prope Trecas in Campaniâ reperti fuerant, alios qui in Inſula Corſica; verum utrique obſcuriores erant & in parvis fruſtulis collecti, ita ut vix animadvertere in eis Phænomenon aliquod refractionis liceret.

2. Prima hujus cognitio, quam publicum inde habuit, debetur Eraſmo Bartholino qui Iſlandicum Cryſtallum & ejus phænomena deſcripſit. Nihilo ſeciùs tamen idem opus aggrediar, tum ut proſim iis qui librum illum non viderunt, tum quia in quibusdam Phænomenis aliquod eſt diſcrimen obſervationes illas inter & meas; perpendique diligentiſſime proprietates illas refractionis, ut de iis quam certiſſimus eſſem, priusquam earum cauſas indagare ſuſciperem.

3. Si conſideretur, quam durus ſit facileque fiſſilis lapis iſte, eum potius talcum dixeris quam Cryſtallum, quippe quem acies ferrea non ægrius dividat quam talcum aut alabaſtrum, cui gravitate par eſt.

4. Fruſta illius figuram habent parallelopipedi obliqui, unumquodque ex ſex lateribus eſt parallelogrammum, lapisque findi poteſt ſecundum tres ſuas dimenſiones, juxta plana parallela duobus ex his lateribus oppoſitis, imo ita ſi velis ut ſex latera ſint Rhombi æquales & ſimiles. Figura hic adjuncta exhibet imaginem fruſti ex hoc Cryſtallo. Anguli obtuſi cujusque parallelogrammi, ut anguli C, D, ſunt 101 graduum, 52. minutorum, & proinde acuti, ut A & B 78. graduum & 8. minutorum.

TAB. III. Fig. 3.

5. Ex angulis ſolidis duo oppoſiti dantur ut C, E, quorum uterque conſtat tribus angulis planis, obtuſis & æqualibus. Cæteri ſex conſtant duobus acutis tertioque obtuſo. Hactenus cum Bartholino mihi in omnibus convenit, niſi quod parum à me diſſentit in angulorum quantitate. Refert præterea quasdam alias hujus lapidis proprietates; ſcilicet panno alicui affrictum paleas allicere ſimilesque res leves, ſuccini inſtar, & adamantis, vitrique, & laccæ ſigillaris. Superficiem ejusdem aquâ immerſi per

per diem unum aut amplius levorem ſuum amittere. Et ſi aqua regiaſuperfundatur ebullitionem oriri, imprimis, ut obſervavi ipſe, ſi in pulverem minuatur. Animadverti etiam flammæ injectum excandeſcere, neque tamen ullatenus mutari aut minus pellucere, ſed igne violento in calcem verti. Cryſtallus illa ferè æque diaphana eſt ac cryſtallus vulgaris & aqua, nullumque colorem habet. At radii illam aliter permeant, faciuntque admirabiles illas refractiones, quarum cauſas jam explicare conabor; ad finem tractatus prolaturus conjecturas meas de formatione & figurâ extraordinariâ hujus Cryſtalli.

6. In cœteris corporibus diaphanis quæ novimus, una eſt duntaxat ſimplexque refractio; in hâc vero duæ ſunt diverſæ. Unde fit ut objecta, quæ per hanc videntur, imprimisque ea, quæ ipſi immediate applicata ſunt, videantur duplicia; & radius Solis, incidens in unum è lateribus, bifariam dividatur, ſicque Cryſtallum pervadat.

7. Alia etiam lex generalis in univerſis corporibus diaphanis eſt, ut Radius, qui cadit perpendiculariter in ſuperficiem eorum rectà tranſeat nullamque refractionem patiatur, & radius obliquus ſemper frangatur. Verum in hac Cryſtallo radius perpendicularis refringitur, & quidam radii obliqui hanc rectà permeant.

8. Ut autem particularius hæc explicemus phænomena, TAB III. Fig 4.
ſit rurſus fruſtum ejusdem Cryſtalli A B F E, & dividatur angulus obtuſus A C B, unus è tribus, quibus conſtat angulus ſolidus æquilateralis C, in duas partes æquales per rectam C G. Concipiamus deinde Cryſtallum ſecari à plano quodam, quod per lineam illam & latus C F tranſeat, quodque neceſſario perpendiculare erit ad ſuperficiem A B, & ſectio illius in Cryſtallo faciet parallelogrammum G C F H. Sectionem hanc ſectionem præcipuam cryſtalli vocabimus.

9. Si operiatur ſuperficies A B, & dumtaxat relinquatur parva apertura in puncto K, ſumpto in recta C G,

Solique ita exponatur ut radii in ſuperficiem perpendiculariter incidant; radius I K dividetur bifariam in puncto K, ejusque altera pars rectâ perget per K L, altera ſecedet per rectam K M quæ eſt in plano C G H F, & quæ facit cum K L angulum circiter ſex graduum & quadraginta minutorum tenditque ad latus anguli ſolidi C: &, exeundo ex altera parte Cryſtalli, redibit per M Z parallelam I K. Quemadmodum autem, per refractionem illam inſuetam, punctum M cernitur per radium fractum M K I, quem ſuppono ire ad oculum I, ita neceſſe eſt punctum L, per eamdem refractionem, cerni per radium fractum L R I: ita ut L R ſit quaſi parallela M K, ſi diſtantia oculi K I ponatur eſſe maxima. Ergo punctum L videtur, quaſi eſſet in recta I R S; ſed videtur quoque, ex refractione conſueta, in recta I K: neceſſario igitur judicatur duplex. Eâdem ratione, ſi L ſit exiguum foramen in papyro aut alia quavis materiâ, quæ cryſtallo applicita fuerit, cryſtallumque verſus lucem collocetur, duo videre erit foramina tanto à ſe invicem longinquiora, quanto craſſior erit Cryſtallus.

10. Rurſus ſi ita colloces cryſtallum ut radius incidens Solis, N O, quem ſumo eſſe in plano continuato G C F H, faciat ad C G Angulum 73. graduum cum 20. minutis, proindeque ſit fere parallelus lateri C F, quod facit cum F H angulum 70. graduum cum 57. minutis, ex calculo, quem infra ponam; in puncto O dividetur in duos radios, quorum alter rectâ perget per O P quæ ipſi N O in directum jacet, eodemque modo ex altero latere cryſtalli egredietur nec ſe ullo pacto franget: at contra alter frangetur vergetque per O Q. Ubi animadverti oportet peculiare eſſe plano per G C F planisque ei parallelis, ut radii omnes incidentes, qui ſunt in uno ex his planis, in eo adhuc ſint, poſteaquam cryſtallum intrârunt factique ſunt duplices; quod aliter fit in radiis alio-

rum

rum planorum, quæ cryſtallum ſecant, ut deinceps probabimus.

11. Hoc animadverti primum ex his aliisque experimentis, ex duabus illis diverſis refractionibus, quas radius patitur hâc in cryſtallo, alteram ad regulas ordinarias accommodatam eſſe, quò pertinent radii K L & O Q. Idcirco priorem hanc ab altera diſtinxi, eamque diligentiſſime per exactas obſervationes dimenſus ſum; unde inveni proportionem ejus, conſideratam in ſinubus angulorum quos facit radius incidens & refractus cum perpendiculari, eſſe præciſe ut quinque ad tria, quod obſervaverat quoque Bartholinus; adeoque illam multo majorem eſſe quam cryſtalli rupis aut vitri, quæ eſt fere trium ad duo.

12. Modus autem faciendi easdem obſervationes quam exactiſſime eſt hujusce modi. Tabulæ lævigatæ applicetur charta in qua deſcribas lineam nigram A B, aliasque duas, quæ iſtam ſecent ad angulos rectos C E D, K M L, à ſe invicem magis aut minus remotas, prout radium magis aut minus obliquum examinare deſideras. Deinde cryſtallus debet poni in interſectione E, ita ut linea A B conveniat cum ea, quæ æqualiter dividit angulum obtuſum ſuperficiei inferioris, aut cum alia quavis linea parallela. Tunc ſi oculum directè colloces ſupra lineam A B, tantum illa apparebit ſimplex; & obſervabis partem illius trans cryſtallum viſam, cum partibus ejusdem, quæ extrinſecùs apparent, in lineâ rectâ concurrere. At linea C D videbitur duplex, eamque facile diſtingues imaginem, quæ à fractione vulgari oritur; inde quia nempe tibi utroque oculo aſpicienti videbitur alterâ elevatior: vel inde, quod ſi cryſtallum plurimis modis in papyro vertas, ea tamen firma ſemper manebit, cum altera imago moveatur, & tota circumvolvatur. TAB. III. Fig. 5.

Oculus deinceps collocetur in I (manendo ſemper in plano perpendiculari per A B) adeo ut videat imaginem

 lineæ

lineæ C D, ortam à refractione vulgari, lineam rectam conficere cum reliqua parte ejus lineæ, quæ extra cryſtallum eſt. Si tunc notes in ſuperficie cryſtalli punctum H, ubi videtur interſectio E, punctum illud directe erit ſupra E. Poſtremo retrahatur oculus verſus O, ſemper in plano perpendiculari per A B, ita ut imago lineæ C D, orta à refractione conſueta, videatur unicam formare rectam cum linea K L, viſâ abſque refractione; & notetur in cryſtallo punctum N, ubi videtur punctum interſectionis E.

13. Tunc cognoſces longitudinem poſitionemque linearum N H, E M, & H E quæ eſt cryſtalli craſſitudo; quibus lineis ſeorſim deſcriptis in plano, junctiſque N E, & N M, quæ ſecat H E in P, proportio refractionis erit ea quæ eſt E N ad N P, quia nempe lineæ illæ ſunt inter ſe, ut ſinus angulorum N P H, N E P, qui æquales ſunt iis quos radius incidens O N, ejuſque refractio N E faciunt cum perpendiculari ad ſuperficiem. Proportio autem illa, ut jam dixi, eſt ſatis præciſè ut quinque ad tria, eademque ſemper in qualibet radii incidentis inclinatione.

14. Eâdem obſervandi ratione uſus ſum in examinanda ejuſdem cryſtalli refractione irregulari inſolitâve. Invento enim puncto H, & notato, directe, ut dictum eſt, ſupra punctum E, obſervavi apparentiam lineæ C D, quæ per refractionem inſolitam formatur; &, oculo ita collocato in Q, ut apparentia illa lineam rectam conficeret cum K L, viſâ abſque refractione; inveni triangula R E H, R E S, ac proinde angulos R S H & R E S, quos radius incidens & refractus cum perpendiculari faciunt.

15. Verùm repperi, hac in refractione, rationem E R ad R S non conſtantem eſſe, ut in refractione vulgari; ſed variam eſſe pro varia radii incidentis inclinatione.

16. Hoc etiam animadverti quod, cum Q R E faceret lineam rectam, id eſt, cum radius incidens cryſtallum intraret nec frangeretur (quod agnovi inde, quia tunc punctum E, viſum per refractionem extraordinariam, appareret

reret in linea C D viſa ſine refractione) hoc inquam animadverti quod angulus Q R G eſſet 73. graduum cum 20. minutis, ut jam obſervatum eſt, adeoque, quod non ſit radius lateri cryſtalli parallelus, qui eam lineâ rectâ tranſit absque refractione, ut exiſtimavit Bartholinus; quandoquidem illius inclinatio eſt dumtaxat 70. graduum cum 57. minutis, ut ſuprà diximus. Quod notandum eſt, ne fruſtra laboretur in indaganda cauſa proprietatis ſingularis hujus radii, in ejus parallelismo, ad dicta latera.

17. Tandem cum ulterius pergerem in obſervationibus, ut inveſtigarem hujus refractionis naturam, cognovi illam juxta notabilem ſequentem regulam ſemper fieri. Seorſim deſcribatur parallelogrammum G C F H factum a præcipua ſectione cryſtalli quam modo determinavimus. Repperi quod, ubi inclinationes duorum radiorum ab oppoſitis partibus profectorum æquales ſunt v. g., V K, S K, ſemper eorum refractiones K X & K T occurrunt lineæ rectæ fundi H F ita, ut puncta X & T æqualiter diſtent à puncto M, in quod incidit refractio radii perpendicularis I K: quod locum quoque habet in refractionibus cæterarum ſectionum hujus cryſtalli. Verum antequam aggrediamur illas, quæ habent etiam alias proprietates peculiares, cauſas ſuperiorum phænomenorum indagaſſe juvabit. TAB. III. Fig. 6.

Ubi explicueram refractionem diaphanorum vulgarium, ex emanatione ſphærica luminis, ut ſupra, memet iterum applicui ad examinandam hujusce cryſtalli naturam, quæ antea plane me fugerat.

18. Quandoquidem duæ erant diverſæ refractiones, concipiebam duas quoque eſſe emanationes diverſas undarum luminis, quarum altera effici poſſet in materia ætherea per corpus cryſtalli diffuſa. Quæ materia, cum multo abundantior eſſet quam materia particularum cryſtalli ipſius, efficiendæ transparentiæ ſola apta erat ex ante explicitis; tribuique huic emanationi undarum refractionem

 regu-

regularem cryſtalli, poſito undas illas ut ordinario ſphæricas eſſe; lentiusque intra cryſtallum extendi quam extrinſecus, unde refractionem oriri probavi.

19. Quod pertinet ad alteram emanationem unde irregularis refractio deberet oriri, tentare libuit quid proficerent undæ ellipticæ ſeu potius ſphæroideæ, quas poſui ſeſe indifferenter extendere, tum in materia ætherea per cryſtallum diffuſa, tum in particulis cryſtalli ipſius, ex ultima mea methodo explicandæ pelluciditatis. Videbatur mihi diſpoſitio vel ſitus regularis particularum illarum facere poſſe ut undæ figuram ſphæroidem induerent (cum ad id ſatis eſſet, ſi motus ſucceſſivus luminis paulo citius in unam partem quam in aliam extenderetur) nec fere dubitabam quin cryſtallus hæc ita facta eſſet particulisque conſtaret æqualibus & ſimilibus, quandoquidem haberet figuram angulosque menſuræ cujusdam certæ conſtantisque, circa quas particulas earumque formam & diſpoſitionem conjecturas meas in fine tractatus proponam, ut & quædam, quæ illas confirment Experimenta.

20. Quam autem finxeram duplicem luminis emanationem, ea probabilior mihi viſa eſt, poſt certum quoddam phænomenon cryſtalli vulgaris, quod, cum formâ hexagonâ creſcat, videtur quoque conſtare particulis certæ figuræ & certo ordine diſpoſitis. Illud autem erat, quod in illâ etiam cryſtallo duplex eſſet refractio, ut in cryſtallo Iſlandicâ, quanquam evidens minus. Etenim cum plura fruſta incidi curaſſem in ſpeciem prismatum læviſſimorum, idque per diverſas ſectiones, obſervavi in ſingulis, per quæ aut candelæ flammam aut plumbum vitrorum in feneſtris conſpiciebam, omnia videri duplicia, quanquam imagines paululum tantum à ſe invicem diſtabant. Unde perſpexi cur corpus illud adeo pellucidum adeo inutile eſt in Teleſcopiis paulo longioribus.

21. Verum duplex illa refractio, ex meâ Theoriâ ſupra ſtabilitâ poſtulare videbatur duplicem emanationem undarum,

TAB. III.

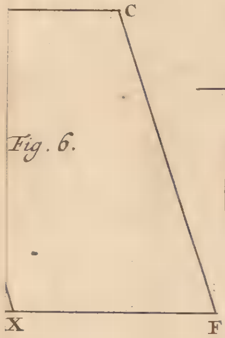


Fig. 6.

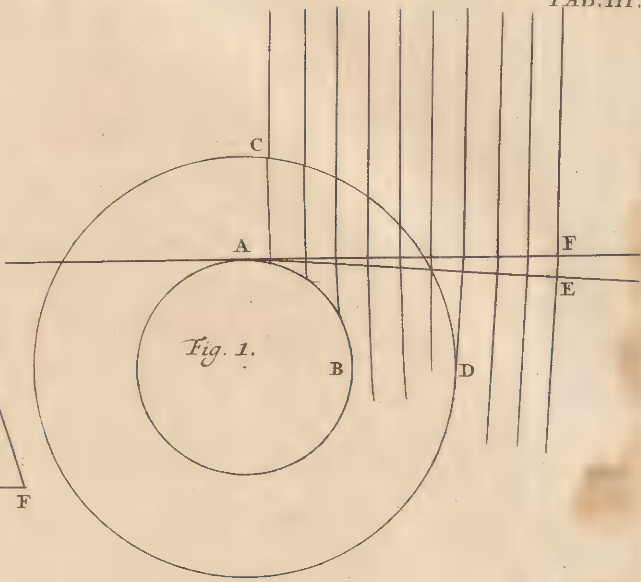


Fig. 1.

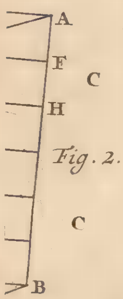


Fig. 2.

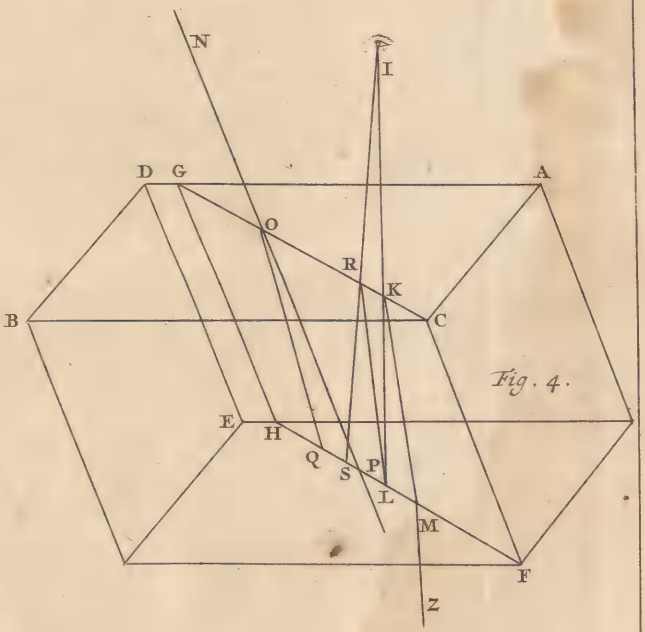


Fig. 4.

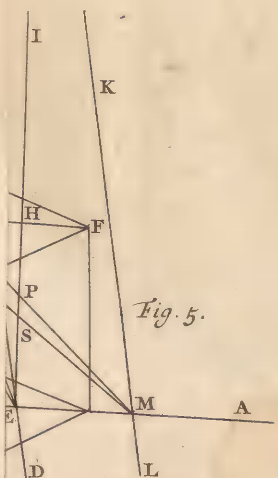


Fig. 5.

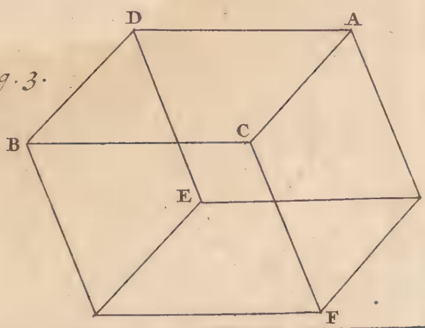


Fig. 3.

rum, earumque ſphæricarum (quia utraque refractio regularis eſt) quarum hæ illis forent paulò lentiores. Etenim exinde phænomenon illud modo valde naturali explicatur, poſitis materiis, ut in cryſtallo Iſlandico feci, quæ pro vehiculo undis illis inſerviunt. Itaque minus dubitavi poſtea duplicem illam emanationem undarum in eodem corpore admittere. Cum autem objicere quis poſſet, ſi utraque illa Cryſtallus conſtaret partibus æqualibus certæ figuræ & certo ordine diſpoſitis, fore ut interſtitia, quæ inter eas particulas relicta ſunt, quæque continent materiam ætheream, non ſufficerent ad undas luminis, quas ibi poſui tranſmittendas. Difficultatem illam removi, conſiderando nimirum particulas illas utpote texturæ rariſſimæ, aut conſtantes particulis multo tenuioribus, quas inter materia ætherea fluit liberrime; id, quod ſequitur etiam ex iis quæ demonſtravimus antea de exigua quantitate materiæ quâ conſtant corpora.

22. Poſitis igitur undis illis ſphæroidibus præter ſphæricas, conſiderare incœpi utrum ad explicanda refractionis irregularis phænomena conducere poſſent, & quî ex illis ipſis phænomenis figuram poſitionemque ſphæroidum definire poſſem; quod mihi ex ſententia ſucceſſit hunc in modum.

23. Primum conſideravi undarum ſic formatarum effectum reſpectu radii, qui incidit perpendiculariter in ſuperficiem planam corporis alicuius diaphani, in quo ita ſe extenderent. Poſui A B pro loco aperto ſuperficiei; &, cum radius perpendicularis ad planum, & procedens à lumine maxime diſtanti, nil aliud ſit ex theoria noſtra, præter incidentiam particulæ undæ ad hoc planum parallelæ; poſui rectam R C, parallelam & æqualem A B, eſſe portionem undæ alicujus luminis, cujus puncta infinita R H, *h* C occurrunt ſuperficiei A B, in punctis A K, *k* B. Ergo, loco undarum particularium hemiſphæricarum, quæ in vulgari corpore diaphano deberent ſe extendere è ſingulo Tab. IV. Fig. 1.

gulo

gulo quoque ex his ultimis punctis, ut ſupra explicuimus ubi de refractione actum eſt, deberent hîc eſſe undæ hemiſphæroides, quarum axes ſive magnas diametros poſui eſſe obliquas ad planum A B, ut eſt A V ſemi axis, aut ſemi magna diameter ſphæroidis S V T, quæ repræſentat undam particularem ortam à puncto A, poſtquam unda R C pervenit in A B. Dico autem vel axem vel magnam diametrum, quia nimirum ellipſis eadem S V T ſpectari poteſt, tanquam ſectio ſphæroidis alicujus, cujus axis eſt A Z perpendicularis ad A V. Verumtamen neutro jam determinato, ſpectabimus ſphæroides illas in iis dumtaxat ſectionibus, quæ faciunt ellipſes in plano hujusce figuræ. Sumpto autem certo quodam temporis ſpatio; intra quod à puncto A ſeſe extendit unda S V T, neceſſe erat, ut intra idem tempus, à cæteris omnibus punctis K *k* B efformarentur undæ ſimiles & ſimiliter poſitæ ac S V T. Communis verò tangens N Q omnium illarum ſemi-Ellipſium erat, ex theoria noſtra ſuperiore, propagatio undæ R C, in corporibus diaphanis propoſitis: quia nempe in linea illa terminatur, eodem inſtanti, motus quem effecit unda R C, incidendo in A B, ibique motus multo copioſior eſt quam alibicumque: cum ſcilicet formetur ex arcubus infinitis Ellipſium quarum centra ſunt ſecundum lineam A B.

24. Apparebat autem tangentem illam communem N Q eſſe omnino parallelam ipſi A B, cui tamen non directè erat oppoſita, cum lineis A N, B Q contineretur, quæ ſunt diametri conjugatæ ellipſium illarum quæ habent A & B pro centris, reſpectu diametrorum quæ ſunt in recta A B. Ita intellexi, quod difficillimum mihi viſum fuerat, nempe quo pacto radius perpendiculariter incidens in ſuperficiem aliquam poſſet refringi, quando ingrederetur corpus diaphanum; videns quod unda R C à foramine B orta extenderet ſe ~~usque~~ inter parallelas A N, B Q, ipſâ ſemper tamen parallelâ manente ad A B: ita ut lumen

lumen hîc non diffundatur per lineas perpendiculares ad ſuas undas, velut in refractione vulgari fit, ſed lineæ illæ undas oblique ſecent.

25. Inveſtigans dein cujusmodi poſſent eſſe ſitus formaque ſphæroidum illarum in cryſtallo, conſideravi unumquodque ex ſex lateribus easdem plane refractiones efficere. Igitur ſumpto iterum parallelopipedo A F B, cujus angulus ſolidus obtuſus, comprehenſus tribus angulis planis æqualibus, eſt C, ſuppoſitis deinde in eo tribus præcipuis ſectionibus, quarum prima perpendicularis eſt ad faciem D C tranſitque per latus C F, ſecunda perpendicularis eſt ad faciem B F, tranſitque per latus C A, tertia demum perpendicularis eſt ad faciem A F, tranſitque B C; noveram refractiones radiorum incidentium, qui pertinent ad hæc tria plana, plane ſimiles eſſe. At nullus omnino poterat eſſe ſitus ſphæroidis quæ eamdem poſſet habere relationem cum tribus illis ſectionibus, præter unam hanc ſphæroidem cujus axis eſſet quoque axis anguli ſolidi C. Inde comperi axem illius anguli, ſcilicet rectam illam quæ à puncto C tranſibat cryſtallum cum inclinatione æquali ad latera C F, C A, C B; eſſe lineam illam quæ determinat poſitionem axium omnium undarum ſphæroidearum quæ concipiebantur oriri ex aliquo puncto intra aut in ſuperficie cryſtalli ſumpto: cum omnes ſphæroides illæ deberent eſſe ſimiles & habere axes parallelos inter ſe. Tab. IV. Fig. 2.

26. Conſiderans poſthac planum unius ex tribus his ſectionibus, ſcilicet illius quæ eſt per G C F, cujus angulus C eſt 109 graduum cum 3. minutis, quandoquidem F erat ſupra 70. graduum cum 57. minutis, imaginansque undam ſphæroidem circa centrum C; noveram, ex iis quæ modo explicui, illius axem debere eſſe eodem in plano, cujus axeos dimidiam partem notavi per C S in altera hac figura: & quærens, ex ſupputatione (quam cum aliis huic tractatui ſubjiciam) angulum G C S, comperi illum eſſe 45. graduum cum 20. minutis. Tab. IV. Fig. 3.

27. Ut deinceps noſcerem formam illius ſphæroidis, id eſt proportionem ſemidiametrorum C S, C P, ſectionis illius ellipticæ, quæ ſunt ad ſe mutuo perpendiculares, conſideravi punctum M, in quo Ellipſis tangitur à recta F H parallela C G, debere eſſe ita ſitum, ut C M cum perpendiculari C L faceret angulum 5. graduum cum 40. minutis; Quoniam, hoc poſito, ellipſis illa ſatisfaciebat iis, quæ diximus de refractione radii perpendicularis ad ſuperficiem C G, qui ſecedit à perpendiculari C L per eundem angulum. Quo poſito, factâque C M 100000. partium, reperi calculo ſemidiametrum C P ex 105032. conſtare, & dimidium axem C S ex 93410, quæ ratio eſt fere ut 9. ad 8. adeo ut ſphærois illa eſſet iis quæ ſimiles ſunt ſphæræ compreſſæ, productæ per gyrationem ellipſeos circa ſuum parvum diametrum. Reperi etiam C G, ſemidiametrum parallelam tangenti M L, eſſe 98779. partium.

28. Unde progreſſus ad inveſtigandum quasnam refractiones radii incidentes obliqui debeant facere, ex hypotheſi undarum illarum ſphæroidearum, vidi refractiones illas pendere à proportione velocitatis quæ eſt inter motum luminis extra cryſtallum in æthere, motumque ejus intra eandem. Nam, poſito proportionem illam ejusmodi eſſe ut, dum lumen in cryſtallo facit ſphæroidem G S P qualem modo dixi, extra cryſtallum idem faciat ſphæram cujus ſemidiameter æqualis ſit lineæ N, quam poſthac determinaturi ſumus; ratio inveniendæ refractionis radiorum hæc eſt. Sit talis radius R C qui incidat in ſuperficiem K C, fiat C O perpendicularis ad R C, & in angulo K C O diſponatur O K, quæ æqualis ſit N & perpendicularis ad C O. Deinde ducatur & K I quæ tangit Ellipſim G S P, & à puncto contactûs I jungatur I C, quæ erit refractio quæſita radii R C. Cujus patebit demonſtrationem plane ſimilem eſſe illi quâ uſi ſumus in explicanda refractione vulgari. Etenim refractio radii R C nil aliud eſt præter progreſſum partis C undæ C O continuatæ in cryſtallo.

Tab. IV. Fig. 4.

At

At partes H ejusdem undæ, dum O pervenit in K, progreſſæ erunt ad ſuperficiem C K per rectas H *x*, & produxerint in cryſtallo ſuas undas hemiſphæroideas è centris *x*, easque ſimiles & ſimiliter poſitas cum hemiſphæroide G S P *g*; quarum & magnæ & parvæ diametri habebunt eamdem rationem ad lineas *x v* (continuationes linearum H *x* ad K B parallelam ad C O) quam diametri ſphæroidis G S P habent ad lineam C B aut N. Et facile eſt videre, quod communis omnium illarum ſphæroidum tangens, quæ hîc per ellipſes repræſentantur, erit recta I K, quæ idcirco erit propagatio undæ C O, ut & punctum I puncti C, juxta ea quæ demonſtrata ſunt, ubi de Refractione vulgari actum eſt.

Quod attinet ad inventionem puncti contactûs I, notum eſt reperiendam eſſe, ad lineas C K & C G, tertiam proportionalem C D, ducendamque D I parallelam ad C M antea determinatam quæ eſt diameter conjugata ad C G; tunc enim, ſi ducas K I tangit ellipſim in I.

29. Quemadmodum autem invenimus C I, refractionem radii R C, ſic inveniemus quoque C *i*, refractionem radii *r* C qui venit ab oppoſita parte; modo fiat C *o* perpendicularis ad *r* C, reliquumque ut ſupra.

Ubi liquet, ſi radius *r* C æqualiter inclinetur cum R C, lineam C *d* futuram neceſſario æqualem C D, quia C *k*, C K ſunt æquales, ut & C *g*, C G. Et conſequenter I *i* ſecabitur in E in partes æquales à linea C M cui *d i* & D I parallelæ ſunt. Et quoniam C M eſt diameter conjugata ad C G, ſequitur, quod *i* I parallela erit ad *g* G. Proinde ſi producantur refractiones C *i* & C I donec occurrant tangenti M L in T & in *t*, diſtantiæ M T & M *t* æquales quoque erunt. Et ſic perfecte explicatur ex hypotheſi noſtra, ſuperius memoratum phænomenon: ſcilicet quod ſi ſint duo radii æqualiter inclinati, & â lateribus oppoſitis præcedentes, ut hic R C, *r* C, refractiones eorum æqualiter ſecedunt â lineâ, quam ſequitur refractio radii perpendicularis conſiderando has deviationes in parallela ad ſuperficiem cryſtalli.

30. Nunc vero ut reperiatur longitudo lineæ N, reſpectu linearum C P, C S, C G determinari hæc debet ex obſervationibus refractionis irregularis, quæ fit in iſta ſectione cryſtalli; exinde comperio rationem N ad G C paullo minorem eſſe quam 8. ad 5. Et cum ad alia etiam attendam phænomena, de quibus poſtea diſſeremus, pono N conſtare ex 156962. partibus quarum ſemidiameter C G invenitur habere 98779, unde hæc ratione eſt 8 ad $5\frac{1}{29}$. Proportio vero illa quæ eſt inter lineam N & C G dici poteſt proportio refractionis, quemadmodum in vitro proportio 3. ad 2., uti manifeſtum erit, ubi explicuero ſummatim quâ ratione methodo præcedenti refractiones irregulares inveniri queant.

Tab. IV. Fig. 5. 31. Poſitis igitur iiſdem quæ ſupra, ſcilicet ſuperficies cryſtalli *g* G, Ellipſis G P*g*, & linea N; ac C M refractio radii perpendicularis F C, à quo ſecedit 6. gradibus & 40. minutis, ſit nunc quicunque radius R C cujus invenienda ſit refractio.

A centro C ſemidiametro C G deſcribatur circumferentia *g* R G, quæ Radium R C ſecat in R, & ſit R V perpendicularis ad C G. Tunc ſemper, veluti linea N ad C G, ita ſit C V ad C D; & ducatur D I parallela ad C M, ſecans Ellipſin *g* M G in I. Tunc, ſi jungas C I, erit illa refractio quæſita radii R C, quod demonſtratur hunc in modum.

Sit C O perpendicularis ad C R, & in angulo O C G collocetur O K æqualis ipſi N & perpendicularis ad C O; ducaturque recta K I, quæ ſi demonſtratur contingere Ellipſim in I, evidens erit ex ſuperioribus dictis C I refractionem eſſe radii R C. Cum autem angulus R C O ſit rectus, facile patet triangula rectangula R C V & K C O ſimilia eſſe. Quemadmodum igitur C K ad K O ita R C ad C V. At K O æqualis eſt lineæ N, & R C lineæ C G; ergo ut C K ad N, ita erit C G ad C V. Atqui veluti N ad C G, ita eſt, per conſtructionem, C V ad

C D.

C D. Ergo ut C G K ad C G, ita C G ad C D. Quoniam autem D I parallela eſt ad C M diametrum conjugatam ad C G, ſequitur quod K I tangat Ellipſim in I, quod demonſtrandum ſupererat.

32. Patet igitur, quemadmodum in refractione vulgarium diaphanorum certa quædam eſt proportio conſtans inter ſinus angulorum quos cum perpendiculari faciunt radius incidens & refractus, ita proportionem hic reperiri inter C V & C D aut I E; ſive, quod idem eſt, inter ſinum anguli quem facit radius incidens cum perpendiculari, & applicatam in Ellipſi interceptam inter refractionem illius radii & diametrum C M. Etenim ratio C V ad C D ſemper, ut dictum eſt, eadem eſt ac ratio N ad ſemidiametrum C G.

33. Addam inſuper, antequam ad alia pergam, comparatis ſimul refractione regulari hujusce cryſtalli & ejusdem irregulari refractione, hoc obſervatu dignum eſſe quod, ſi A B P S eſt ſphærois juxta quam lumen in cryſtallo diffundatur certo temporis ſpatio (quæ diffuſio, ut jam dictum eſt, ad refractionem irregularem conducit) tunc ſphæra inſcripta B V S T ſit extenſio, eodem temporis ſpatio, luminis quod ad refractionem vulgarem conducit. TAB. V. Fig. 1.

Etenim jam antea diximus quod, cum linea N ſit radius undæ i ſphæricæ luminis in aëre, dum in cryſtallo ea extenditur per ſphæroidem A B P S, ratio N ad C H ſit ut 156962. ad 93410. Sed & diximus proportionem refractionis vulgaris eſſe ut 5. ad 3. id eſt, cum N ſit radius undæ alicujus ſphæricæ luminis, in aëre, extenſionem illius in cryſtallo facere eodem temporis intervallo ſphæram unam, cujus radius eſſet ad N ut 3. ad 5. Atqui 156962 eſt ad 93410 ut 5 ad 3 minus $\frac{1}{4}$. Itaque parum & forte nil abeſt quin ſit ſphæra B V S T, quam facit lumen pro refractione regulari in cryſtallo, dum ibidem ſphæroidem B P S A efficit pro refractione irregulari, & dum ſphæram radio N in aëre extra cryſtallum.

Etiamſi igitur ſint, ut aſſeruimus, duæ diverſæ extenſiones luminis intra cryſtallum, apparet tamen alteram alterâ velociorem, dumtaxat in ſenſu perpendicularium ad axim B S ſphæroidis; altero vero ſenſu, id eſt in ſenſu parallelarum eidem axi B S, qui eſt etiam axis anguli obtuſi cryſtalli, eandem eſſe utriusque velocitatem.

Tab. V. Fig. 2. 34. Probare nunc aggrediar, poſitâ eâ quam diximus refractione, inde ſequi inſigne illud phænomenon radii, qui, incidens oblique in ſuperficiem cryſtalli, illam penetrat ſine refractione. Enim vero, poſitis iisdem quæ prius, radius R C de quo ſupra diximus, faciat in ſuperficie *g* G angulum R C G 73. graduum cum 20. minutis inclinatum eamdem in partem ac cryſtallus. Si, ex ratione ante jam explicata, quæritur illius refractio C I, reperietur facere præciſe rectam lineam cum R C; adeoque radius ille neutiquam à via ſua aberrat, juxta experientiam: quod ex ſupputatione noſtra ſic probo.

Si C G aut C R ſint, ut ſupra, 98779, C M 10000, angulus R C V 73. graduum cum 20. min., C V erit 28330. Et quoniam C I eſt refractio radii R C, proportio C V ad C D eſt, ut 156962 ad 98779, ſcilicet N ad C G: ergo C D eſt 17828. Veluti autem quadratum C G ad quadratum C M, ita rectangulum *g* D G ad quadratum D I; ergo D I ſeu C E erit 98353. Verum ut C E ad E I, ita C M ad M T, quæ igitur erit 18127. Quâ additâ ad M L quæ eſt 11609 (ſcilicet ſinus anguli L C M 6 graduum cum 40 minutis, poſitâ C M 100000 pro radio) exſurgit L T 29736, quæ eſt ad L C 99324, veluti C V ad V R, id eſt ut 29938, tangens complementi anguli R C V 73 graduum cum 20. min. ad tabularum radium. Unde colligitur R C I T eſſe lineam rectam, quod demonſtrandum erat.

35. Patebit præterea radium C I, egrediendo per ſuperficiem oppoſitam cryſtalli, debere rectâ pergere, ex demonſtratione ſequenti, quâ probatur reciprocationem refra-

TAB. IV.

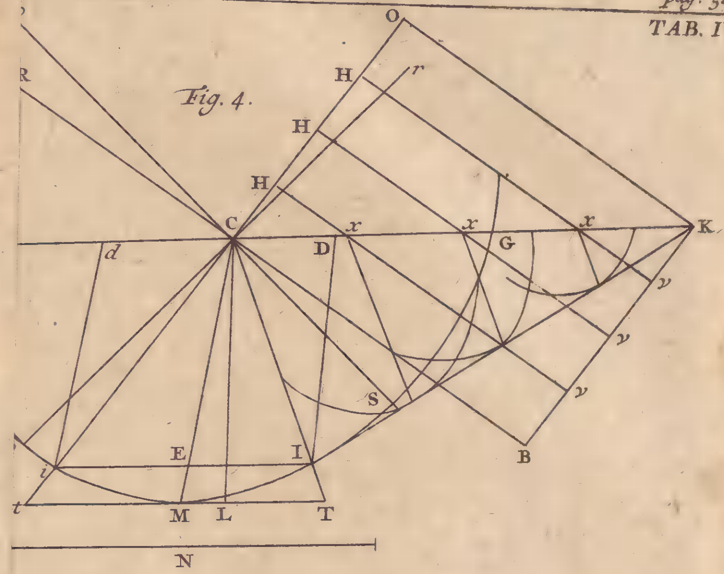


Fig. 4.

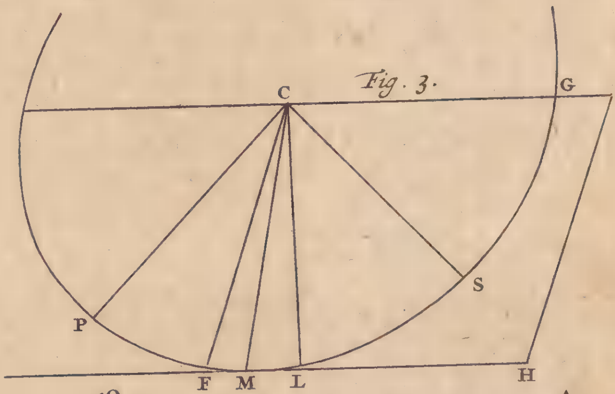
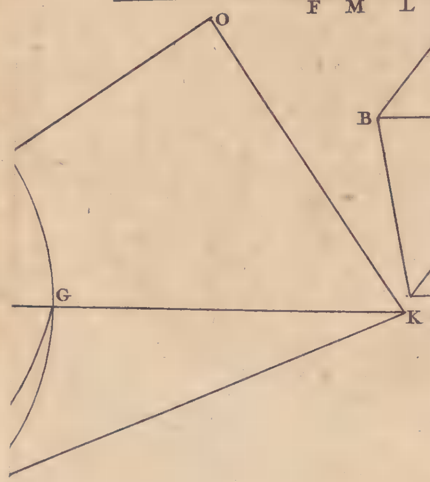


Fig. 3.



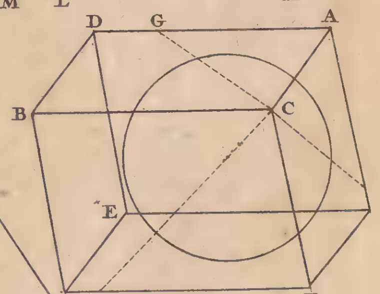


Fig. 2.

fractionum hocce in lapide non minus obſervari quam in reliquis corporibus diaphanis. Scilicet, ſi radius R C, incurrendo in ſuperficiem cryſtalli C G, rumpitur in C I; radius C I, qui egreditur per ſuperficiem oppoſitam & parallelam cryſtalli, quam pono eſſe I B, habebit refrationem ſuam I A parallelam radio R C.

Poſitis rurſum iiſdem quæ ſupra, id eſt, ſi C O, quæ perpendicularis eſt ad C R, repræſentet portionem undæ cujus continuatio intra cryſtallum ſit I K; adeo ut pars C continuata fuerit per rectam C I, dum O venit in K. Quod ſi nunc ſumamus alterum temporis ſpatium æquale priori, pars K undæ I K, intra alterum illud temporis ſpatium, progreſſa erit per rectam K B æqualem & parallelam C I; quoniam quælibet pars undæ C O, perveniendo ad ſuperficiem C K, debet pergere intra cryſtallum veluti & pars C: atque eodem tempore, efformabitur è puncto I in aëre unda ſphærica particularis, cujus ſemidiameter I A æqualis eſt K O, quoniam K O æquali temporis intervallo percurſa fuit. Eodemque modo, ſi conſideretur quodlibet aliud punctum undæ I K, uti *h* progredietur per *h m* parallelam ad C I, & incurret in ſuperficiem I B, dum punctum K percurrit K *l* æqualem *h m*: dumque iſtud conficit reliquum lineæ *l* B, efformata erit à puncto *m* unda particularis, cujus ſemidiameter *m n* habebit eam rationem ad *l* B ac I A ad K B. Unde manifeſtum eſt undam illam cujus ſemidiameter eſt *m n*, alteramque cuſemi diameter eſt I A, habituras eamdem tangentem B A. Eumdemque in modum reliquæ undæ particulares ſphæricæ quæ factæ erunt extra cryſtallum ex impulſione punctorum omnium undæ I K in ſuperficiem ætheris I B. Ergo præciſè tangens B A erit, extra cryſtallum, continuatio undæ I K, ubi pars K advenit in B. Ac proinde I A, perpendicularis ad B A, erit refractio radii C I, egrediendo è cryſtallo. Liquet autem I A eſſe parallelam radio inci-

TAB. V. Fig. 3.

incidenti R C, cum I B æqualis ſit C K, & I A æqualis K O angulique A & O recti.

Patet ergo, quod ex hypotheſi noſtrâ reciprocatio refractionum reperitur hocce in cryſtallo, quemadmodum in corporibus ordinariis diaphanis, quod reverâ obſervationes mirificè confirmant.

36. Nunc vero ad conſiderandas cæteras ſectiones cryſtalli tranſeo & ad refactiones, quæ in iis producuntur, à quibus plurima, ut videbitur, pendent inſignia phænomena.

TAB. V. Fig. 4. Sit parallelopipedum cryſtalli A B H, & ſuperficies ſuperior A E H F rhombus perfectus, cujus anguli obtuſi æqualiter diviſi ſint per rectam E F, & anguli acuti per rectam A H perpendicularem ad F E.

Sectio, quam hactenus conſideravimus, ea eſt quæ tranſit per lineas E F, E B, & quæ ſimul ſecat planum A E H F ad angulos rectos; cujus refractiones hoc habent commune cum refractionibus diaphanorum vulgarium, quod planum, ductum per radium incidentem ſecansque ad angulos rectos ſuperficiem cryſtalli, idem eſt in quo reperitur quoque radius refractus. Verum refractiones cujuslibet alterius ſectionis hujusce cryſtalli hoc admirabile prorſus habent Phænomenon, quod radius fractus egreditur ſemper è plano radii incidentis, perpendicularis ad ſuperficiem, & ſe convertit ad latus inclinationis cryſtalli. Cujus phænomeni cauſas explicabimus primum in ſectione per A H, ſimulque oſtendemus quî poſſint in ea refractiones, ex hypotheſi noſtrâ, determinari. Sit igitur in plano quod tranſit per A H, & perpendiculare eſt ad planum A F H E, radius incidens R C; ac reperienda refractio illius in cryſtallo proponatur.

37. E centro C quod ſumo eſſe in interſectione A H & F E, fingatur ducta hemiſphærois Q G *q g* M, qualem lumen debet formare, dum diffundit ſe intra cryſtallum; ac ſectio illius, per planum A E H F, faciat ellipſim Q G *q g*,

Q G qg, cujus magna diameter Qq, quæ eſt in linea A H, neceſſario erit una è magnis diametris ſphæroidis: quoniam, axis ſpheroidis cum ſit in plano per F E B, cui Q C perpendicularis eſt, ſequitur Q C eſſe quoque perpendicularem axi ſphæroidis, ac proinde Q C q unam è magnis illius diametris. Sed parva diamater hujusce ellipſis Gg habebit ad Q q rationem antea N°. 27. definitam inter C G & magnam ſemidiametrum ſphæroidis C P, nempe ut 98779 ad 105032. Tab. IV. Fig. 3.

Sit longitudo lineæ N via, quam lumen in aëre conficit, dum in cryſtallo, e centro C, ſphæroidem format Q G qg M; &, ductâ C O perpendiculari ad radium Q R, quæque ſit in plano per C R & A H, collocetur, in angulo A C O, recta O K æqualis N, perpendicularisque ad C O, quæ occurrat rectæ A H in K. Poſito deinde quod C L ſit perpendicularis ad ſuperficiem cryſtalli A E H F, & quod C M ſit refractio radii qui incidit perpendiculariter in eandem illam ſuperficiem, ducatur planum aliquod per lineam C M & per K C H, formans in ſphæroide ſemi ellipſim Q M q, quæ dabitur, cum angulus M C L datus ſit 6. grad. cum 40. min. Conſtat autem ex ſuperioribus dictis N°. 27. planum, quod tangeret ſphæroidem in puncto M, in quo pono rectam C M occurrere hujus ſuperficiei, parallelum fore plano Q G q. Si igitur per punctum K ducatur K S parallela Gg, quæ parallela quoque erit Q X tangenti Ellipſin Q G q in Q; ac fingatur planum aliquod, quod tranſeat per Q K S, tangatque ſphæroidem: punctum contactus neceſſario erit in Ellipſi Q M q, quia planum illud per K S, ut & planum quod ſphæroidem tangit in puncto M, parallelum eſt Q X tangenti ſphæroidis; hæc enim conſequentia in fine hujusce tractatûs demonſtrabitur. Punctum illud contactûs ſit in I, ſumtis proportionalibus K C, Q C, & D C, ductâque D I parallelâ C M; ac jungatur C I. Dico iſtam C I futuram eſſe refractionem quæſitam radii R C. Quod evidens e-

rit ſi, ſpectando C O, quæ perpendicularis eſt radio R C, tanquam portionem aliquam undæ luminis, demonſtremus continuationem partis illius C reperiri in cryſtallo in I, ubi O pervenit in K.

38. Quemadmodum autem, ubi demonſtravimus in capite de reflexione, radios & incidentem & repercuſſum eſſe ſemper in eodem plano, perpendiculari ad ſuperficiem repercutientem, conſideravimus latitudinem undæ unius luminis; ita nunc perpendamus oportet latitudinem undæ C O in diametro G *g*. Sumptâ igitur latitudine C *c* ad partem anguli E, ſumatur ſimul rectangulum C O *o c* velut portio aliqua undæ, & compleantur parallelograma C K *k c*, C I *i c*, K I *i k*, O K *k o*. Dum igitur linea O *o* pervenit ad ſuperficiem cryſtalli in K *k*, puncta univerſa undæ C O *oc* pervenerunt ad rectangulum K *c* per lineas parallelas O K; atque è punctis incidentiæ illorum formatæ ſunt hæmiſphæroides particulares intra cryſtallum, ſimiles & ſimiliter poſitæ ac hemiſphærois Q M *q*; quæ neceſſario tangunt omnes planum parallelogrammi K I *i k*, eodem inſtanti quo O *o* eſt in K *k*. Quod facile eſt intelligere, cum ſingulæ quæque ex his hemiſphæroidibus, quæ ſuum habent centrum in linea C K, tangant planum hoc in linea K I (hoc enim demonſtratur ut demonſtravimus refractionem radii obliqui in ſectione præcipua per E *f*) ac ſingulæ quæque, quorum centra ſunt in linea C *c*, contingant idem planum K *i* in linea I *i*; exiſtentibus omnibus his ſimilibus hemiſpheroidi Q M *q*. Quandoquidem igitur parallelogramum K *i* univerſas illas ſphæroides tangit, idem erit præcisè continuatio undæ C O *o c* intra cryſtallum, ubi O *o* pervenit in K *k*, quoniam illic determinatur motus ibique quantitas abundantior eſt quam alibicunque: adeoque apparet partem C undæ C O *o c* habere continuationem ſuam in I, ſive radium R C frangi in C I.

Ubi animadvertendum eſt, proportionem refractionis pro

pro ſectione hac cryſtalli eamdem eſſe ac proportionem lineæ N ad ſemidiametrum C Q: per quam nullo negocio reperientur refractiones radiorum omnium incidentium, eâdem ratione quâ ſupra demonſtravimus pro ſectione per F E; demonſtratioque erit eadem. Verum patet, quod proportio illa refractionis minor ſit hîc quam in ſectione per F E B; ibi enim erat ut N ad C G, ſcilicet ut 156962, ad 98779, fere ut 8 ad 5: hîc vero eſt ut N ad C Q magnam ſemidiametrum ſphæroidis, id eſt, 156962 ad 105032 fere ut 3 ad 2, at paullo minor. Quod perfecte cum obſervationibus convenit.

39. Cæterum à diverſitate illa refractionum ſingulare in cryſtallo phænomenon oritur. Scilicet, ſi in chartâ collocetur, cui ſunt inſcriptæ litteræ aut aliæ quævis res illamque obſerves utroque oculo ſito in plano ſectionis per E F, vides litteras ſublimiores per hanc refractionem irregularem, quam ſi oculos habueris in plano ſectionis per A H. Diſcrimen autem illud patet ex alterâ refractione vulgari cryſtalli iſtius, cujus proportio eſt ut 5 ad 3, & quæ litteras illas ſemper attollit æqualiter altiusque quam refractio irregularis facit. Etenim videntur litteræ & chartæ cui inſcriptæ ſunt, quaſi in duobus tabulatis diverſis; ubi vero oculi ſiti ſunt in plano per A H duo illa tabulata ſunt quater magis à ſe invicem remota, quam ubi oculos habes in plano per E F.

Oſtendemus effectum illum ex illis refractionibus ſequi: quod ſimul conducet ad docendum, quis ſit locus apparens puncti alicujus immediate ſub cryſtallo poſiti pro diverſo oculorum ſitu.

40. Ac primum videamus, quantum refractio irregularis plani per A H attollere debeat fundum cryſtalli. Planum figuræ hujus repræſentet ſectionem per Q *q* & C L, in qua eſt etiam radius R C; ac planum ſemiellipticum per Q *q* & C M inclinatum ſit ad primum, ut antea, angu- TAB V. Fig. 53

 lo

lo 6 grad. cum 40 min. in quo plano tum eſt C I refractio radii R C.

Quod ſi ſpectetur nunc punctum I, tanquam in fundo cryſtalli, videaturque per radios I C R, I *c r* æqualiter fractos in punctis C *c*, quæ æque diſtare debent à D; & radii illi occurrant duobus oculis in R *r*. Conſtat punctum I viſum iri elevatum in S quò concurrunt rectæ R C, *r* C; quod punctum S eſt in D P perpendiculari ad Q *q*. Si autem ad D P ducatur perpendicularis I P, quæ tota cadet in fundum cryſtalli, longitudo S P erit elevatio apparens puncti I ſupra fundum.

Deſcribatur ſupra Q *q* ſemicirculus qui ſecet radium C R in B, unde ducatur B V perpendicularis ad Q *q*; & proportio refractionis pro ſectione illâ ſit ſicut antea, proportio lineæ N ad ſemidiametrum C Q.

Ergo ut N ad C Q, ita eſt V C ad C D, quod apparet ex methodo pro reperiendis refractionibus; quam demonſtravimus N. 31. Verum ut V C ad C D, ita V B ad D S. Ergo ſicut N ad C Q, ſic V B ad D S. Sit M L perpendicularis ad C L, &, quoniam pono oculos R *r* diſtantes à cryſtallo pede aut circiter, adeoque angulum R S *r* minimum, conſideretur V B tamquam æqualis ſemidiametro C Q, & D P tamquam æqualis C L; ergo ut N ad C Q ita C Q ad D S. Sed N conſtat ex 156962 partibus, quarum C M continet 100000 & C Q 105032. Ergo D S conſtabit ex 70283. Verum C L eſt 99324, cum ſit ſinus complementi anguli M C L 6 graduum cum 40. minutis, poſitâ C M pro radio. Ergo D P, ſpectata tamquam æqualis C L, erit ad D S ut 99324 ad 70283. Et hunc in modum cognoſcitur elevatio puncti fundi I per ſectionis iſtius refractionem.

TAB. V. Fig. 6. 41. Repræſentetur nunc alia ſectio per E F, in figura 4., & G M *g* ſit ſemiellipſis, conſiderata in Numeris 27. & 28., quæ ſit per ſectionem undæ ſphæroidis cujus C eſt centrum. Punctum I in ellipſi ſumptum fingatur rurſus in fundo cryſtalli, cernaturque per I C R, I *c r* ra-

radios fractos qui incurrunt in oculos ambos; & C R ac *c r* æqualiter inclinentur ſuperficiem verſus cryſtalli G *g*. Hiſce ſic poſitis ſi ducatur I D parallela C M, quam ſumo eſſe refractionem radii perpendicularis qui incideret in punctum C, diſtantiæ D C & D *c* æquales erunt, ut facile eſt videre ex demonſtratis N°. 28. Conſtat vero punctum I videri debere in S quo occurrunt rectæ R C, *r c* productæ; & punctum illud S incidere in lineam D P perpendicularem ad G *g*: ad quam D P ſi ducatur perpendicularis I P, diſtantia P S repræſentabit elevationem apparentem puncti I. Supra G *g* deſcribatur ſemicirculus qui ſecet C R in B, unde ducatur B V perpendicularis ad G *g*; & N ad G *c* repræſentet proportionem refractionis hac in ſectione, ut in N°. 28. Quandoquidem igitur C I eſt refractio radii B C, & D I parallela C M; neceſſe eſt V C ſit ad C D, ut N ad G C, ex demonſtratis N°. 31; ſed ut V C ad C D ita B V ad D S. Ducatur M L perpendicularis ad C L; & quoniam ſumo iterum oculos elevatos ſatis ſupra cryſtallum, B V cenſetur æqualis ſemidiametro C G; ac proinde D S erit tunc tertia proportionalis lineis N & C G: ſic & D P cenſebitur æqualis C L. Cum autem C G conſtet ex 98778 partibus ex quibus C M habet 100000, N conſtat ex 156962; ergo D S conſtabit ex 62163. Verum C L determinata etiam eſt, habetque 99324 partes, ſicut dictum eſt N°. 34; ergo ratio P D ad D S erit ut 99324 ad 62163. Et ſic detegitur elevatio puncti fundi I per refractionem hujuſce ſectionis, & patet elevationem illam majorem eſſe quam per refractionem ſuperioris ſectionis, cum ratio P D ad D S ibi eſſet ut 99324 ad 70283.

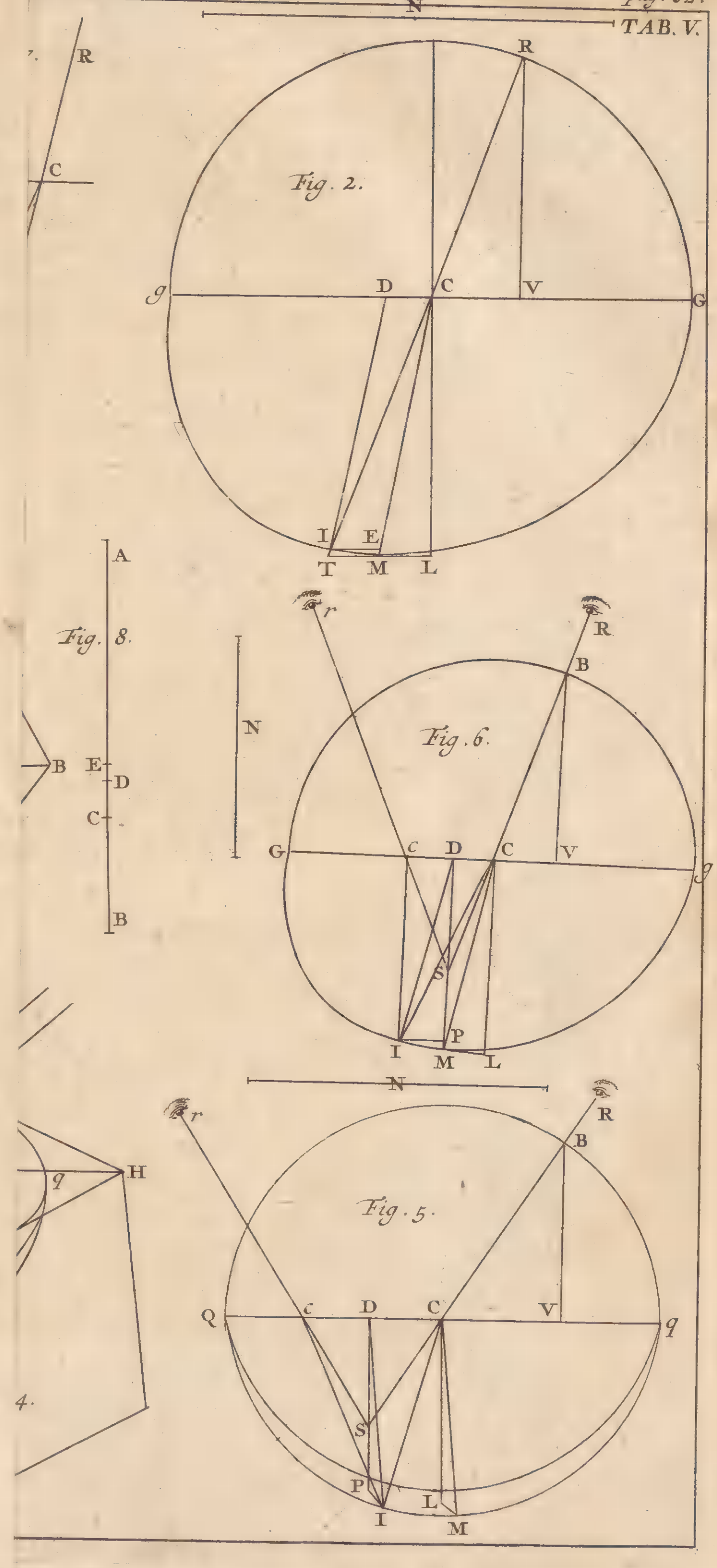
Verum per refractionem regularem cryſtalli, cujus ſupra diximus proportionem eſſe 5 ad 3, elevatio puncti I aut P in fundo erit $\frac{2}{5}$ altitudinis DP, ſicut videre eſt in hac figura, ubi, cum punctum P videatur per radios P C R, P *c r* æqualiter fractos in ſuperficie C *c*, neceſſe eſt punctum illud videatur in S, in perpendiculari P D Tab. V. Fig. 7.

quò concurrunt rectæ R C, *r c* productæ. Et notum eſt, lineam P C ad C S eſſe ut 5 ad 3, quandoquidem ſunt inter ſe velut ſinus anguli C S P aut D S C ad ſinum anguli S P C. Ac quoniam oculis R, *r*, poſitis valde diſtantibus ſupra cryſtallum, ratio P D ad D S cenſetur eadem quæ P C ad C S, elevatio P S erit quoque $\frac{2}{5}$ P D.

Tab. V. Fig. 8. 42. Quod ſi ſumatur linea recta A B pro ſpiſſitudine cryſtalli, cujus punctum B ſit in fundo, dividaturque linea illa, juxta proportiones elevationum repertarum, in punctis C, D, E; adeo ut A E ſit $\frac{3}{5}$ A B, A B ad A C ut 99324 ad 70283, & A B ad A D ut 99324 ad 62163: puncta illa divident A B, ut in hâc figura. Reperietur autem hoc plane cum experientia convenire, id eſt, ſi oculos habeas in plano quod ſecat cryſtallum, ſecundum parvam diametrum Rhombi ſuperioris, refractio regularis extollet litteras in E, videbisque & fundum & litteras, quibus impoſitus eſt fundus, per refractionem irregularem exurgere in D. Contra vero, ſi oculos habueris in plano quod ſecat cryſtallum ſecundum majorem diametrum Rhombi ſuperioris, refractio quidem vulgaris extollet litteras in E ut prius, refractio vero irregularis eodem tempore in C tantummodo; ita ut intervallum C E futurum ſit quadruplum intervalli E D quod videbatur prius.

43. Inutile foret hic notare in utraque illa oculorum poſitione, imagines productas ab irregulari refractione non videri directe ſub iis, quæ à refractione regulari procedunt; ſed ab iis divertere, recedentes magis ab angulo ſolido æquilaterali cryſtalli. Hoc enim ſequitur ex iis quæ hactenus de refractione irregulari demonſtravimus, imprimisque conſtat ex ultimis demonſtrationibus noſtris; in quibus videmus, punctum I (*fig* 5. 6.) cerni per refractionem irregularem in S, in perpendiculari D P: in qua etiam apparere debet imago puncti P per refractionem regularem; non vero imago puncti I, quæ erit fere directè ſupra idem illud punctum, & altior quam S.

Quod


TAB. V.
Fig. 2.
Fig. 8.
Fig. 6.
Fig. 5.

Quod autem attinet ad elevationem apparentem puncti I in cæteris poſitionibus oculorum ſupra cryſtallum, præter duas illas quas ad examen modo revocavimus; imago puncti illius apparebit ſemper per refractionem regularem inter duas altitudines D & C, ab una ad alteram pergens, prout oculi circa cryſtallum immobilem movebuntur. Hoc totum autem cum hypotheſi noſtra mirifice convenit, ut unusquisque certus erit, ubi docuero quâ ratione reperiri poſſint refractiones irregulares cæterarum ſectionum cryſtalli præter duas illas, quas conſideravimus. Ponamus unam è faciebus cryſtalli in quâ ſit ellipſis H D E, cujus centrum C ſit etiam centrum ſphæroidis H M E in qua extendit ſe lumen, cujusque dicta ellipſis eſt ſectio. Et radius incidens ſit R C cujus refractio reperienda proponatur. TAB. VI. Fig. 1.

Ducatur planum tranſiens per radium R C, & perpendiculare plano ellipſeos H D E, & hoc ſecans juxta rectam B C K. Dein, in eodem plano per R C, ductâ C O perpendiculari ad C R, in angulo O C K collocetur O K perpendicularis ad O C, & æqualis lineæ N, quam pono eſſe viam luminis in aere, quo tempore ſe diffundit intra cryſtallum per ſphæroidem H D E M. Tum in plano ellipſeos H D E, ducatur per punctum K, K T perpendicularis ad B C K. Porro ſi concipiatur planum aliquod ductum per rectam K T, contingensque ſphæroidem H M E in I, recta C I erit refractio radii R C, ut facile colligitur ex demonſtratis N°. 37.

At oſtendendum eſt, quî definiri queat punctum contactûs I. Ducatur igitur ad lineam K T linea parallela H F quæ contingat ellipſim H D E, punctumque illud contactûs ſit in H. Deinde ductâ rectâ per C H, quæ occurrat K T in T, fingatur per eamdem C H & per C M, quam ſumo eſſe refractionem radii perpendicularis, planum, quod faciat in ſphæroide ſectionem ellipticam H M E. Certum eſt planum, quod tranſibit per rectam

K T

K T contingetque ſphæroidem, contacturum illam eſſe in puncto quodam ellipſeos H M E, ex lemmate demonſtrando in fine hujusce capitis. Punctum autem illud neceſſario eſt punctum I quæſitum, quandoquidem planum ductum per T K non poteſt niſi in uno puncto ſphæroidem contingere. Punctum vero I determinatur facile, cum ad id ſatis ſit, ſi ducas è puncto T, quod eſt in plano ellipſeos, tangentem T I, eo modo qui demonſtratus eſt ſupra. Etenim data eſt ellipſis H M E, cujus C H & C M ſunt ſemidiametri conjugatæ; quoniam recta ducta per M, parallela ad H E, contingit ellipſim H M E, ut ſequitur ex eo, quod planum ductum per M, parallelumque plano H D E, contingit ſphæroidem in puncto illo M, quod videre eſt No. 27 & 23. Cæterum poſitio ellipſeos iſtius, reſpectu plani per radium R C & per C K, data etiam eſt; unde nullo negocio reperietur poſitio refractionis C I, reſpectu radii R C.

Notandum autem eſt, eamdem ellipſim H M E inſervire ad reperiendas refractiones cujuslibet alterius radii, qui erit in plano per R C & per C K; quia planum quodvis, parallelum rectæ H F aut T K, quod ſphæroidem continget, illam eâdem in ellipſi continget, ex lemmate modo citato.

Inveſtigavi hunc in modum ſingulatim phænomena quæque refractionis irregularis hujusce cryſtalli, ut certior fierem an ea omnia, quæ ex hypotheſi noſtra ſequuntur, cum obſervationibus revera convenirent. Quod cum ita ſit, non mediocre argumentum eſt veritatis principiorum noſtrorum. Sed aliquid addam, quod eadem mirifice confirmat. Loquar ſcilicet de diverſis ſectionibus cryſtalli, cujus diverſæ ſuperficies quæ inde oriuntur producunt refractiones tales penitus, quales oportet eſſe ex hypotheſi mea.

Tab. VI. Fig. 2. Ut, quæ ſint ſectiones illæ, quilibet intelligat, ſit A B K F ſectio præcipua per axem cryſtalli A C K, in qua erit quoque axis S S undæ ſphæroideæ luminis diffuſæ

ſæ intra cryſtallum è centro C; & linea recta, quæ ſecat S S, in medio & ad angulos rectos, ſcilicet P P erit una è magnis diametris.

Quemadmodum autem in ſectione naturali cryſtalli per planum parallelum duabus ſuperficiebus oppoſitis, quod hîc repræſentatur per lineam G G, refractio ſuperficierum inde ortarum fit juxta hemiſphæroidas G N G, ex explicatis in theoria noſtra præcedenti; ita, ſectâ cryſtallo per N N, plano perpendiculari parallelogrammo A B K F, refractio ſuperficierum formabitur per hemiſphæroidas N G N: ſectâque per P P perpendiculariter eidem parallelogrammo, refractio ſuperficierum formabitur per hemiſphæroidas P S P, & ſic de cœteris. At vidi, ſi planum N N eſſet fere perpendiculare plano G G, faceretque angulum N C G, qui eſt â latere A; 90 graduum 40. min. hemiſphæroides N G N, fieri ſimiles hemiſphæroidibus G N G, quandoquidem plana N N & G G erant æqualiter inclinata angulo 45 graduum cum 20 minutis ad axem S S. Proinde neceſſe erat, ſi theoria noſtra vera eſſet, ut ſuperficies ſingulæ, ortæ â ſectione per N N, darent omnino easdem refractiones, ac ſuperficies ſectionis per G G. Neque modo ſuperficies ſectionis per N N, ſed etiam univerſæ aliæ, quæ orirentur â planis inclinatis ad axem S S angulo ſimili 45. grad. cum 20. min. Ita ut innumeræ ſectiones deberent easdem plane refractiones efficere, quas ſuperficies naturales cryſtalli, aut quas ſectio dat quæcunq; parallela uni ex his ſuperficiebus, quæ habetur, ubi lapis ille finditur.

Conſideravi etiam, quod cryſtallo ſectâ plano ducto per P P, refractio ſuperficierum debeat ejusmodi eſſe, ut radius perpendicularis minime frangeretur, & tamen in radiis obliquis eſſet refractio irregularis diverſa à regulari, & quæ objecta cryſtallo ſuppoſita minus attolleret quam refractio regularis.

Obſervabam præterea, cryſtallo ſectâ aliquo plano per axem S S, quale eſt planum hujus figuræ, radium perpen-

 di-

dicularem refringi non debere; &, quantum ad radios obliquos, diverſas eſſe menſuras refractionis irregularis, pro diverſo ſitu plani in quo erat radius incidens.

Univerſa autem illa phænomena in cryſtallo ita deprehendebantur, adeoque non dubium mihi fuit, quin ubique ſimilem haberem ſucceſſum. Itaque concluſi effici poſſe ex hoc cryſtallo ſolida naturalibus ſimilia, & quæ in omnibus ſuperficiebus ſuis easdem producent refractiones tum irregulares tum regulares, ac ſuperficies ipſæ naturales, quæ tamen alio prorſus modo findentur, nec parallelè ulli è faciebus.

Collegi quoque ex eo confici poſſe pyramides baſi quadratâ, pentagonâ, hexagonâ aut totidem laterum quot velis, quarum ſuperficies illas easdem refractiones haberent ac ſuperficies naturales cryſtalli, exceptâ baſi quæ radium perpendicularem non franget. Singula quæque ſuperficies faciet cum axe cryſtalli angulum 45. grad. cum 20. baſisque erit ſectio perpendicularis axi.

Demum concluſi ex cryſtallo illâ confici poſſe prismata trium aut plurium laterum, quorum neque latera neque baſes, radium perpendicularem frangent, quamvis omnes tamen faciant duplicem refractionem in radiis obliquis. Cubus continetur in his prismatibus quorum baſes ſunt ſectiones perpendiculares axi cryſtalli, & latera ſectiones parallelæ axi eidem.

Ex omnibus his quoque patet, cauſam irregularis cryſtalli refractionis non hærere in diſpoſitione ſectionum, unde conſtare videtur, & ſecundum quas ſecatur tribus diverſis modis; adeoque ibidem fruſtra quæri.

Verum ut, qui cryſtallum ejuscemodi penes ſe habent, ipſimet experiri queant, quæ dixi, docebo quomodo illud ſecuerim expoliverimque. Facile ſecueris operâ rotarum illarum quibus gemmarii & lapicidæ utuntur; ſed lævigare illud difficillimum eſt, imo vulgari ratione aſperas potius ſuperficies quam læves efficies.

Igitur

Igitur poſt tentamina plurima reperi demum nullâ ad hunc uſum metalli laminâ opus eſſe, ſed tantum ſpeculo aſpero & rudi. Ibi arenæ tenuis & aquæ ope lævigatur paulatim cryſtallum hoc vitrorum Teleſcopii inſtar expoliturque tandem eâdem operâ, & minus minusque materiæ ſemper adhibendum eſt. Non potui tamen efficere, ut cryſtallum nitidum penitus & pellucidum eſſet; ſed æqualitas, quæ exinde ſuperficiebus advenit, facit ut in eis obſerventur melius refractionis effectus, quam in ſuperficiebus, quæ fiunt ubi lapis finditur, & quibus ſemper aliqua ineſt inæqualitas.

Quando ſuperficies mediocriter eſt lævigata, ſi fricetur olei guttâ aut albumine ovi, pellucidiſſima evadit, ita ut refractio in ea optime videatur. Atque hoc auxilium imprimis neceſſarium eſt, ſi expolire libeat ſuperficies naturales, easque æquare, quoniam difficilius nitidæ fiunt, quam aliæ ſectiones, quæ eo commodius expoliuntur quo minus accedunt ad plana illa naturalia.

Sed antequam libellum huncce concludam, juvat diſſerere de phænomeno quodam prorſus admirabili quod reperi poſtquam ſuperiora omnia deſcripſiſſem. Etſi enim illius cauſam huc usque non invenerim, nihilo ſecius indicabo, quo alii illam indagent. Videtur neceſſe fore ut aliæ ſuppoſitiones fierent præter eas quas feci, quæ tamen non minus veriſimiles futuræ ſunt, poſtquam tot experimentis fuerint confirmatæ.

Phænomenon autem illud eſt hujusce modi. Si duo fruſta cryſtalli ſumas alterumque alteri applices, aut inter utrumque ſpatium aliquod relinquas; ſi ſingula alterius latera ſingulis alterius lateribus parallela ſint; tum radio aliquo luminis, ut A B, bifariam diviſo intra prius fruſtum, nempe in B D & in B C, juxta utramque refractionem tum regularem tum irregularem, & inde ad alterum fruſtum perveniente; uterque radius hoc tranſibit neque amplius bifariam dividetur. Sed is qui factus eſt è refractio- Tab. VI. Fig. 3.

ne regulari, ut hic DG, faciet tantummodo refractionem unam regularem in GH, & alter CE irregularem unam in EF. Idemque contingit non modo hac in diſpoſitione, ſed etiam in illis omnibus ubi ſectio præcipua utriusque fruſti in eodem plano eſt; neque opus eſt, ut duæ ſuperficies quæ ſe mutuo ſpectant parallelæ ſint. Admirabile autem prorſus eſt cur radii CE & DG, emiſſi ex aëre in cryſtallum inferius, non dividantur ut primus radius AB. Hoc videtur Radium DG, transeundo per cryſtallum ſuperius, amiſiſſe quod neceſſarium eſt ad movendam materiam quæ refractioni irregulari inſervit; & CE pariter quod opus eſt, ut moveat materiam quæ refractioni regulari faciendæ utilis eſt. At aliud quid ratiocinium hoc evertit. Scilicet ſi utrumque cryſtallum ita disponas ut plana, quæ ſectiones præcipuas faciunt ſeſe ad angulos rectos ſecent; ſive ſuperficies quas ſpectant parallelæ ſint aut non. Tunc radius qui venit è refractione regulari, ut DG, unam tantum refractionem irregularem facit in inferiori fruſto; & è contrario radius, qui venit è refractione irregulari, ut CE, unam tantum regularem.

Tab. VI. Fig. 4.

Sed in cæteris poſitionibus innumeris, præter eas quas modo determinavi, radii DG & CE iterum dividuntur bifariam per refractionem cryſtalli inferioris; ita ut, ex unico radio AB quatuor conficiantur modo æque clari, modo alii aliis obſcuriores, pro diverſis utriusque cryſtalli poſitionibus: ſed qui ſimul non magis videntur ſplendere quam radius unicus AB.

Si nunc conſideretur, quod radiis CE & DG iisdem manentibus pendeat à poſitione quam habet cryſtallus inferior, ut vel bifariam dividantur, vel nullo prorſus modo, ubi is radius AB dividitur ſemper; concludendum videtur, undas luminis, ex eo quod priorem cryſtallum permearint, acquirere certam quamdam formam diſpoſitionemve, per quam, ubi in cryſtallum incurrunt certo quo-

quodam modo poſitam, poſſint movere duas diverſas materias quæ duabus diverſis refractionibus inſerviunt; nec movere, niſi unam ſi in cryſtallum aliter poſitam incurrerint. Quo autem pacto id fiat, nihil reperire potui, quod mihi ſatisfaceret.

Hæc itaque aliis relinquo meditanda, tranſeo ad illa, quæ dicenda habeo tum de figura inſolitâ hujusce cryſtalli, tum de ratione cur facile findatur tribus modis & parallelè alicui è ſuperficiebus ſuis.

Plurima ſunt tum vegetantia, tum foſſilia, tum genera ſalis congelati, quæ cum certis angulis figurisque regularibus formantur. Neque pauciores ſunt flores qui conſtanter habeant diſpoſita folia in figuram polygoni regularis, trium, quatuor, quinque aut ſex laterum, neque unquam amplius. Quod non indignum obſervatu eſt, cum propter figuram polygonam, tum propter certum illum conſtantemque numerum, quem nunquam excedunt, 6.

Cryſtallus vulgaris creſcere ſolet in ſpeciem virgarum hexagonarum, adamantesque plurimi naſcuntur cum apice quadrato ſuperficiebusque lævibus. Quoddam genus eſt lapillorum planorum & in ſe invicem aggeſtorum, qui figurâ ſunt omnes pentagona, angulosque habent rotundos, & latera paululum introrſum flexa; grana ſalis marini conſtanter accedunt ad figuram aut ſaltem ad angulum cubi. In cæterorum ſalium congelatione & in ſaccharo ipſo reperias alios angulos ſolidos cum ſuperficiebus omnino planis. Nix tenuis fere ſemper cadit in ſpeciem ſtellularum cum ſex radiis, aliquando vero hexagona eſt lateraque habet recta. Sæpius intra aquam, quæ congelare incipit, obſervavi, quaſi quædam folia plana & tenuiſſima glaciei, è quorum medio diffunduntur plures rami inclinati angulo 60. grad. Omnia hæc digna ſunt quæ accuratiſſime conſiderentur, ut noverimus quâ ratione quove artificio natura ibidem agat. Verum non propoſui

tractare hoc argumentum penitus. Videtur in genere regularitas rerum illarum, ab ordine particularum inviſibilium & æqualium, è quibus conſtant, oriri. Nunc vero ut ad cryſtallum noſtram Iſlandicam deveniam, dico, quod ſi qua eſſet pyramis ut A B C D, conflata tenuibus corpuſculis rotundis non ſphæricis, ſed ſphæroideis planis, qualia efficerentur per converſionem Ellipſis G H ſupra minorem diametrum E F, cujus proportio ad majorem fere eſt ut 1. ad 8, Angulus ſolidus acuminis D foret æqualis angulo obtuſo & æquilaterali hujusce cryſtalli. Quinimmo dico, ſi corpuſcula illa inter ſe eſſent leviter conglutinata, quod ubi rumperes pyramidem, rumperes illam ſecundum ſuperficies parallelas iis quæ acumen ejus conſtituunt; ac proinde, ut facile eſt colligere, inde naſcerentur prismata ſimilia iis quæ ex priore cryſtallo orta ſunt, quales exhibet hæc altera figura. Quod fit, quia, ubi hunc in modum rumpitur ſeries una ſphæroidum ſeſe totam facile ſejungit à ſerie vicina, cum unaquæque ſphærois à tribus tantum ſphæroidibus alterius ordinis ſe ſejungat, è quibus una dumtaxat hanc contigit per ſuperficiem ſuam planam, duæ vero aliæ ſolummodo per extremas margines. Quod autem ſuperficies illæ ruptæ nitidæ ſint & læves, hoc fit quia, ſi quæ ſphærois ex ſerie vicina emergere vellet, & eam ſequi quæ abſcedit, oportet ſe à ſex ſphæroidibus ſepararet, quibus retinetur undequaque, & quarum quatuor eam per ſuperficies illas planas premunt. Cum igitur anguli noſtri cryſtalli, & ratio quâ finditur, cum eis penitus conveniant, quæ oſervari licet in contextu ſphæroidum ejusmodi, non leve argumentum eſt particulas illius eodem modo factas eſſe & diſpoſitas.

Tab. VI. Fig. 5. Tab. VI. Fig. 6.

Et veriſimile eſt prismata cryſtalli illius fieri per rupturam pyramidum, cum ſcripſerit Bartholinus reperiri fruſta figuræ pyramidalis triangularis. At ſi maſſa intus tantum contexta eſſet ex illis parvis ſphæroidibus coacervatis, quæcunque

cunque etiam ejus exterior forma eſſet, conſtat ex modo dictis, quod fracta priſmata ſimilia produceret. Reliquum igitur eſt ut videamus, utrum aliæ rationes ſint quæ noſtram conjecturam confirment, & num non ſint, quæ eidem repugnent.

Objici poteſt cryſtallum hanc ita coagmentatam duabus aliis adhuc modis findi poſſe, quorum unus eſt ſecundum plana parallela baſi pyramidis, nempe triangulo A B C; alter parallele plano, cujus ſectio deſignatur lineis G H, H K & K L. Verum ut utraque diviſio poſſibilis ſit, tamen difficilior eſt quam ea quæ parallela erat alicui ex tribus planis pyramidis; ac proinde ſi tentes cryſtallum frangere, findi ſemper debet potius ſecundum tria hæc plana quam ſecundum alia duo. Ubi habes certum numerum ſphæroidum ejusmodi, in forma & inſtar pyramidum diſponas, apparet quare duæ diviſiones ſint difficiliores. Etenim in ea diviſione quæ fieret parallela baſi, unaquæque ſphærois debet ſe ſejungere â tribus aliis quas contingit per ſuperficies planas, quæ arctius premunt quam contactus extremorum marginum. Præterquam quod diviſio illa non fiet per ſeries integras, quia ſphærois quæque ſeriei unius parum retinetur ab aliis ſex ſphæroidibus ejusdem ſeriei, cum ab illis per extremos dumtaxat margines contingatur. Adeo ut adhæreat facile ſeriei vicinæ aliæque ipſi eadem de cauſa, unde ſuperficies inæquales oriuntur. Docet quoque Experentia ſi cryſtallum lapide aſpero conteras idque in angulo ſolido æquilaterali, facile reverâ eâ parte illam minuas, ſed ſuperficiem hoc modo applanatam lævigare quam difficillimum eſt. Tab. VI. Fig. 6.

Quod ad diviſionem alteram juxta planum G H K L pertinet, patebit, quod unaquæque ſphærois neceſſario â quatuor vicini ordinis ſphæroidibus abſcedere deberet, è quibus duæ illam per ſuperficies planas contingunt & duæ per margines. Itaque diviſio illa laborioſior etiam eſt quam ea quæ parallela eſt uni è ſuperficiebus cryſtalli,

ubi

ubi ſingula ſphærois à tribus tantum ſeriei vicinæ premitur, ab una nempe per ſuperficies planas & â duabus tantum per margines.

Quod tamen mihi indicavit in cryſtallo eſſe hujuſcemodi ſtratus, hoc eſt, apud me habeo fragmentum ½ libræ quod fiſſum eſt per longitudinem, ut priſma prædictum, per planum G H K L, quod patet ex coloribus Iridis per totum planum diffuſis, etſi duo fragmenta adhuc cohæreant. Hæc omnia igitur argumento ſunt, cryſtallum ita eſſe compoſitam ut dixi; ſed experimentum addere libet. Si cultello unam è ſuperficiebus illis naturalibus radas, deſcendasque ab angulo obtuſo æquilaterali, id eſt, à vertice pyramidis; cryſtallus videtur eſſe duriſſima, quam tamen facile ſeces, ſi in contrariam partem cultellum convertas. Atque hoc manifeſto ſequitur ex ſitu tenuium illarum ſphæroidum, ſupra quas priori ratione, cultellus labitur, cum, alterâ, ea ſe ſubtus dividat, fere ut ſquammas piſcium.

Non mihi ſuſcipiam diſcutere, quâ ratione tot tamque exigua generentur corpuſcula, æqualia ſibi invicem & ſimilia, neque quo pacto eximium hunc in ordinem componantur. Utrum formentur primum ac deinde ordinentur, an vero naſcantur ſimul ordinenturque, quod ad verum magis accedere mihi videtur. Verum myſteria illa naturæ obſcuriora ſunt, quam ut ea, quâ inſtructi ſumus ejus cognitione, explicare poſſimus. Hoc unum dicam exiguas illas ſphæroides fortaſſe aliquid conferre ad formandas ſphæroides undarum luminis, quas ſupra expoſui, cum utræque eodem modo ſitæ ſint habeantque axes parallelos.

Computationes in hoc Capite memoratæ.

Bartholinus in ſua de hâcce cryſtallo diſputatione, ſumit obtuſos facierum angulos 101. graduum, quos eſſe dixi 101. graduum cum 52. minutis. Addit ſe dimen-

menſum eſſe angulos hos immediate ſuper cryſtallum ipſam, quod difficile eſt accuratiſſime facere, quia latera, ut CA & CB hacce in figura, ſolent trita eſſe, adeoque minime recta. Ut igitur hac de re certior eſſem, metiri actu volui angulum obtuſum quo inclinatæ ſunt ad ſe invicem facies CBDA & CBVF, ſcilicet angulum OCN, ductâ CN perpendiculari ad FV, & CO perpendiculari ad DA. Angulumque OCN comperi eſſe 105 graduum, illiusque complementum ad duos angulos rectos, CNB, 75 graduum, ut requirebatur. Tab. VI. Fig. 7.

Ut deinde angulum obtuſum BCA reperirem, finxi ſphæram, cujus centrum eſſet in C, & in ſuperficie ejus triangulum ſphæricum, formatum per interſectionem trium planorum, quæ angulum ſolidum C, efficiunt. In triangulo illo æquilaterali, qui ſit ABF in altera hacce figura, videbam ſingulum quemque angulum debere eſſe 105 graduum, ſcilicet æqualem angulo OCN; & ſingulum quodque latus totidem habere gradus quot angulus ACB, ACF, aut BCF. Ducto igitur arcu FQ perpendiculari ad latus AB quod dividit æqualiter in Q, triangulum FQA habebat angulum Q rectum, angulum A 105 graduum, & F dimidium tantum nempe 52 graduum cum 30 minutis; exindeque reperiebam hypotenuſam AF 101 graduum cum 52 min. & arcus ille AF menſura eſt anguli ACF in figura cryſtalli. Tab. VI. Fig. 8.

Eadem in figura, ſi planum CGHF ita ſecet cryſtallum, ut ſimul dividat angulos obtuſos ACB, MFV in duas partes æquales, dictum eſt N°. 10. angulum CFH eſſe 70 graduum cum 57 minutis. Quod facile etiam demonſtratur in eodem triangulo ſphærico ABF, ubi apparet arcum FQ eſſe totidem graduum quot angulus GCF in cryſtallo, cujus complementum ad duos rectos eſt angulus CFH. Atqui arcus FQ invenitur 109 gradus cum 3 min. Ergo complementum illius, 70 graduum cum 57 minutis, eſt angulus CFH. Tab. VI. Fig. 7.

Dictum eſt N°. 26. quod, cum recta CS, quæ in figura 7. eſt CH, ſit axis cryſtalli, id eſt æqualiter inclinata ſit verſus tria latera CA, CB & CF, angulus GCH ſit 45 grad. & 20 min. Hoc autem adhuc nullo negotio per idem triangulum ſphæricum ſupputatur. Enim vero ducto altero arcu AD qui ſecat BF æqualiter, & FO in S, punctum illud erit trianguli illius centrum; & facile eſt videre arcum SQ menſuram eſſe anguli GCH, in figura quæ cryſtallum repræſentat. In Triangulo autem QAS Rectangulo cognitus eſt angulus A, qui habet 52 gradus cum 30 min., & latus AQ, quod eſt 50 graduum cum 56 min.; unde reperitur latus SQ 45 graduum & 20 min.

Tab. VI. Fig. 9. Ad Num. 27. oſtendendum eſt, cum PMS ſit Ellipſis, cujus centrum eſt C, & quæ contingit rectam MD in M, adeo ut angulus MCL, quem facit CM cum CL, perpendiculari ad DM, ſit 6 graduum cum 40 min.; cumque minor ſemidiameter CS faciat, cum CG parallelâ ad MD, angulum GCS 45 grad. cum 20 min.; oſtendendum eſt, inquam, cum CM conſtet ex 100000 partibus, PC majorem ſemidiametrum ellipſis illius, eſſe 105032 partium, & CS minorem ſemidiametrum 93410 tantum.

CP & CS producantur occurrantque tangenti DM in D & Z, & è puncto contactûs ducantur MN & MO, perpendiculares ad CP & CS. Nunc cum anguli SCP, GCL, ſint recti, angulus PCL æqualis erit GCS qui erat 45 graduum cum 20 min. ſi vero demas angulum LCM qui eſt 6 graduum cum 40 min. de LCP qui eſt 45 grad. cum 20 min. ſupereſt MCP 38 graduum cum 40 min. Si igitur conſideremus CM tanquam radium conſtantem è 100000 partibus, MN, ſinus 38 grad. & 40 min. erit 62479. Et in triangulo rectangulo MND,

Tab. V. Fig. 6. MN erit ad ND, ut radius tabularum ad tangentem 45 graduum cum 20 min. quia angulus NMD æqualis eſt DCL aut GCS; id eſt, ut 100000 ad 101170, unde deducitur ND 63210. Verum NC eſt 78079 ex iiſdem partibus

tibus quarum CM eſt 100000, quia nimirum NC eſt ſinus complementi anguli MCP, qui erat 38 grad. cum 40 min. Ergo tota DC eſt 141289; & CP quæ eſt media proportionalis inter DC & CN, quia MD ellipſin tangit, erit 105032.

Eumdem in modum, quia angulus OMZ æqualis eſt CDZ aut LCZ, qui eſt 44 grad. & 40 min. cum ſit complementum GCS, ſequitur quod, ut radius tabularum ad tangentem 44°. 40′, ita erit OM 78079, ad OZ 77176. At OC eſt 62479 ex iisdem illis partibus qua- ~~Tab. VI. Fig. 1.~~ rum CM eſt 100000, quia æqualis eſt MN ſinui anguli MCP 38°. 40′. Ergo tota CZ eſt 139655; & CS, quæ eſt media proportionalis inter CZ & CG, erit 93410.

Eodem loco dictum eſt CG inveniri 98779 partium; quod ut demonſtretur, ducatur in eadem figura PE parallela DM & quæ occurrat CM in E, in triangulo rectangulo CLD, latus CL eſt 99324 (cum CM ſit 100000) quia CL eſt ſinus complementi anguli LCM 6°. 40′. Quandoquidem autem angulus LCD eſt 45°. 20′, ut æqualis ſit GCS, reperietur latus LD 100486: unde ſi demas ML 11609, ſupererit MD 88877. Sed ut CD, quod erat 141289, ad DM 88877, ita CP 105032 ad PE 66070. Verum ut rectangulum MEH, ſive differentia quadratorum CM, CE ad quadratum MC, ita eſt quadratum PE ad quadratum C*g*; ergo etiam ut differentia quadratorum DC, CP ad quadratum CD, ita quoque quadratum PE ad quadratum *g*C. At DP, CP & PE nota ſunt, ergo & ipſum GC quod eſt 98779.

Lemma ſuperius ſine demonſtratione aſſumtum.

Si ſphæroidem aliquam contingant tum linea recta, tum duo aut plura plana, quæ parallela ſint huic lineæ, licet non inter ſe; puncta univerſa contactûs & lineæ & planorum erunt in una eademque ellipſi, facta à plano quod tranſit per ſphæroidis centrum.

Eſto ſphærois LED contacta à linea BM in puncto B, Tab. VI. Fig. 10.

 &

& à planis parallelis huic lineæ in punctis O & A, demonſtrandum eſt puncta B, O, & A eſſe in eadem ellipſi quæ facta ſit in ſphæroide a plano quod per illius centrum transeat.

Per lineam BM & puncta O, A ducantur plana parallela inter ſe, quæ, ſecando ſphæroidem, faciant ellipſes LBD, POP, QAQ, quæ ſimiles omnes erunt ac ſimiliter poſitæ, ſuaque centra habebunt K, N, R, in eâdem diametro ſphæroidis, quæ erit quoque diameter ellipſeos natæ è ſectione plani tranſeuntis per centrum ſphæroidis, ſecantisque plana trium illarum ellipſium ad angulos rectos; Quæ omnia manifeſta ſunt ex Prop. 15. libri quem de Conoidibus & Sphæroidibus Archimedes ſcripſit. Præterea duo ultima plana, quæ ducta fuere per puncta O, A, facient quoque, ſecando nempe plana quæ contingebant ſphæroidem in eisdem punctis, lineas rectas ut OH, AS, quæ, ut facile patet, parallelæ erunt ad BM; & omnes tres BM, OH, AS, contingent ellipſes LBD, POP, QAQ, in punctis illis B O A: cum ſimul ſint tum in plano ſphæroidum illarum, tum in planis quæ ſphæroidem contingunt. Quod ſi nunc è punctis B, O, A, ducantur rectæ BK, ON, AR per earumdem ellipſium centra, per quæ etiam ducantur diametri LD, PP, QQ, parallelæ tangentibus BM, OH, AS; Diametri hæ erunt conjugatæ cum dictis BK, ON, AR. Quoniam autem tres Ellipſes ſimiles ſunt & ſimiliter poſitæ, habentque ſuas diametros LD, PP, QQ parallelas, conſtat earum diametros conjugatas, BK, ON, AR parallelas quoque fore. Et cum centra K, N, R ſint, ut dictum eſt, in eadem ſphæroidis diametro, parallelæ illæ BK, ON, AR neceſſariò erunt in uno eodemque plano, quod per diametrum illam ſphæroidis tranſit; atque adeo puncta B, O, A, in eadem etiam erunt ellipſi, quam facit plani illius interſectio. Quod demonſtrandum erat. Manifeſtum eſt autem demonſtrationem fore eamdem, ſi, præter puncta O A, alia eſſent

eſſent in quibus ſphæroidem contingerent plana parallela rectæ BM.

CAPUT VI.

De Figuris Corporum diaphanorum quæ ad Refractionem Reflexionemque conducunt.

POſtquam explicui, quo pacto proprietates refractionis reflexionisque ſequantur ex iis, quæ poſuimus circa naturam luminis & corporum ſive opacorum ſive diaphanorum; oſtendam nunc quam facile & naturaliter ex eisdem principiis deduci poſſint veræ figuræ quæ inſerviunt, aut per refractionem aut per reflexionem, colligendis aut diſpergendis radiis luminis, prout velis. Enim vero licet non videam, methodum dari, quâ his figuris utamur in refractione, tum quia difficile eſt formare perfecte ſecundum illas vitra Teleſcopiorum, tum quia in refractione ipſa proprietas eſt quædam, quæ obſtet perfecto radiorum concurſui, quod optime experimentis probavit Newtonus; Nihilo ſecius illarum inventionem referam, quandoquidem ipſa, ut ita dicam, ſponte ſuâ nobis ſe offert, noſtramque de refractione theoriam confirmat, per convenientiam quæ hic reperitur inter radium fractum, radiumque repercuſſum. Præterquam quod forte inde poterint deduci utilitates, quas jam nondum perſpicimus.

Ut igitur ad figuras illas veniamus, primum ponamus reperiendam eſſe ſuperficiem CDE quæ colligat in puncto B radios emiſſos ex A, punctumque D, datum in recta AB, ſuperficiei illius eſſe verticem. Dico, ſive per reflexionem aut per refractionem, neceſſe eſſe dumtaxat ut ſuperficies illa ejuſmodi ſit, ut via luminis â puncto A ad omnia puncta lineæ curvæ CDE, & ab iſtis ad punctum concurſûs, qualis eſt hîc via per rectas AC, CB, per AL, LB, & per AB, DB; ut via illa, inquam, con- TAB. VII. Fig. 1. 2.

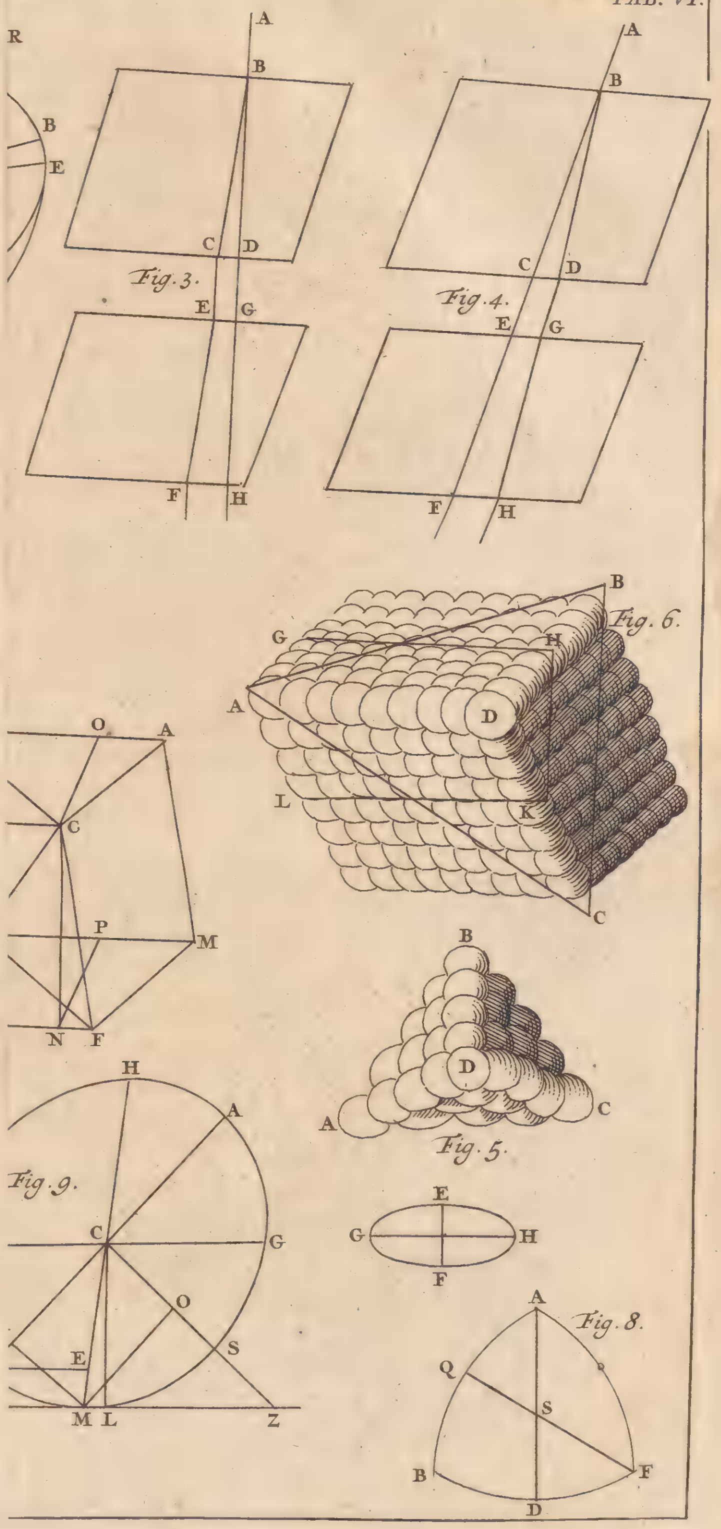
ficiatur ubique temporibus æqualibus : unde curvarum illarum inventio evadit facillima.

Quod enim attinet ad ſuperficiem reflectentem, cum ſumma linearum AC & CB æqualis eſſe debeat ſummæ linearum AD & DB, apparet DCE debere eſſe Ellipſim. Quod vero ad refractionem ſpectat, ſi ponamus proportionem velocitatum undarum luminis intra diaphana A & B eſſe, verbi gratiâ, 3 ad 2 (qualem eſſe demonſtravimus proportionem ſinuum in refractione) tantum debet poni DH æqualis $\frac{3}{2}$ DB; & deinde, deſcripto, centro A, arcu FC, qui ſecet DB in F, alter arcus deſcribi centro B cum ſemidiametro BK æquali $\frac{2}{3}$ FH. Interſectio C amborum arcuum erit unum è punctis quæſitis per quod curva debet tranſire. Puncto enim illo ita reperto, facile eſt primo oſtendere tempus per AC & CB æquale futurum tempori per AD & DB.

Si enim ponamus lineam AD repræſentare tempus intra quod eamdem lineam lumen trajicit in aere, patet DH, æqualem $\frac{3}{2}$ DB, repræſentare tempus luminis per DB intra diaphanum, quia ibi eo longiori temporis intervallo opus habet, quo motu tardiori fertur. Idcirco tota AH repræſentabit tempus per AD & DB. Similiter linea AC aut AF erit tempus per AC; & cum FH ſit ex conſtructione æqualis $\frac{3}{2}$ CB, repræſentabit tempus per CB intra diaphanum; ac proinde tota AH erit etiam tempus per AC & CB. Unde liquet tempus per AC & CB æquale eſſe tempori per AD & DB; eundemque in modum oſtendetur, ſi L & K ſunt alia puncta in curva CDE, tempora per AL, LB, & per AK, KB repræſentari ſemper per lineam AH; adeoque æqualia eſſe tempori per AD & DB.

Ut demonſtremus deinde ſuperficies, quas curvæ illæ per circumvolutiones ſuas conficiunt, directuras ita eſſe radios, quos accipiunt à puncto A, ut tendant versùs B; ſumatur punctum K in curva longinquius à D quam C, verum

TAB. VI.



verum ita ut recta AK incidat extrinſecus in curvam quæ refractioni inſervit. Deſcribantur poſtea centro B arcus KS ſecans BD in S rectamque CB in R, & centro A arcus DN occurrens AK in N.

Quandoquidem ſummæ temporum per AK, KB, & per AC, CB æquales ſunt; ſi de priore ſumma deducatur tempus per KB, & de altera tempus per RB, reſtabit tempus per AK æquale tempori per AC, CR. Quamobrem quo temporis ſpatio lumen venit per AK, erit quoque progreſſum per AC; & emiſſa erit unda particularis intra diaphanum è centro C, cujus ſemidiameter erit æqualis CR: unda vero illa neceſſario continget peripheriam KS in R, cum CB peripheriam illam ad angulos rectos ſecet. Sumpto pariter quolibet alio puncto P, in curva, oſtendemus intra idem tempus tranſitus luminis per AK, veniſſe quoque per AL, & emiſſam fuiſſe undam particularem è centro L, quæ peripheriam eandem KS continget. Et ſic de cœteris punctis curvæ CDE. Ergo quo temporis puncto lumen pervenerit in K, arcus KRS terminabit motum diffuſum ex A in DCK; atque adeo idem ille arcus erit, in diaphano, propagatio undæ ortæ è puncto A, quæ poteſt repræſentari per arcum DN aut per quemvis alium qui propior ſit centro A. Verùm partes omnes arcûs KRS extenduntur ſecundum rectas quæ illi ſunt perpendiculares, ſive quæ tendunt ad centrum B (hoc enim eodem modo demonſtratur quo jam probavimus partes undarum ſphæricarum extendi ſecundum rectas quæ ex illarum centro veniunt) progreſſusque illi undarum ſunt radii ipſi luminis. Ergo radii illi omnes hìc ad punctum B tendunt.

Facile etiam eſſet reperire in eâ curvâ quæ refractioni inſervit punctum C, aliaque omnia, dividendo nempe DA in G, ita ut DG ſit $\frac{2}{3}$ DA, & deſcribendo centro B arcum CX qui ſecet BD in X, alterumque centro A cum ſemidiametro AF æquali $\frac{3}{2}$ GX. Idem effici etiam poſſet, ſi deſcrip-

deſcripto, ut ſupra, arcu CX, efficeretur DF æqualis $\frac{1}{2}$ DX, & è centro A deſcriberetur arcus FC: utraque enim illa conſtructio, ut facilè patet, eadem eſt ac prima quam vidimus. Manifeſtum etiam eſt ex poſtrema curvam illam eſſe eamdem quam Carteſius in Geometria ſua dedit, primamque ex ovalibus ſuis nuncupat.

Pars una tantum ovalis illius refractioni ſervit, nempe, ſi AK eſt tangens, pars DK cujus K eſt terminus. Alteram vero partem Carteſius obſervavit refractionibus quoque utilem fore, ſi ſpeculum conflari poſſet ex materia ita facta, ut vim radiorum (ſive, ut noſtro more loquar, velocitatem luminis, quod ille dicere non potuit, quia lumen inſtantaneum eſſe vult) augeret in proportione 3 ad 2. At oſtendimus jam id in noſtra ratione explicandæ reflexionis oriri non poſſe ex materia ſpeculi, imo impoſſibile prorſus eſſe.

Ex iis quæ de illà ovali demonſtrata fuere, facile erit reperire figuram, quæ inſervit colligendis in unum punctum radiis incidentibus parallelis. Sumptâ enim eâdem conſtructione, poſitoque puncto A infinite diſtanti, quod dat radios parallelos, Ovalis noſtra fit vera ellipſis, cujus conſtructio in hoc tantum differt à conſtructione ovalis, quod FC hìc eſt linea recta perpendicularis ad DB, quæ prius erat arcus circuli. Enimvero cum unda luminis DN repræſentetur pariter per lineam rectam, probabitur puncta omnia illius undæ, quæ extendunt ſe ad ſuperficiem KD per lineas parallelas lineæ DB, progreſſura deinceps punctum B verſus quò ſimul advenient. Ellipſim vero, quæ reflexioni inſerviebat, manifeſtum eſt hic fieri parabolam, quoniam conſideratur focus illius A tanquam infinito ſpatio diſtans à B, qui hìc focus eſt parabolæ ad quem tendunt reflexiones omnes radiorum parallelorum lineæ AB. Horum autem effectuum demonſtratio penitus eadem eſt, ac præcedens.

TAB. VII. Fig. 3.

TAB. VII. Fig. 4.

Quod

Curvam vero C D E, quæ refractioni inſervit, eſſe ellipſim, cujus major diameter eſt ad diſtantiam inter focos, ut 3 â 2, quæ proportio eſt refractionis, facilè ex Algebraïcâ computatione detegitur. Nam ſi D B, quæ eſt data, nuncupetur a, perpendicularis illius D T indeterminata x, & T C, y; F B erit $a-y$; C B $\sqrt{xx+aa-2ay+yy}$. Sed natura curvæ eſt ejusmodi ut $\frac{2}{3}$ T C, cum C B ſit æqualis D B, velut ultima in conſtructione dictum eſt; ergo æquatio erit inter $\frac{2}{3}y+\sqrt{xx+aa-2ay+yy}$ & a, quâ reductâ, venit $\frac{6}{5}ay-yy$ æqualis $\frac{9}{5}$, xx: id eſt, factâ D O æquali $\frac{6}{5}$ D B, rectangulum D F O æquale eſt $\frac{9}{5}$ quadrati F C. Unde patet D C ellipſim eſſe, cujus axis D O eſt ad parametrum, ut 9 ad 5; adeoque quadratum D O ad quadratum diſtantiæ focorum, ut 9 ad 9-5, id eſt 4: & tandem lineam D O ad diſtantiam illam, ut 3 ad 2.

Rurſum ſi ponamus punctum B infinite diſtans, pro prima ovali noſtra, comperiemus C D E eſſe veram hyperbolen, quæ faciet, ut radii emiſſi è puncto A paralleli fiant; ac proinde ii qui paralleli ſunt intra corpus diaphanum, extrinſecus congregentur in punctum A. Notandum autem eſt lineas C X & K S fieri rectas perpendiculares ad B A, quia nimirum repræſentant arcus circulorum, quorum centrum B infinite diſtat. Et interſectionem perpendicularis C X & arcûs F C daturam eſſe punctum C, unum ex illis, per quæ curva tranſire debet. Quod faciet ut partes omnes undæ luminis D N, ubi occurrent ſuperficiei K D E, progreſſuræ ſint per parallelas ad K S, & perventuræ ad rectam illam eodem tempore; cujus rei demonſtratio eadem eſt quâ in priore ovali uſi ſumus. Cæterum, ex computatione non laborioſa magis quam ſuperior eſt, reperitur C D E hîc eſſe hyperbole, cujus axis D O eſt $\frac{4}{5}$ A D, & parameter æqualis A D. Unde facile demonſtratur D O eſſe ad diſtantiam inter focos ut 3 à 2. TAB VII. Fig 5.

Hic eſt uterque caſus in quo ſectiones conicæ refra-

ctioni

ctioni inſerviunt, & iidem quos in ſua dioptrica explicat Carteſius, qui primus linearum illarum reperit uſum, quatenus ad refractionem attinent, ut & ovalium quarum primam jam propoſuimus. Altera autem ea eſt quæ

TAB. VII. Fig. 6. 7. inſervit radiis verſus punctum aliquod datum pergentibus, & in qua, ſi vertex excipiens radios eſt D, accidet, prout ratio A D ad D B data eſt major aut minor, ut alter vertex tranſiturus ſit inter B A aut ultra A; quorum ultimum ſi contingat, erit eadem quam Carteſius tertiam nuncupat.

Inventio autem conſtructioque ac demonſtratio ſecundæ iſtius ovalis eadem eſt quæ primæ. At notatu dignum eſt eam uno in caſu circulum perfectum evadere, ubi ſcilicet ratio A D ad D B ea eſt, quæ metitur refractiones, ut hîc 3 ad 2, quam rem jam diu obſervaveram. De quartâ autem, cum reflexionibus dumtaxat impoſſibilibus utilis ſit, non opus eſt ut agam.

TAB VIII. Fig. 1. Quod vero attinet ad methodum quâ lineas illas repperit Carteſius, cum ea neque ab illo neque ab alio, quod ſciam, poſt illum explicata ſit, dicam obiter qualis mihi fuiſſe videatur. Reperienda proponatur ſuperficies, quam fecit circumvolutio curvæ K D E, quæ, excipiens radios incidentes emiſſos è puncto A, eosdem verſus punctum B divertit. Conſiderantes igitur curvam illam ut jam notam, ponentesque verticem eſſe D in recta A B, dividamus eam in particulas quaſi infinitas per puncta G, C, F. Deinde ductis, è ſingulo quoque puncto, lineis rectis verſus A, quæ repreſentent radios incidentes, aliisque item rectis verſùs B; deſcribantur è centro A arcus circulorum G L, C M, F N, D O, qui ſecent in L, M, N, O, radios emiſſos ex A. Demum è punctis K, G, C, F, deſcribantur arcus K Q, G R, C S, F T qui ſecent radios, ductos verſus B, in Q, R, S, T, & ponamus rectam H K Z ſecare curvam in K ad angulos rectos.

Cum

Cum igitur A K eſt radius incidens, refractioque illius intra diaphanum K B, neceſſe erat, juxta legem refractionum quæ nota erat Carteſio; ut ſinus anguli Z K A eſſet ad ſinum anguli H K B, ut 3 ad 2, poſito hanc eſſe proportionem refractionis vitri; aut, ut ſinus anguli K G L eamdem illam rationem haberet ad ſinum anguli G K Q, ſpectatis K G, G L, K Q tanquam lineis rectis, propter illarum exiguitatem. Verum ſinus illi ſunt lineæ K L & G Q, ſi accipias G K pro radio circuli. Ergo L K ad G Q debebat eſſe ut 3 ad 2, adeoque ob eandem rationem M G ad C R, N C ad F S, O F ad D T. Ergo etiam ſumma antecedentium omnium ad omnes conſequentes erat velut 3 ad 2. Producto autem arcu D O, donec offendat A K in X, K X eſt ſumma antecedentium. Producto item arcu K Q, donec & offendat A D in Y, ſumma conſequentium eſt D Y. Ergo K X ad D Y debebat eſſe ut 3 ad 2. Unde apparebat curvam K D E eſſe ejus naturæ ut, ductis è quolibet puncto, verbi gratia e K, rectis K A, K B, exceſſus, quo A K ſuperat A D, ſit ad exceſſum quo D B ſuperat K B, ut 3 ad 2. Enimvero demonſtrari pariter poteſt, ſumpto in curva quolibet alio puncto ut G, exceſſum quo A G ſuperat A D, ſcilicet V G, eſſe ad exceſſum quo B D ſuperat D G, ſcilicet D P, in eadem ratione ut 3 ad 2. Et hanc juxta proprietatem Carteſius in Geometria ſua, curvas illas conſtruxit, easdemque facile comperit, in caſu radiorum parallelorum, hyperbolas fieri & ellipſes.

Tab. VI. Fig. 6.

Verum revertamur nunc ad methodum noſtram, videamusque quo modo facile conducat ad reperiendas lineas quas requirit latus unum vitri, ubi alterum eſt figuræ alicujus datæ, non modo planæ aut ſphæricæ aut factæ per aliquam è ſectionibus conicis (quæ reſtrictio eſt quâcum Carteſius problema hoc propoſuit, ſolvendum relinquens poſteris) ſed generaliter cujuslibet: id eſt quæ facta fuerit per circumvolutionem alicujus lineæ curvæ datæ, ad

quam ſolummodo poſſimus ducere lineas rectas tangentes.

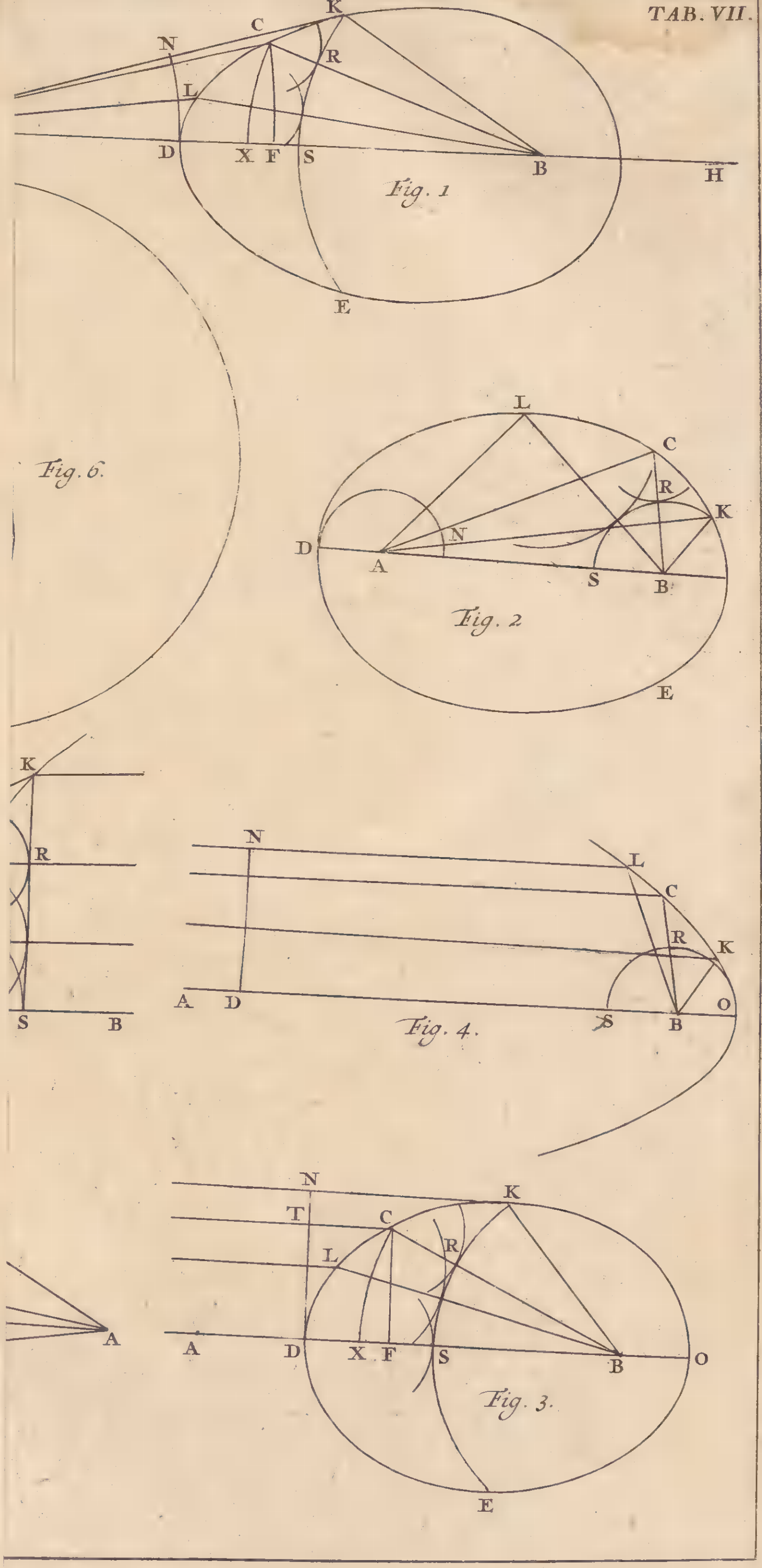
TAB. VIII. Fig. 2. Sit figura data facta per converſionem alicujus curvæ A K circum axem A V, & latus illud vitri excipiat radios emiſſos è puncto L. Ac demum ſpiſſitudo A B medii vitri ſit data, ut & punctum F in quod radios omnino omnes cogere vis; qualiscumque fuerit prima refractio facta in ſuperficie A K.

Dico, ſatis ad id eſſe ſi linea B D K, quæ facit alteram ſuperficiem, ejusmodi ſit ut via luminis à puncto L usque ad ſuperficiem B D K, & deinceps ad punctum F, conficiatur ubique æqualibus temporis ſpaciis, quæ ſingula æqualia ſint tempori intra quod lumen trajicit rectam L F, cujus pars A B eſt in vitro.

Sit L G radius incidens in arcum A K. Refractio illius G V data erit ope tangentis, quæ ducetur ad punctum G. Nunc reperiendum eſt in G V punctum D, ita ut F D cum $\frac{3}{2}$ D G, & recta G L, ſint æquales tum F B cum $\frac{3}{2}$ B A, tum recta A L; quæ, ut apparet, conſtituunt longitudinem datam. Sive, ſublatâ utrimque longitudine L G, quæ etiam data eſt, ducenda dumtaxat eſt F D ſupra rectam V G, adeo ut F D cum $\frac{3}{2}$ D G ſit æqualis lineæ datæ: quod problema planum facillimum eſt; & punctum D unum erit ex iis per quæ curva B D K tranſire debet. Similiter, ducto alio radio L M, repertâque illius refractione M O, reperietur illâ in lineâ punctum N, adeoque quot volueris.

Ad demonſtrandum curvæ effectum, deſcribantur centro L arcus circuli A H ſecans L G in H, & è centro F arcus B P; ac in A B ſumantur A S æqualis $\frac{2}{3}$ H G, & S E æqualis G D. Conſideratâ igitur A H tanquam undâ luminis emiſſâ è puncto L, conſtat, dum pars illius H pervenerit in G, partem A nondum progreſſam fore intra corpus diaphanum, niſi per A S; ſumo enim, ut ſupra, proportionem refractionis ut 3 ad 2. Novimus autem

TAB. VII.


Fig. 1
N C K R L D X F S B H E
Fig. 2
L C R K D A N S B E
Fig. 4
N L C R K A D S B O
Fig. 3
N K T C R L A D X F S B O E
Fig. 6
K R S B A

autem partem undæ quæ incidit in G, inde progredi per lineam G D, quoniam G V eſt refractio radii L G. Ergo quo temporis ſpatio pars illa undæ venit à G in D, altera quæ erat in S pervenit in E, cùm G D & S E æquales ſint. Sed dum iſtæc procedet ab E in B, pars undæ, quæ erat in D, diffundet in aere ſuam undam particularem cujus ſemidiameter D C (poſito undam illam ſecare in C rectam D F) erit $\frac{3}{2}$ E B, cum velocitas luminis extra diaphanum ſit ad eamdem intra diaphanum ut 3 ad 2. Facile autem demonſtratur, quod unda illa tanget in puncto C arcum B P. Cùm enim per conſtructionem F D + $\frac{3}{2}$ D G + G L, æquales ſint F B + $\frac{3}{2}$ B A + A L; ſublatis æqualibus L H, L A, reſtabunt F D + $\frac{3}{2}$ D G + G H, æquales F B + $\frac{3}{2}$ B A. Rurſumque, ſi è latere uno demas G H & ex altero $\frac{3}{2}$ A S quæ æquales ſunt, reſtabit F D cum $\frac{3}{2}$ D G, æqualis F B cum $\frac{3}{2}$ B S. Sed $\frac{3}{2}$ D G æquales ſunt $\frac{3}{2}$ E S. Ergo F D eſt æqualis F B cum $\frac{3}{2}$ B E. Sed D C erat æqualis $\frac{3}{2}$ E B. Ergo ſublatis utrimque longitudinibus illis æqualibus, reſtabit C F æqualis F B; ac proinde apparet undam, cujus ſemidiameter eſt D C, contingere arcum B P, quo momento lumen emiſſum è puncto L pervenit in B per rectam L B. Eâdem ratione demonſtrabitur, quod intra idem illud momentum, lumen emiſſum à quolibet alio radio, ut L M, M N, diffuderit motum, qui terminatur ab arcu B P. Unde ſequitur, ut ſæpius dictum eſt, propagationem undæ A H, permeatâ ſpiſſitudine vitri, futuram eſſe undam ſphæricam B P; cujus partes omnes progredi debent ad centrum F per lineas rectas, quæ ſunt radii luminis ad centrum F. Quod demonſtrandum erat. Eodem autem modo reperientur lineæ illæ curvæ in quolibet caſu, qui proponi poteſt, ut patebit ex uno alterove exemplo, quod addam.

Sit data ſuperficies vitri A K, facta per revolutionem lineæ A K, curvæ aut rectæ, circum axem B A. Sit etiam TAB. VIII. Fig. 3.

 tiam

tiam datum in axe punctum L; & ſit B A ſpiſſitudo vitri; reperiendaque proponatur altera ſuperficies K B D, quæ, excipiens radios parallelos ipſi B A, eosdem ita dirigat, ut, poſtquam rupti iterum ſunt in ſuperficie data A K, coeant omnes in punctum L.

E puncto L, ad aliquod punctum lineæ datæ A K, ducatur recta L G, quâ ſpectatâ tanquam radio aliquo luminis, reperietur refractio illius G D, quæ producta hinc aut illinc offendet rectam B L, ut hîc in V. Erigatur deinde in A B perpendicularis B C, quæ repræſentabit undam aliquam luminis ortam puncto F infinite diſtanti, quia poſuimus radios parallelos. Neceſſe igitur eſt partes omnes undæ illius B C perveniant eodem tempore ad punctum L, vel partes univerſæ alicujus undæ, manantis è puncto L, uno eodemque inſtanti ad rectam B C perveniant. Quamobrem reperiendum eſt in linea V G D punctum D, ita ut, ductâ D C parallelâ ad A B, ſumma C D & $\frac{3}{2}$ D G & G L, æqualis ſit $\frac{3}{2}$ A B cum A L. Sive hinc & inde ſublatâ G L, quæ data eſt, oportet ut C D cum $\frac{3}{2}$ D G æqualis ſit lineæ alicui datæ: quod problema facilius eſt quam illud præcedentis conſtructionis. Punctum D, ita repertum, erit unum ex iis per quæ curva tranſire debet, & demonſtratio eadem futura eſt ac ante. Ex qua probabitur undas emiſſas è puncto L, ubi permeavere vitrum K A K B, ſuſcepturas eſſe formam linearum rectarum, ut B C; quod idem eſt ac ſi dicas radios parallelos evadere. Unde reciprocè ſequitur eos, ſi paralleli incidant in ſuperficiem K D B, coituros in punctum L.

TAB. VIII. Fig 4. Sit etiam data ſuperficies A K, qualem velis, facta per revolutionem circa axem A B; poſitâ ſpiſſitudine medii vitri A B. Datum inſuper ſit in axe punctum L pone vitrum, in quod punctum ponitur tendere radios incidentes in ſuperficiem A K; reperiendaque præterea proponatur ſuperficies B D, quæ radios vitro egredientes perinde avertit,

tit, ac ſi venirent è puncto F quod eſt ante idem vitrum.

Sumpto aliquo puncto G in linea A K, & ductâ rectâ I G L, pars illius G I repræſentabit unum è radiis incidentibus, cujus reperietur refractio G V; atque in ea reperiendum eſt punctum D, unum ex iis per quæ curva debet tranſire. Ponamus jam repertum eſſe, & è centro L deſcribatur arcus circuli G T, ſecans rectam A B in T, ubi L G major ſit quam L A; aliter enim deſcribendus eſſet ex eodem centro arcus A H, qui ſecat rectam L G in H. Arcus ille G T (aut in altero caſu A H) erit unda una luminis incidentis, cujus radii tendunt versùs L. Pariter è centro F deſcribatur arcus circuli D Q, qui repræſentabit undam exeuntem è puncto F.

Oportet igitur ut unda T G, permeato vitro, efformet undam Q D, eamque ad rem video tempus luminis per G D intra vitrum debere eſſe æquale tempori per T A, A B, & B Q, è quibus unica A B etiam eſt intra vitrum. Sive, ſumptâ A S æquali $\frac{2}{3}$ A T, video $\frac{3}{2}$ G D debere eſſe æquales $\frac{3}{2}$ S B + B Q; & ſublato utroque ab F D vel F Q, F D minus $\frac{3}{2}$ G D, debere eſſe æqualem F B minus $\frac{3}{2}$ S B. Quæ ultima differentia eſt longitudo data, & ſatis eſt, è puncto dato F, duci rectam F D in V G, ut hoc ita ſit. Quod problema plane ſimile eſt ei, quod inſervit primæ ex illis conſtructionibus, ubi F D + $\frac{3}{2}$ G D æquari debet longitudini datæ.

In demonſtratione autem obſervandum eſt, ubi arcus B C incidit intra vitrum, concipiendum eſſe arcum aliquem, qui illi concentricus ſit, nempe R X, ultra Q D. Cumque demonſtratum fuerit partem C undæ G T pervenire eodem temporis intervallo in D, quo pars T in Q, quod liquet facilè ex conſtructione ipſa; manifeſtum porro erit undam emiſſam è puncto D contacturam arcum R X, quo momento pars Q pervenerit in R: adeoque

arcum

arcum hunc eodem inſtanti terminare motum, qui venit ex unda T G, unde ſequuntur reliqua.

Monſtratâ linearum illarum curvarum inventione, quæ inſerviunt perfecto radiorum concurſui, reſtat ut rem unam notatu dignam explicemus de refractione inordinata ſuperficierum ſphæricarum, planarum, aliarumque; quæ ſi ignoraretur, poſſent in dubium vocari quæ ſæpius diximus, ſcilicet radios luminis eſſe lineas rectas, quæ ſecant, ad angulos rectos, undas inde diffuſas. Etenim radiis, qui incidunt paralleli in ſuperficiem aliquam ſphæricam, puta A F E, ſeſe mutuo interſecantibus, poſt refractionem ſuam, in punctis variis, quemadmodum hæc figura exhibet; quales poterunt eſſe undæ luminis intra diaphanum, quæ ſecentur ad angulos rectos â convergentibus radiis? Enimvero nequeunt eſſe ſphæricæ. Et quo evadent undæ illæ, poſtquam dicti radii ſeſe interſecare incipiunt? In hac difficultate enodandâ, videbimus aliquid contingere notatu digniſſimum, undaſque nihilo ſecius ſubſiſtere ſemper, licet non totæ tranſeant, velut fit in vitris compoſitis, de quibus modo egimus.

TAB. VIII. Fig. 5.

Ex iis quæ ſupra demonſtrata fuere, recta A D, quæ è vertice ſphæræ ducta eſt perpendicularis axi ad quem radii veniunt paralleli, repræſentat undam luminis; & quo temporis puncto pars illius D pervenerit ad ſuperficiem ſphæricam A G E in E, cæteræ partes progreſſæ ſunt ad eandem ſuperficiem in F, G, H &c.: & efformarunt ſuas undas ſphæricas, quarum puncta illa ſunt centra. Ac ſuperficies E K, quam univerſæ undæ illæ contingent, erit propagatio undæ A D intra ſphæram, quo momento pars D venit in E. Linea autem E K non eſt arcus circuli, ſed linea curva facta per evolutionem alterius curvæ E N C, quæ contingit omnes radios H L, G M, F O, &c. qui ſunt refractiones radiorum parallelorum; fingendo filum eſſe aliquod jacens in convexitate E N C, quod dum evolvitur deſcribat extremitate ſua E cur-

curvam illam E K. Poſito enim curvam illam ſic deſcriptam eſſe, demonſtrabimus undas formatas à centris F, G, H &c. illam tacturas eſſe omnes.

Conſtat curvam E K, cœteraſque omnes, deſcriptas per evolutionem curvæ E N C, poſitis longitudinibus diverſis fili, ſecturas eſſe radios omnes H L, G M, F O &c. ad angulos rectos; adeo ut partes earum, duabus ejuſmodi curvis interceptæ, futuræ ſint omnes æquales: hoc enim ſequitur ex iis quæ in tractatu noſtro *de Motu Pendulorum* demonſtravimus. Poſitis autem radiis incidentibus tanquam infinite ſibi mutuo vicinis, ſi duo conſiderentur, puta R G, T F; ducaturque G Q perpendicularis ad R G, & curva F S, quæ ſecat G M in P, deſcripta ſit, per evolutionem curvæ N C, incipiendo ab F, quo uſque ſumo filum ſe extendere: poteſt accipi particula illius F P pro recta, quæ perpendicularis ſit radio G M, itemque arcus G F pro lineâ recta. Verùm cum G M ſit refractio radii R G, & F P perpendicularis illi, F Q ſe habebit ad G P, ut 3 ad 2, id eſt in proportione refractionis, ſicut monſtratum eſt ſupra, in explicanda Carteſii inventione. Idem contingit in omnibus minoribus arcubus G H, H A, &c. Scilicet in quadrilateris quibus ii continentur, latus parallelum axi eſt ad ſuum oppoſitum ut 3 ad 2. Ergo etiam ut 3 ad 2, ita erit ſumma horum ad illorum ſummam, id eſt T F ad A S, D E ad A K, & B E ad S K aut F V, poſito quod V ſit interſectio curvæ E K, & radii F O. Verum, factâ F B perpendiculari ad D E; ut 3 ad 2, ita quoque eſt B E ad Semidiametrum undæ ſphæricæ emiſſæ è puncto F, dum lumen extra diaphanum pervaſit ſpacium B E. Ergo apparet undam illam ſecturam eſſe radium F M in eodem puncto V, ubi ſecatur ad angulos rectos à curva E K; adeoque fore ut unda curvam illam tanget. Eâdem ratione probabitur idem eſſe in cœteris omnibus undis, natis è punctis G, H, &c. ſcilicet tacturas eſſe curvam E K, quo momento pars D undæ E D pervenerit in E.

Ut autem doceamus nunc quò undæ illæ evadant, poſtquam radii ſe interſecare incipiunt: Dico eas inde ſe replicare & conſtare duabus partibus cohærentibus; quarum altera eſt curva facta per evolutionem curvæ ENC in quodam ſenſu, altera vero curva quoque per evolutionem ejusdem in altero ſenſu facta. Ita unda KE, procedendo concurſum versùs, fit *abc*, cujus pars *ab* efficitur per evolutionem *b*C, quæ portio eſt curvæ ENC, dum extremitas C manet fixa, pars vero *bc* efficitur per evolutionem portionis *b*E, dum extremitas E immota manet. Deinde eadem unda fit *def*, tum *ghk*, demum CI: unde tunc extenditur abſque ullo plexu, ſed ſemper per lineas curvas formatas per evolutionem curvæ ENC, auctæ lineâ rectâ verſùs C.

Quinimmo in curva iſtâ eſt pars EN recta, quum N eſt punctum ubi incidit perpendicularis ex centro ſphæræ X, in refractionem radii DE, qui, ut nunc pono, ſphæram contingit. E puncto autem N incipiunt replicari undæ luminis, ad extremitatem uſque curvæ C, quæ reperitur faciendo ut AC ad CX ſit in proportione refractionis, ut hîc, 3 ad 2.

Reperiuntur etiam quælibet alia puncta curvæ NC, ope theorematis quod demonſtravit Barrow in duodecima lectione optica, quamquam in alium finem. Et notandum eſt, poſſe dari lineam rectam æqualem curvæ illi. Quandoquidem enim ſimul cum recta NE æqualis eſt rectæ notæ, quia DE ad AK eſt in refractionis proportione; ergo patet, demptâ EN de CK, reſiduum fore æquale curvæ NC.

TAB. VIII. Fig. 6. Reperientur pariter undæ replicatæ in reflexione ſpeculi concavi ſphærici. Eſto ABC ſectio per axem hemiſphærii alicujus cavi, cujus centrum eſt D, & axis DB, ad quem ſumo radios luminis parallelos. Reflexiones omnes radiorum illorum, qui incidunt in quadrantem circuli AB, tangent lineam curvam AFE, cujus

extre-

extremitas E eſt in foco hemiſphærii, id eſt in puncto quod diametrum in duas partes æquales dividit: puncta vero, per quæ curva illa tranſire debet, reperire licet, ſumpto ex A arcu AO, factoque duplo ejus arcus OP; cujus ſubtendens dividenda eſt, ita ut pars FP ſit tripla partis FO: tunc enim F unum eſt è punctis quæſitis.

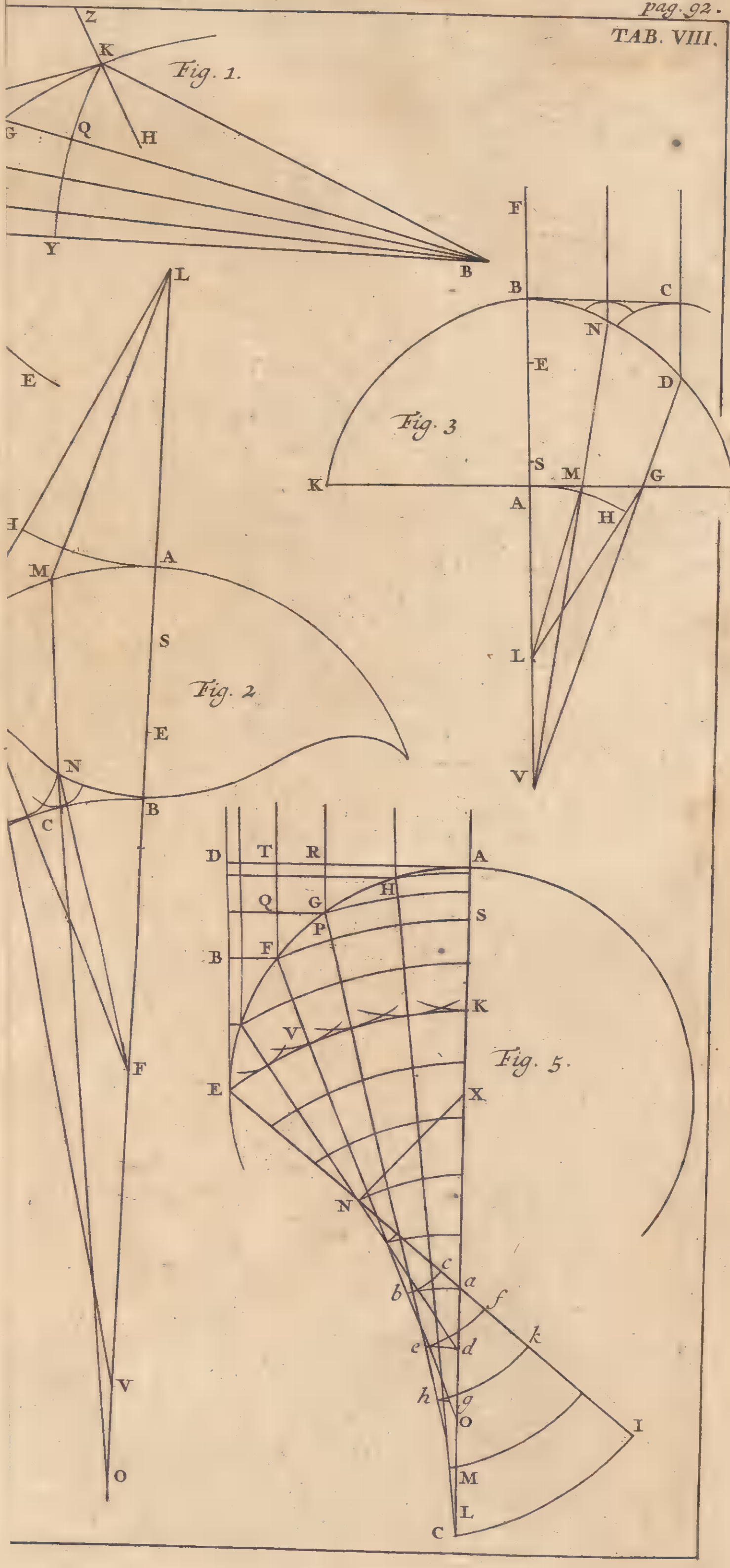
Et quemadmodum radii paralleli nil aliud ſint præter lineas perpendiculares undarum incidentium in ſuperficiem concavam, quæ ſunt parallelæ AD; liquebit eas, prout offendunt ſuperficiem AB, formare, reflectendo ſe, undas replicatas, quæ conſtant e duabus curvis eisque natis ex evolutionibus oppoſitis partium curvæ AFE, ſic, ſumptâ AD pro unda incidenti, ubi pars AG occurrit ſuperficiei AI, id eſt ubi pars G pervenerit in I; tunc curvæ HF, FI natæ ex evolutionibus curvarum FA, FE, quæ incipiunt ambæ ab F, facient ſimul propagationem partis AG. Ac paulo poſt, ubi pars AK offenderit ſuperficiem AM, parte K poſitâ in M, tunc curvæ LN, NM partis illius propagationem unà efficient. Atque adeo unda illa replicata procedet ſemper, donec extremitas N ad focum E pervenerit. Curvam AFE videre eſt in fumo vel in pulvere volanti, ubi ſpeculum concavum oppoſitum eſt ſoli; ſciendumque eſt illam nihil aliud eſſe, præter eam quæ deſcribitur a puncto E peripheriæ circuli EB, cum circumvolvitur circulus ille in alterum cujus ſemidiameter eſt ED, & centrum D; adeoque curva illa eſt ſpecies quædam Cycloidis, at cujus puncta Geometrice reperiri queunt.

Longitudo illius æqualis eſt præciſe $\frac{3}{4}$ diametri ſphæræ; quod reperitur demonſtraturque ope undarum illarum, fere ut curvæ ſuperioris menſura: quanquam poſſet etiam demonſtrari aliis methodis quas prætermitto,

quia hoc eſt extra propoſitum meum. Spatium AOBEFA, comprehenſum arcu quadrantis circuli, rectâ BE, & curvâ EFA, æquale eſt quartæ parti quadrantis circuli DAB.

FINIS.

TAB. VIII.



DISSERTATIO
DE
CAUSA GRAVITATIS,
AUCTORE
C. H. à Z.

PRÆFATIO.

NAtura vias ſequitur obſcuras ita atque intricatas, ubi corpora, quæ vocamus gravia, terram versùs præcipitat, ut quæcumque adhibeatur aut attentio aut induſtria, nihil inibi ſenſus detegere queant. Idipſum Philoſophos coegit cauſam admirabilis illius rei in corporibus ipſis ſolùm quærere, & tribuere illam qualitati alicui internæ & inhærenti, quæ corpora ad inferiora & verſus terræ centrum impelleret; aut neſcio cui appetitui partium ut toti ſe unirent. Quod erat non cauſas exponere, ſed ponere principia obſcura & intellecta à nemine. Ignoſci quidem poterat iis, qui ſæpenumero ſolutionibus ejusmodi contenti erant, non vero Democrito ejuſque diſcipulis, qui, cum omnia ex atomis ſolis explicare ſuſceperant, gravitatem ſolam adjunxere corporibus terreſtribus atomiſque ipſis; neque inquiſivere unde oriri poſſet Ex autoribus vero & inſtauratoribus hodiernis philoſophiæ, multi judicavere aliquid extra corpora ſtatuendum eſſe, ex quo oriantur attractiones & fugæ quas in iis animadvertimus; verum haud multo magis in cauſas penetrarunt quam antiquiores illi Phyſici. Alii enim confugerunt ad aëra aliquem ſubtilem & gravem, qui corpora premeret, cogeretque ita deſcendere; (illud vero eſt jam ſupponere gravitatem & ita repugnat legibus mechanicis, velle ut materia liquida & gravis deorſum mitteret corpora quibus circumfuſa eſt, ut è contrario ea deberet ſurſum mittere, poſito, quod ea à ſe ipſis nullum habeant pondus, quemadmodum lagenam inanem, ſi aquâ merſeris, aqua evehit) Alii vero ad ſpiritus, ſive emanationes immateriales: hoc enim nullam lucem rei afferebat, quandoquidem concipere non poſſumus, quomodo aliquid immateriale ſubſtantiam corpoream movere valeat.

Carteſius meliùs cognovit, quam alii ante eum omnes nihil prorſus in phyſica intelligi poſſe, niſi quæ referri queant ad prin-

principia quæ captum non excedant humanæ mentis; cujuſmodi ſunt ea quæ pendent, & à corporibus ſpectatis ſine qualitatibus ullis, & à motibus corporum. Sed quoniam maxima difficultas in eo erat, ut oſtenderet quo pacto tot res diverſæ ex his ſolis principiis ſequerentur, exitum minime proſperum habuit in plurimis argumentis quæ examinanda ſumpſerat, ac præcipue, meo quidem judicio, in iis quæ ad gravitatem pertinent. Id intelliget quiſque ex iis quæ quibuſdam locis notavi in illius ſcripta, ubi plura ſane obſervare potuiſſem. Attamen tentamina illius, infelicia licet, viam mihi aperuiſſe ad ea, quæ inveni, fateor.

Non autem hæc edo, quaſi omni dubio carerent omnique exceptione forent majora: Nimis difficile eſt, eò pervenire in hujuſmodi inquiſitionibus. Putem tamen quod, ſi præcipua, quâ nitor, hypotheſis vera non ſit, parum ſpei ſupererit, fore, ut vera reperiatur, ſi conſiſtamus intra limites veræ ſanæque Philoſophiæ.

Quæ autem hîc dico, quatenus ad ſolam cauſam gravitatis pertinent, non videbuntur nova iis qui tractatum Phyſicum Rohaltii legerint, quia inibi mea theoria deſcribitur fere tota. poſtquam philoſophus ille vidit meum experimentum circa aquam in modum turbinis circumactam, audivitque quomodo accommodarem ad gravitatem (ut ipſe ingenue fatetur) meam opinionem tam veriſimilem duxit ut voluerit ſequi. Verum cum meis inventis Carteſiana & ſua immiſcet, multaque hanc rem ſpectantia prætermittit, quorum & quædam ſcire non potuit, explicare volui, quomodo ipſe rem tractaverim.

Maxima pars hujuſce libelli ſcripta eſt cum Lutetiæ degerem, ac deſcripta in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, *ad eum uſque locum ubi loquor de alteratione quæ pendulis accidit à motu terræ. Reliquum poſt plures annos addidi, ac demum additionem ſcripſi, eâ occaſione quam in principio indicatam reperias.*

DE

DE GRAVITATIS CAUSA DISSERTATIO.

UT intellectu facilem reperiamus gravitatis cauſam, videndum eſt quî fieri poſſit, nullis aliis poſitis in rerum natura corporibus præter ea, quæ ex eadem materia conflata ſunt, & in quibus nulla conſideratur propenſio ad accedendum ad ſe mutuo, ſed tantum variæ magnitudines, figuræ, motioneſque; videndum, inquam, eſt quî fieri poſſit ut plurima tamen ex his corporibus actu tendant centrum idem versùs, ibique maneant immota: quod vulgare & præcipuum eſt ejus, quod gravitatem vocamus, phænomenon.

Simplicitas principiorum memoratorum pauca eligenda relinquit. Etenim unicuique patet ſtatim, non poſſe probabiliter tribui figuræ aut tenuitati corpuſculorum effectum hujusmodi; gravitas enim cum ſit niſus quidam inclinatiove ad motum, debet veriſimiliter oriri ab aliquo motu. Itaque reſtat tantum, ut inveſtigemus quo modo hic agere, & in quibus corporibus obtinere poſſit.

Si corpora ſpectemus abſque qualitate illa quam gravitatem nominamus, motum naturaliter habent aut rectum aut circularem. Prior iis convenit, ubi ſine impedimento ullo moventur, alter ubi circum aliquod centrum retinentur, aut circa proprium circumvolvuntur centrum. Novimus aliquomodo naturam motus recti, & leges, juxta quas corpora alia aliis occurrentia motum ſuum communicent. Sed quamdiu unicum illud genus motus conſideramus, reflexionesque quæ inde oriuntur inter partes

materiæ, nihil videmus, quod ea centrum aliquod verſus ire compellat. Neceſſario igitur deveniendum eſt ad proprietates motûs circularis, & videndum num qua ex iis nobis inſervire queat.

Non me latet, Carteſium in phyſica ſua conatum eſſe explicare gravitatem ex motu certæ cujuſdam materiæ quæ circa terram volvitur: neque parum eſt quod hæc ille excogitaverit primus. Sed ex iis, quæ in ſequentibus noto, apparebit, in quo ratio illius à mea diſcrepans ſit, ut & in quo deficere mihi videatur.

Conſideravit, pariter ac ego, corporum circulariter circumactorum niſum, ut à centro recedant, quâ de re non licet dubitare per experimenta. Enimvero rotando lapidem in funda, animadvertimus manum noſtram â lapide illo attrahi, idque eo validius, quo validius rotatur funda, adeo ut etiam funis rumpi poſſit. Eamdem illam proprietatem circularis motûs jam antea oſtendi, affigendo plura corpora gravia tabulæ rotundæ quæ in centro terebrata erat, & circa axem circumagebatur; & reperi determinationem virium illius & plurima theoremata ad eam pertinentia, quæ videre eſt ad calcem mei *de motu Pendulorum* libri. Dico, verbi gratiâ, quod ſi corpus aliquod in orbem actum in extremitates funis extenſi horizontaliter, eâ velocitate agatur, quam lapſu ſuo adipiſci poſſit, cadendo ab altitudine, quæ æqualis ſit dimidiæ parti funis, id eſt, quartæ parti diametri circumferentiæ quam deſcribit; funis ea vi trahetur quâ teneret corpus idem in aëre ſuſpenſum.

Niſus igitur ille corporum ut à centro recedant comitatur ſemper circularem motum; & quamvis effectus ejusmodi gravitati prorſus contrarius videatur, objectumque ſit Copernico, debere fieri, per vertiginem terræ intra 24 horas, ut domus homineſque in aërem præcipites dentur; probabo tamen niſum illum quem corpora in orbem circumacta habent ad fugiendum à centro in cauſa eſſe, cur

cur alia corpora verſus idem centrum concurrant.

Fingamus circa centrum D volvi materiam fluidam contentam ſpacio A B C, quo exire nequeat, propter alia circumjacentia corpora. Conſtat partes omnes fluidi illius conari recedere à centro D, ſed fruſtra, quia nimirum partes, quæ deberent in illarum locum ſuccedere, non minus conantur à centro illo fugere. Verum ſi qua eſſet pars illius materiæ, puta E, quæ motum circularem cœterarum non ſequeretur, aut quæ lentius moveretur quam aliæ, dico quod ea centrum verſus impelletur. Quandoquidem enim aut non conatur aut minus conatur quam partes propinquæ ab eo recedere, cedet actioni earum, quæ minus diſtant à centro D, & ita locum dabit cœteris accedendo ad illud, quoniam aliter locum ipſis cedere nequit. TAB. IX. Fig I.

Hoc autem unuſquiſque videre poteſt ex experimento, quod conſultò ad id feceram, neque indignum eſt obſervatu, quippe quod ante oculos gravitatis imaginem ſtatuat. Vas cylindricum, cujus diameter habebat 8 aut 10 pollices, cujus fundus candidus erat & lævis, & altitudo latitudine minor erat dimidiâ aut tertiâ parte, aquâ implevi, cui laccam ſigillarem minutam injeci, quæ cum aquâ paulo gravior eſſet, ſtatim deſcendit. Deinde vaſculum operui vitro, quod aquam ipſam immediate contingeret, cœmentoque circumlini curavi ut nihil inde effugeret. Quo facto vas tabulæ rotundæ de qua paulo ante dixi impoſui, eâque circumactâ, animadverti fruſta laccæ, quæ fundum tangebant, ſequebanturque melius motum vaſculi, quam aqua, circum ejus oras ſe diſpoſuiſſe, quia majorem vim centrifugam habebant quam aqua. Sed cum aliquamdiu menſam circumegiſſem, & aqua circularem motum magis magiſque adepta eſſet, ſubito tabulam ſtiti, eodemque momento lacca ad centrum acervatim confluxit; quæ res mihi effectum gravitatis videndum dedit. Hoc vero factum

eſt, quia aqua, non obſtante vaſculi quiete, motum ſuum circularem retinuerat, ac proinde quoque vim ſuam centrifugam; lacca vero motum omnem aut fere integrum amiſerat, quia contingebat fundum, qui immotus hærebat. Obſervavi quoque pulverem illum ad centrum per lineas ſpirales deſcendere, quia nimirum ab aqua adhuc paululum abripiebatur. Quod ſi autem hoc in vaſe collocetur aliquod corpus, ita ut motum aquæ ſequi nequeat, ſed ſolummodo ad centrum tendere, tum illuc rectâ deſcendet.
TAB IX. Fig. 1. Eſto, verbi gratiâ, L exiguus globus qui poſſit libere in fundo volvi, inter fila A A, B B, tertiumque K K paulò ad altitudinem majorem horizontaliter per medium vas extenſa. Statim atque vas quieverit, globus ille centrum D petet. Et obſervandum eſt hocce ultimo in experimento poſſe effici corpus L ejuſdem gravitatis ac aqua, & negotium meliustunc ſucceſſurum; adeo ut, abſque ullâ differentiâ gravitatis corporum, quæ ſunt in vaſe, motus ſolus hìc effectum gravitatis producat.

Experimentum, quod Carteſius in una ex epiſtolis ſuis, quæ typis editæ ſunt, proponit, à noſtro multum differt. Nam ille implet vas A B C minutis globis plumbeis, quibus miſcet lignum in exiguas partes diſciſſum aut aliam quamcumque plumbo leviorem materiam; iiſque omnibus ſimul circumactis, ait lignum verſus mediam partem vaſis impulſum iri; quod non difficile crediderim, modo continuo leviter percutiantur margines vaſis, ut facilius utraque materia ſe ſeparet. At hoc quod hic evenit minime idoneum eſt ad repræſentandum gravitatis effectum, cum inde concludi deberet, ea corpora graviora eſſe in quibus minus ineſt materiæ; quod contrarium eſt iis quæ in vera gravitate animadvertere eſt. Idem in aliâ epiſtolâ dicit injicienda eſſe in aquam turbinis in modum abreptam exigua fragmenta ligni, quæ inquit, verſus mediam aquam enatabunt. Quod ſi de ligno intelligat quod aquæ innatat, ut videtur facere, nulla erit convenientia;

ſi

ſi vero illud velit ad fundum præcipitari, idem erit experimentum ac illud, quod paulo ante propoſui. Lignumque circa centrum coibit: ſed id continget, quia, tacto fundo vaſis, motus circularis illius retardatus fuerit, de hac autem cauſa Carteſius tacuit.

Reperto itaque ſemel in natura effectu qui ſimilis ſit effectui gravitatis & cujus cauſa ſit perſpecta, ſupereſt ut videamus num poſſimus ponere, ſimile quid reſpectu Terræ contingere, id eſt, num detur motus materiæ qui corpora centrum verſus cogat deſcendere, ſimulque ad cœtera omnia gravitatis phænomena accommodatus ſit.

Poſito terram motu diurno rapi, aeraque & æthera qui illam cingunt, habere eumdem motum, nihil adhuc in eo eſt unde gravitas oriri queat; cum, ex experimento paulo ſuperius narrato, corpora terrena non deberent ſequi motum circularem materiæ cœleſtis, ſed reſpectu illius eſſe quaſi quieta, ſi ab illa verſus centrum impelli debuiſſent.

Quod ſi quis vellet materiam cœleſtem eandem in partem volvi cum terra, ſed multo velociùs; ſequeretur fore ut motus ille concitatus materiæ, quæ tota, continuo, & eandem partem verſus pergeret, ſentiretur, ſecumque abriperet corpora quæ in terra ſunt, quemadmodum aqua in experimento noſtro ſecum tulit laccam: quod tamen contingit minime. Sed præterea motus ille, circum axem terræ, non poſſet in omni caſu impellere corpora quæ eumdem motum non ſequuntur, niſi versùs eumdem axem; ac proinde corpora gravia non caderent perpendiculariter ad horizontem, ſed ad axem mundi: quod cum experientia pugnat.

Ut explicem igitur gravitatem, qualem ipſam concipio, ſumam, in ſpacio ſphærico, quod continet terram corporaque terræ circumflua, ad magnum intervallum uſque dari materiam quamdam fluidam quæ conſtet particulis tenuiſſimis, varieque & rapidiſſime in omnem partem

agitetur. Quæ cum egredi nequeat ſpatio illo, quod alia corpora ambiunt, dico quod motus ejus fieri debet partim circularis circa centrum; neque ita tamen ut tota verſùs eamdem partem volvatur: ſed tantum ut plerique ex variis ejus motibus fiant in ſuperficiebus ſphæricis circa centrum ejuſdem ſpacii, quod idcirco fit etiam centrum terræ.

Illius autem motus circularis cauſa eſt, quia materia aliquo ſpacio contenta movetur facilius eum in modum quam per motus rectos ſibi invicem contrarios, qui reflectendo ſe mutuo, (quia materia egredi nequit è ſpacio quo includitur) tandem in circulares mutantur.

Effectumque illum motûs obſervare licet ubi argentum per Cupellam probatur; globus enim plumbeus argento intermixtus, cum partes habeat violenter agitatas â calore, indeſinenter circum centrum ſuum volvitur, nunc hinc nunc illinc continuo locum ſuum mutans: idque ſummâ celeritate, ut oculus vix poſſit animadvertere. Idem contingit in gutta ſebi candelarum, quando, ſuſpenſa ad apicem emunctorii (*mouchettes*) admovetur candelæ, tunc enim velocitate quam maximâ circumvolvitur.

Fateor guttam illam ſæpius ſe totam circumagere in hanc vel illam partem, prout flamma candelæ eam tangit. Verum in materia mea cœleſti idem fieri non debet, quia ubi ſemel habet motum in quaſlibet partes, neceſſe eſt ut retineat ſemper, etſi mutatus ſit in ſphæricum; quandoquidem nulla eſt cauſa cur motus partis unius in partis alterius motum ita ageret, ut tota maſſa neceſſario in eamdem partem volveretur. Quin immo è contrario lex naturæ, de qua alibi dixi, ejusmodi eſt, in mutuo occurſu corporum, quæ diverſimode agitata ſunt, ut eamdem ſemper quantitatem motus eamdem partem verſus retineant.

Etiamſi autem motus illi circulares, in tot tamque varias partes intra idem ſpacium, videantur debere ſibi invicem

vicem contrariari, & ſe mutuo ſæpe impedire; tamen, per mobilitatem magnam materiæ & exiguitatem partium illius quam nequidem imaginandi vi aſſequi poſſumus, fit ut varias agitationes illas facile patiatur. Ubi turbata eſt aqua in phiala vitrea, videre eſt quot & quam diverſis modis partes ejus agitari valeant. Cogitet unuſquiſque liquiditatem materiæ cœleſtis longe majorem liquiditate aquæ, quæ cum conſtet partibus gravibus aliiſque in alias congeſtis, ideo ad motum iners ſit. Contra vero materia cœleſtis, quippe quæ libere moveatur quoquo verſus, facillime accipit varias impreſſiones, à variis occurſibus ſuarum partium, vel ab impulſione aliorum corporum vel leviſſimâ; quæ ſi ita non eſſent, aer non adeo facile, ac jam fit, motæ manui cederet. Itaque conſiderandum eſt motus circulares materiæ illius fluidæ, circa terram, ſæpiſſime aut interrumpi aut mutari in alios; ſed tamen multo plures perſtare quam deflectere à via ſua: quod ad propoſitum noſtrum ſatis eſt.

His poſitis haud difficile eſt explicare quî motus ille gravitatem producat. Si enim materiam inter fluidam, quæ dicto ſpatio volutatur, partes ſint multo craſſiores quam eæ ex quibus conſtat, aut corpora facta ex pluribus particulis ſimul conjunctis & ſi illa corpora non ſequantur rapidum dictæ materiæ motum, neceſſario impellentur verſus centrum motus, ibique, ſi ſufficiens adſit copia, formabunt globum terrenum, poſito illum jam non exiſtere. Hoc autem proficiſcitur eâdem cauſa, quæ facit, in experimento noſtro, ut lacca ſigillaris ad centrum vaſis coeat. In hoc igitur poſita eſt probabiliter gravitas corporum: quæ dici poteſt nihil eſſe præter conatum materiæ fluidæ, quæ in orbem volvitur circum telluris centrum quoquo verſus, ut à centro illo fugiat, eòque adigat corpora quæ motum eum non ſequuntur.

Ratio vero, cur corpora gravia, quæ videmus deſcendere, non ſequantur motum ſphæricum materiæ fluidæ,

ſatis

ſatis clara eſt, cum enim ſit motus ejus modi quoquo verſus, impulſiones quas corpus aliquod inde accipit, tam ſubito aliæ alias excipiunt, ut minus intercedat temporis quam neceſſe eſt quô motum ſenſibilem acquirat. Quandoquidem autem hæc ratio ſola non ſufficit ad impediendum quominus corpora tenuiſſima eorum, quæ ſub aſpectum cadere poſſint, puta pulverem in aëre volantem, hinc & inde pellantur rapiditate motus illius; ſciendum eſt exigua illa corpora non innatare ſoli materiæ liquidæ quæ gravitatem efficit: ſed præter hanc eſſe alias materias easque conſtantes è craſſioribus particulis, quæ maximam ſpatii partem occupant quod nos ambit imo & cœlum ipſum. Particulæ autem illæ, licet variis modis agitatæ & inter ſe reflexæ, tamen non ſequuntur motum ſubitum materiæ liquidæ, quoniam, cum ſint aut contiguæ aut vicinæ, nimia magna quantitas deberet ſimul moveri. Notum eſt circa terram dari primò particulas aëris, quas ſtatim probaturi ſumus craſſiores eſſe particulis materiæ noſtræ fluidæ. Dico inſuper aliam eſſe materiam cujus particulæ ſunt aëre tenuiores & materiâ fluidâ craſſiores, quod confirmatur exprimento noſtro, quod machinæ pneumaticæ ope fit. Ilico enim obſervare licet effectum materiæ alicujus inviſibilis, quæ gravitat, ubi nullus aer eſt, quoniam aquam tenet ſuſpenſam in tubo vitreo, cujus pars aperta in aliud vas aquæ plenum immerſa eſt; ibidemque facit fluere aquam Siphonis recurvi, quemadmodum in aëre fieret: modo, his in experimentis, aqua purgata fuerit aëre, quod fit, ſi eam paucis horis in vacuo colloces. Inde apparet primùm particulas corporis illius gravis inviſibiliſque multo minores eſſe particulis aëris, ut pote quæ permeant vitrum, quod excludit aëra, ibique gravitatem ſuam demonſtrent; ac deinde patet particulas eaſdem debere tamen craſſiores eſſe materià fluidâ, quæ gravitatis cauſa eſt, ut corpus ex illis coaleſcens non ſequatur hujus motum, quod ſi præſtaret,

ret, non eſſet grave. Poteſt fieri ut nos circumfluant plurima quoque alia materiæ genera, eaque alia aliis tenuiora, quibus tamen omnibus materia fluida, quæ gravitatis cauſa eſt, tenuior ſit; eaque omnia igitur obſtabunt, quo minus pulveris moti grana abripiantur motu illius materiæ, cum hæc eundem motum non ſequantur.

Neque eſt ut pro commentitiis habeantur varii illi gradus exiguorum corpuſculorum, eorumdemque admirabilis tenuitas. Etiamſi enim quædam in nobis ſit propenſio ad credendum corpora, quæ vix viſibilia ſunt, jam fere eſſe tam tenuia quam fieri poſſunt, ratio tamen nos docet eandem proportionem quam mons habet ad granum arenæ, granum illud poſſe habere ad alterum granum, iſtudque ad tertium aliquod, & ſic quam diu velis.

Summa vero tenuitas partium materiæ noſtræ fluidæ quoque ſummè neceſſaria eſt ad explicandum inſigne gravitatis phænomenon, cur ſcilicet corpora gravia incluſa vaſe aliquo ex vitro, aut metallo, aut alia quavis materiâ, ſemper æque gravitent. Quamobrem neceſſe eſt materia noſtra fluida liberrime pervadat corpora omnia vel ſolidiſſima, & eàdem facilitate quâ aëra ipſum.

Atque hoc confirmatur ex eo quod, ſi illa permeandi facilitate deſtitueretur, lagena vitrea æque gravis eſſet ac corpus ſolidum ex vitro ejuſdem magnitudinis; corporaque omnia ſolida ejuſdem voluminis æque gravia eſſent: quandoquidem, ex theoria noſtra, gravitas cujuſque corporis determinata eſt ex quantitate materiæ fluidæ, quæ debet in ejus locum cedere.

Materia igitur illa facile tranſit per interſtitia particularum, è quibus coaleſcunt corpora, non vero per particulas ipſas; & quod varia corpora varie gravia ſint, ut v. g. lapides, metalla &c. inde fit, quia, quæ graviora ſunt, plures ejuſmodi particulas continent, non numero, ſed volumine: in earum enim locum materia

ria fluida tantum cedere poteſt. Quoniam autem alicui dubium eſſe poſſet, utrum particulæ illæ ſint prorſus ſolidæ, quippe quæ à materia noſtra penetrari nequeunt; (Si enim ſolidæ non ſint, aut etiam ſi ſint vacuæ, deberent idem efficere, ex ea ratione quam modo adduxi) demonſtrabo eas ſolidas prorſus eſſe, adeoque gravitatem corporum præciſe ſequi proportionem materiæ, ex quâ componuntur.

In quem finem id obſervatum volo, quod contingit in colliſu duorum corporum quæ ſibi occurrunt horizontali motu. Certum eſt, reſiſtentiam, quâ corpora motui horrizontali obnituntur, ut globus marmoreus vel plumbeus lævi tabulæ impoſitus, non oriri à pondere eorum terram verſus, quandoquidem motus lateralis non eos à terra removet, adeoque nullatenus contrariatur actioni gravitatis, quæ deorſum illa impellit.

Sola ergo quantitas materiæ in unum compactæ, quam unumquodque corpus continet, cauſa eſt hujus reſiſtentiæ; adeoque ſi 2 corpora æqualem quantitatem materiæ contineant, æqualiter reflectentur, vel ambo immota conſiſtent, prout aut dura aut mollia fuerint. Sed experientia docet, quoties duo corpora aut æqualiter reflectuntur aut curſum ſiſtunt, poſtquam æquali celeritate ſibi occurrerint, corpora illa æque gravia eſſe. Ergo ſequitur, quod ea quæ æqualem continent materiæ quantitatem æqualis ſunt gravitatis: quod demonſtrandum erat.

Carteſius hac de re longe alia exiſtimabat, ut & de meatu libero materiæ quæ gravitatis cauſa eſt, per corpora, in quæ agit. Quod enim hocce poſterius ſpectat, putabat illam materiam impediri, occurſu terræ, quominus pergeret moveri rectâ lineâ; atque ea de cauſa à terra, quantum poſſet, recedere. Qua in re mihi videtur non attendiſſe ſatis ad proprietatem illam gravitatis de quâ modo diſſerui; ſi enim motus materiæ illius impeditus ſit à terra, non amplius libere pervadet metalla neque vi-

vitrum. Unde ſequeretur plumbum incluſum phialâ amiſſurum eſſe pondus ſuum reſpectu phialæ illius, aut ſaltem pondus illud diminutum iri. Præterea, ſi corpus grave in puteo aut in foveâ vel profundo cuniculo collocaretur, multum de gravitate ſua deberet perdere. Sed quantum ſcio, aliquid deperdi experientia non oſtendit.

Quod ad alterum attinet, contendit Carteſius, etiamſi maſſa auri eſſet vigeſies gravior quam portio aliqua aquæ ejuſdem magnitudinis, aurum tamen tantummodò habere quater aut quinquies tantum materiæ quantum aqua: primò, quia ab utraque maſſa deducendum eſt (dicere potius debuerat adjiciendum) pondus æquale propter aërem in quo ponderantur; ac dein, quia aqua, & cæteri liquores, aliquam levitatem habent reſpectu corporum durorum, quoniam nempe priorum partes perpetuo agitantur motu.

Sed poſſumus reſpondere priori argumento, cum gravitas aëris, qui nos circumdat, ſit ad gravitatem aquæ tantum ut 1 ad 800, id eſſe parum ponderis, quod æqualiter addendum erit ponderi, tum aëris tum aquæ, reperto bilancis ope. Altera vero ratio, ſi bona eſſet, eadem portio aquæ multo gravior eſſet congelata quam liquida, metallique maſſa gravior quam metallum idem liquefactum: quod adverſatur experientiæ. Præterquam quod non videam quî conceperit, agitationem partium corporum liquidorum iis levitatem conciliare, id eſt conatum ad recedendum à centro, cum ad id deſideraretur motum illum fieri in orbem circa terræ centrum, aut validiorem eſſe ſuperiora verſus quam inferiora: quod numquam dixit, quippe qui è contrario affirmaverit partes liquorum moveri quoquo verſùs indiſcriminatim.

Neque magis attendiſſe videtur quàm velox debeat eſſe materia fluida, ut corpora tam gravia evadant quam pleraque reperiuntur; ſecus enim comperiſſet motum quem habent aut aquæ aut cæterorum liquorum particulæ

nullo modo comparari poſſe cum motu materiæ illius quæ gravitatis cauſa eſt.

Ego vero diligenter indagavi gradum velocitatis illius, ita ut putem propemodum me aſſecutum eſſe quanta debeat eſſe. Cum autem plures inde effectus pendere poſſint, non ſupervacaneum erit oſtendiſſe quid calculus meus produxerit & in quo nitatur. Eſto igitur eadem figura quæ prius. Cum gravitas corporis E ſit perfecte æqualis niſui quo portio æqualis materiæ fluidæ contendet recedere à centro D, aut potius cum ſint unum & idem; oportet libram plumbi, verbi gratia, tantum gravitare terram verſus, quantum maſſa materiæ fluidæ æque magna ac maſſa plumbi (intelligo magnitudinem partium ſolidarum) gravitat ſurſum verſus ad recedendum à centro, vi motûs ſui circularis. Materia enim tum plumbea tum fluida non differunt in hypotheſi noſtra. Ergo poſſumus affirmare, quod libra plumbi tantum gravitat deorſum, quantum gravitaret ſurſum, ſi ad eandem ſemper diſtantiam à centro, tam celeriter circumageretur quam materia fluida. Sed reperio, ex theoria mea de circulari motu, quæ plane cum experientia convenit, corpus in circulo revolutum, ſi quis velit conatum illius ad recedendum à centro æqualem eſſe conatui gravitatis ſimplicis; reperio, inquam, oportere ut corpus illud ſingulas revolutiones conficiat intra idem tempus, quo pendulum, æque longum ac ſemidiameter circuli illius, duas vibrationes conficit. Neceſſe igitur eſt videamus, quanto temporis ſpacio pendulum æque longum ac ſemidiameter terræ duas illas vibrationes conficere queat. Quæ res facilis eſt ope proprietatis notæ pendulorum, & longitudinis illius, quod ſingulis minutis ſecundis vibrationem peragit, eſtque 3 pedum $8\frac{1}{2}$ linearum, menſuræ Pariſienſis. Reperio igitur requiri ad duas illas vibrationes horam unam cum $24\frac{1}{2}$ minutis, poſitâ, ex accurata dimenſione Picarti, ſemidiametro terræ longâ 19 615 800 pedes ejuſdem men-

TAB. IX. Fig. 1.

menſuræ. Ergo velocitas materiæ fluidæ, circa ſuperficiem telluris, debet æqualis eſſe velocitati corporis quod circum terram volvetur intra idem ſpatium horæ unius cum $24\frac{1}{2}$ min. Quæ celeritas, propemodum, eſt decies & ſepties major quam celeritas puncti alicujus ſub Æquatore; quod eamdem viam conficit, reſpectu ſtellarum fixarum, ut debet hîc accipi, intra 23 horas cum 56 minutis: ut liquet ex proportione inter tempus illud, & ſpatium horæ unius cum $24\frac{1}{2}$ minutis, quæ eſt fere ut 17 ad 1.

Non me latet, rapiditatem tantam videri poſſe incredibilem, ſi quis ipſam comparet cum motibus quos hic videmus. Id tamen difficultatem parere non debet, & ſane reſpectu ſphæræ aut magnitudinis terræ non valde mira illa videtur. Si enim v. g. ex globis, quos in uſum Geographiæ conſtruunt, terreſtrem conſideres, in eoque fingas tibi punctum quod unum tantum gradum intra 14 minuta ſecunda vel arteriarum pulſus emetiatur, quæ eſt memorata materiæ velocitas; motus hic valde mediocris tibi videbitur aut etiam lentus.

Cæterùm plures ſunt effectus naturales, qui videntur poſtulare materiam violento motu agitatam, & per poros corporum facile penetrantem. Hujuſmodi eſt vis pulveris pyrii, qui, accenſus motum ſuum concitatum neque à ſe habet neque ab eo qui ignem admovet, conſequenter neceſſe eſt accipiat ab aliqua materia quæ motu eo gaudet, & quæ, ubique præſens, ſemper agat, ubi omnia apte convenienterque diſpoſita repperit. Ejuſmodi quoque eſt, meo judicio, vis elateris, tum in chalybe aliiſque corporibus ſolidis, tum in aëre; quibus & addi poteſt vis in muſculis animalium, quam commode explicabis, per fermentationem quamdam ſanguinis ortam è ſucco nervorum. Sed unde veniet fermentationis iſtius vis, niſi ab aliquo motu externo? Nec melius concipies fortem illam gelu vim, niſi recurras ad impulſionem violentam materiæ alicujus, quæ aut extendat glaciem, intro-

troducendo nimirum in eam alias particulas, aut bullas quæ in ipſa formantur, augendo copiam aëris in his contenti. Hoc autem tantâ violentiâ fit, ut ſclopeta, quibus aqua incluſa fuerat, diffindi viderim.

Ut autem ad gravitatem revertar, ſumma celeritas materiæ, quæ ejus cauſa eſt, docet nos cur corpora gravia cadendo motum ſuum accelerent, etiam cum jam acquiſiverint rapidiſſimum. Etenim materia fluida cum multo celerior ſit quam globus tormenti bellici, qui in aëre recidit, in quem perpendiculariter emiſſus fuerat; globus ille, ad finem lapſus ſui, eodem fere modo ab illa materia premitur, adeoque celeritas illius inde magis magiſque creſcit. E contrario autem, ſi materia motum tantum haberet mediocrem, eo accepto, globus non acceleraret caſum ſuum; quia aliter deberet eandem illam impellere materiam ita, ut in locum globi ſuccederet majori celeritate quam ipſa habet.

Hinc denique hauriri poteſt ratio principii, quod aſſumſit Galilæus ad demonſtrandam proportionem accelerationis corporum cadentium, ſcilicet velocitatem eorum æqualiter augeri temporibus æqualibus. Cum enim corpora ſucceſſive pellantur à materia quæ nititur in eorum locum ſuccedere & ſicut dictum eſt modo, indeſinenter eâdemque vi premantur; ſaltem in caſibus, circa quos experimenta inſtituere poſſumus; ſequitur neceſſario augmentum velocitatum proportionale eſſe augmento temporum.

Explicui itaque, ex hypotheſi quæ nihil impoſſibile involvit, cur corpora terreſtria ad centrum tendant; cur actio gravitatis nequeat impediri interpoſitu ullius corporis noti: cur partes interiores cujuſlibet corporis ad gravitatem illius univerſæ conferant; ac demum cur corpora cadentia ſemper ac ſemper fiant velociora idque in proportione temporum. Nec plures hactenus obſervatæ erant gravitatis proprietates.

Su-

Supereſt adhuc alia, quæ haud minus certa exiſtimata fuit, nempe corpora æque gravia eſſe ubicumque terrarum, quod cum aliter obtinere nuper obſervatum ſit, operæ pretium eſt inquirere unde id oriatur, & quid inde ſequi debeat.

In Caiana, regione Americæ diſtanti tantum 4 aut 5 gradus ab Æquatore, dicitur inventum eſſe, quod Pendulum ſingulis minutis ſecundis vibrationem peragens, brevius ſit quam Lutetiis lineâ $1\frac{1}{4}$; unde ſequitur, ſumptis pendulis ejuſdem longitudinis, pendulum Caianæ paulo tardius moveri quam Lutetiis. Quod ſi pro vero habeatur ſemel, dubium eſſe nemini poteſt quin hoc manifeſte arguat lentius ibi deſcendere corpora gravia quam in Gallia. Cum autem diverſitas illa tribui non poſſit tenuitati aëris, quæ major eſt in zona torrida, quandoquidem effectus plane contrarius inde oriri deberet; reſtat, meo quidem judicio, ut dicatur idem corpus levius eſſe ſub Æquatore quam in climatibus inde remotis. Statim atque novum illud phænomenon accepimus, agnovi cauſam oriri poſſe à motu diurno terræ, qui cum major ſit in unaquâque regione, prout Æquatori eſt magis vicina, debet producere conatum proportionatum ad rejicienda corpora à centro, adeoque partem aliquam de gravitate detrahendam. Quota autem pars ſit in corporibus ſub Æquatore locatis, non difficile eſt æſtimare ex iis quæ explicuimus ſupra, cum enim invenerimus, ſi terra decies & ſepties citius quam nunc volveretur, vim centrifugam ſub Æquatore fore æqualem gravitati corporis; neceſſe eſt, ut motus diurnus terræ prout nunc eſt, detrahat de gravitate partem, quæ ſit ad gravitatem integram ut 1 ad quadratum 17, ſcilicet $\frac{1}{289}$: quia nimirum vires, quibus corpora à centro circa quod volvuntur, recedunt, ſunt inter ſe ut quadrata velocitatum eorundem, ex meo theoremate tertio *De Vi centrifuga.* Quandoquidem igitur ſingulum quodque corpus, ſubter Æquatorem, ſit levius $\frac{1}{289}$ quam eſſet, ſi terra circa axem

axem ſuum non volveretur; ſequitur, ex legibus mechanicis, longitudinem penduli debere ibi minorem fieri $\frac{1}{289}$, ut viam ſuam intra idem tempus conficiat, ac faceret terrâ immobili.

Sed ut detegamus, quotâ parte minui debeat Pendulum quod è Gallia ſub lineam æquinoctialem fertur, conſiderandum eſt, jam illud brevius eſſe Lutetiis quam ſi terra immota eſſet; quia nimirum, motus diurnus ſub illo parallelo facit etiam ſuum conatum, ut repellat corpora à centro terræ. Conatus tamen ille minor eſt quam ſub æquatore, tum quia circulus motûs minor eſt, tum quia non pellit corpora rectâ ſurſum, ſed tantum perpendiculariter ad Axem terræ, ſicut hacce in figura videre eſt. TAB. IX. Fig. 2. Circulus P A Q E repræſentat terram ſectam à plano tranſeunte per utrumque Polum P, Q. Centrum eſt C. circulus Æquinoctialis E C A: parallelus Pariſienſis D O N. Pariſii in D: K H repræſentat funem ſuſtinentem maſſam plumbi H, quod recedit à perpendiculari K D C, quia rejicitur, per motum circularem, ſecundum lineam O D M, quam pono tranſire per pondus H.

Nunc ſi lubeat ſcire qui debeat eſſe ſitus fili K H, & quanto minus plumbum H ſic gravitet, quam ſi penderet perpendiculariter ſecundum K D. conſiderare oportet punctum H ac ſi trahatur à tribus filis H C, H M, H K; è quibus H C centrum terræ verſus trahit toto pondere quod haberet plumbum, ſi terra immota ſtaret: H M trahit juxta propriam directionem, cum ea vi quam dat motus terræ in circulo D N; & H K trahitur aut trahit cum ea vi quæ quæritur. Productâ igitur C H, & ductâ K L parallela D M, notum eſt tria latera trianguli H L K proportionalia eſſe potentiis quæ trahunt punctum H; & latus L H reſpondere ei quæ trahit per H C, latus K L ei quæ per H M, ac latus H K ei quæ trahit aut ſuſtinet plumbum per filum K H. Sed triangulum K D H cenſetur habere latera ſua æqualia lateribus trianguli H L K, quia

quia C H L eſt quaſi parallela C D K. Ergo latera trianguli K D H reſpondent iiſdem potentiis, ſcilicet latus K D gravitati abſolutæ ponderis H, quam haberet, ſi terra ſtaret immobilis: D H potentiæ quam illi tribuit motus diurnus: & K H gravitati quæ quæritur. Sed triangulum illud K H D datur. Quandoquidem enim novimus conatum circularem, ſub Æquatore in E, eſſe $\frac{1}{289}$ ponderis abſoluti; & conatus ille eſt ad conatum in D aut in H, ut E C ad D O, quæ ſunt in ratione data; ſciemus igitur etiam, quæ pars ponderis abſoluti ſit conatus centrifugus in D aut in H: ſive ratio D K ad D H nota erit, quippe quæ conſtet ratione 289 ad 1. & ratione E C ad D O. Sed angulus quoque H D K eſt notus, utpote qui æqualis ſit angulo latitudinis Pariſiorum, nempe 48. graduum cum 51. minutis. Ergo nota etiam erit ratio D K ad K H, quæ ratio eſt gravitatis abſolutæ corporum ad gravitatem quam habent Pariſiis, ut & longitudinis penduli in terra immota ad longitudinem quam habere debet ſub hoc parallelo, ſecundum ea quæ ſuperius dicta ſunt. Cum vero longitudo penduli pulſantis ſecunda ſit data Pariſiis, nota erit etiam ea quam in terra immobili haberet, & quænam ſit utriuſque differentia, & quanto differentia illa minor ſit quam illa $\frac{1}{289}$ quam ſub Æquatore repereramus.

Ut igitur hoc facile ſupputemus & ſine triangulorum calculo, ſciendum eſt, id quod probabimus ſtatim, ſcilicet, ut quadratum radii E C eſt ad quadratum D O, ſinus complementi latitudinis Pariſiorum, ita eſt $\frac{1}{289}$ differentia aut imminutio penduli ſub Æquatore, ad differentiam aut imminutionem penduli Pariſiis. Quam inde colligo eſſe $\frac{1}{668}$ longitudinis penduli in terra immota, vel ſub Polo. Quandoquidem autem Pendulum ſecunda indicans Pariſiis eſt 3. pedum & $8\frac{1}{2}$ linearum, ſequitur longitudinem penduli in terra immobili vel ſub Polo eſſe 3 pedum & $9\frac{1}{6}$ linearum; unde, demendo partem $\frac{1}{289}$, quæ

valet $1\frac{1}{2}$ lineam, habebitur longitudo Penduli ſecunda indicantis, ſub Æquatore, 3 nempe pedes cum $7\frac{2}{3}$ lineis. Pendulum itaque illud brevius erit quam Pariſiis $\frac{5}{6}$ lineæ, quod paulo minus eſt quàm quod repererat Richerius in Caiana, lineam nempe unam cum quadranti.

Verum non poſſumus omnino confidere primis illis obſervationibus, quarum nulla deſcribitur circumſtantia, multoque adhuc minus, ut puto, iis quæ dicuntur factæ eſſe in Gadalupa, ubi Penduli Pariſini imminutio reperta fuit 2 linearum. Spero fore diuturnitate temporis ut certiores fiamus exactè de variis illis longitudinibus, cum ſub Æquatore tum in aliis climatibus; & certe res digna eſt quæ ſummâ diligentiâ indagetur, etiamſi nullum alium inde colligeremus fructum, niſi ut, ex theoria illa, corrigi poſſent motus horologiorum pendulorum & accommodari ad metiendas longitudines in Mari. Horologium enim v. g. quod ſemel Pariſiis bene conſtitutum fuiſſet, ſi transferretur ſub Æquatorem, retardaretur circiter minuto uno cum 5 ſecundis intra 24 horas, ut facile eſt ſupputare ex ſuperiori ratiocinio, & ſic proportionaliter, pro ſingulis diverſis gradibus latitudinis. Ubi reperietur retardationes illas ſequi inter ſe eamdem ſatis præciſe proportionem quam diminutiones penduli; & maximam retardationem, qualis eſſet horologii ſub Æquatore quod fuiſſet conſtitutum ſub Polo, futuram ſingulo quoque die fere $2\frac{1}{2}$ minutis. Supputatis igitur hujuſmodi tabulis corrigi poſſet harum ope motus horologiorum & iis uti poſſemus non minus certe quam ſi motus ille eſſet ubique æqualis.

Nunc ut demonſtremus quod paulo ante poſuimus, ubi indagavimus ſcilicet quæ ſit diminutio Penduli Pariſiis; (res autem ubicumque eadem eſt) cum nota eſt quantitas diminutionis ſub Æquatore, ſumatur in eadem figura K F æqualis K H, & ſit H G parallela axi P Q. Demonſtratum eſt H D eſſe ad D K, ut conatum centrifugum,

ſugum, in D aut H, ad pondus abſolutum in terra immobili. Sed ut E C aut C D ad D O, id eſt ut G D ad H D, ita eſt conatus centrifugus in E, ſub Æquatore, ad conatum in D. Ergo ut G D ad D K, ita erit conatus centrifugus in E, ad pondus abſolutum in terra immota. Et linea G D erit diminutio Penduli quæ requiritur ſub Æquatore, ex ſupradictis. Sed F D eſt diminutio Pariſiis facta, & G D eſt ad D F ut quadratum G D ad quadratum D H; quia propter exiguum angulum D K H, H F ſpectari poteſt tamquam perpendicularis ad G D. Ergo diminutio ſub Æquatore facta ad eam quæ Pariſiis fit, eſt ut quadratum G D ad quadratum D H; id eſt, ut quadratum C D aut E C ad quadratum D O; quod erat demonſtrandum.

Supereſt ut, in eadem figura, conſideremus angulum H K D, qui notat quanto plumbum K H quietum declinet à perpendiculari K D. Ac reperio angulum illum ſub parallelo Pariſino habere 5 minuta cum 54 ſecundis, & paulo majorem eſſe debere ſub 45 gradu latitudinis.

Declinatio illa longe contraria eſt ei opinioni quæ ſemper pro vera habita fuerat, nempe funem, è quo pendet plumbum, rectâ verſus terræ centrum tendere. Angulus autem ille, cum ſit decima pars gradûs unius, ejus magnitudinis erat, ut facile deberet animadverti tum per obſervationes Aſtronomicas, tum per eas, quæ inſtituuntur cum libellâ. Ut enim de poſterioribus hiſce tantum loquar, nonne deberet, ſeptentrionem verſus, linea libellæ ſub horizonte inclinari? Quod tamen neque obſervatum eſt unquam, neque revera fit. Cujus rationem ut afferam, quæ ipſa pro paradoxo haberi poteſt, dico terram non eſſe plane ſphæricam, ſed figuram habere ſphæræ versùs utrumque polum inclinatæ, qualem fere faceret Ellipſis circa minorem axem ſuum circumacta. Id oritur à motu diurno terræ, ſequiturque neceſſario è declinatione plumbi, quam dixi. Quoniam,

cum deſcenſus corporum gravium parallelus ſit lineæ ſuſpenſionis illius, neceſſe eſt ſuperficiem uniuſcujuſque liquoris ita ſe componere, ut lineam illam perpendicularem habeat, ſecus enim deſcendere poſſet amplius. Proinde ſuperficies maris eſt ejuſmodi ut filum ſuſpenſum ubique perpendiculare habeat ſupra ſe ſe. Unde ſequitur lineam libellæ, eam nempe quæ filum plumbi ſuſpenſi ſecat ad angulos rectos, debere horizontem oſtendere, prout facit; cum ſolâ altitudine loci, ubi ſita eſt libella, fiat ut paulo altius viſus dirigatur. Sed cum terræ latera ſint vulgo elevata eodemque fere modo, reſpectu maris; ſequitur, quod totum illud coaleſcens ex terris & maribus neceſſario reductum ſit ad figuram illam ſphæroideam, quam ſuperficies maris neceſſario accipit. Credibile autem eſt terram in figuram ejuſmodi abiiſſe, ubi partes ejus collectæ ſunt vi gravitatis, quippe hæ etiam tum habebant motum ſuum circularem 24. horarum.

ADDITAMENTUM.

PAulo poſtquam ſuperiora ſcripſeram, examinato diario navigationis, ad Promontorium Bonæ ſpei, ſuſceptæ juſſu Directorum Societatis Indiarum Orientalium, cum horologiis noſtris pendulis; ac perlecto eruditiſſimo Newtoni Opere inſcripto, *Philoſophiæ naturalis principia Mathematica*; in utroque plura reperi quæ extendendo huic tractatui materiem mihi ſuppeditabant. Ac primùm quod attinet ad varias longitudines pendulorum in variis climatibus, de quibus etiam egit; exiſtimo me inveniſſe, horologiorum illorum ope, non modo confirmationem evidentem effectûs iſtius per motum terræ, ſed etiam menſuræ longitudinis illorum, quæ plane convenit cum eo, quem mox propoſui, calculo. Correctis enim ex calculo illo locorum longitudinibus, quas emenſi fuerant horologiorum ope, redeundo è promontorio Bonæ ſpei ad Texe-

Texelium uſque in Hollandia (iis enim in abitu uſi non fuerant) comperi viam navis multo melius in Tabula eſſe deſcriptam quam fuerat prius ſine hac correctione; adeo ut, cum in portum illum appuliſſent, vix erraſſent 5 aut ſex leucis in longitudine ita emendata. Poſito longitudinem Promontorii bene deſcriptam fuiſſe à P P. Jeſuitis, cum hoc prætere navigarunt anno 1685 euntes ad Siam, eamque eſſe 18 gradibus magis ad orientem quam Pariſinam; quod etiam aliunde ſcio à vero non longe abſcedere. Res tota ſingulatim expoſita eſt in relatione de hoc itinere Pendulorum dictis Dominis Directoribus factâ; iiſdemque, relatione meâ viſâ, & examinandâ datâ pluribus viris doctis, placuit mandare, ut alterum fieret experimentum, quò ita per plura experimenta certi eſſemus de præſtantiâ inventi. Qui futurus ſit autem itineris illius exitus, & imprimis in eo quod pertinet ad variationem pendulorum, videbimus brevi; certumque eſt eam poſſe certius cognoſci horologiorum illorum ope, per accelerationem nempe & retardationem, quas in iis obſervare eſt, quam ſi metiaris longitudinem penduli quod ſecunda indicat, in diverſis regionibus. Interea, cum in tentamine, de quo dixi, experientia tam bene cum ratiociniis meis convenerit, ſatis iis fido ad pergendum in hac ſpeculatione, quæſiturus primùm, quænam ſit forma terræ, quandoquidem, ut dixi, non eſt ſphærica.

Juvabit ad id eam ſpectaſſe tanquam aquâ penitus inundatam, aut potius, ac ſi tota ejus maſſa in aquam reſoluta foret; apparet, ex dictis, ſuperficiem illius debere eſſe ejuſmodi, ut ubivis filum è quo plumbum pendet, illi occurrat ad angulos rectos, habitâ ratione gravitatis ſimul conatus centrifugi, qui filum avertit à directione ſua verſus centrum. Si enim filum non occurreret ſuperficiei ad angulos rectos, non poſſet hæc manere in eodem ſitu.

Poſitis igitur iiſdem ac in ultima figura Tractatus ſuperioris, ut & quæ ibidem explicita ſunt, ſed forma terræ

 pau-

TAB IX. Fig. 3. paululum minutâ & verſus Polos complanatâ, ita ut axis P Q brevior ſit diametro E A; ducatur B D S R parallela K H, ſecans E A, P Q in S & in R. Cum filum K H ſuſtinens plumbum, aut potius illi parallela B D, occurrere debeat ſuperficiei maris ad angulos rectos; filumque illud ita pendeat ut K D ſit ad D H, aut D C ad C S, velut gravitas abſoluta ad vim centrifugam in D: quæ ratio componitur ex ratione gravitatis abſoluta ad vim centrifugam in E, quæ eſt ut 289 ad 1. & ratione vis illius ad vim centrifugam in D, quæ eſt ut E C ad D O; apparet naturam lineæ curvæ E D P determinatam eſſe per proprietatem perpendicularis ſuæ, ut D R; id eſt, ductâ unâ ejuſmodi perpendiculari, rationem D C ad C S debere ſemper componi ex ratione datâ & ex ratione E C ad D O. Sive, ut inde colligi facile poteſt, ratio D O ad C S vel O R ad R C debet ſemper conſtare ex ratione data, quam diximus, & ex ratione E C ad

Difficile quidem eſt reperire hunc in modum lineas curvas per proprietatem datam perpendicularium illarum, ſive, quod idem eſt, per proprietatem tangentium. Verum datur methodus ſatis facilis ad hanc curvam inveniendam, quæ nititur æquilibrio quorundam canalium, cujus Newtonus primus ideam dedit.

Canalis, quem fingit, repræſentatur in figura noſtra per E C P facientem angulum rectum cum centro terræ. Debet concipi paululum excavatus eſſe, & aquâ plenus: hiſce ſic poſitis, conſtat duo crura E C, C P debere in æquilibrio perſtare, ſi ponamus terram, totam ex aqua conſtantem, figuram induere cujus diametri ſint E A & P Q; quia ſecus aqua illa canalis non perſeveraret in ſitu ſuo, ſi conciperetur ſine canali, quod eſt contra hypotheſim: unde facile eſt reperire rationem E A ad P Q. Si enim ponas E C ∞ a; C P ∞ b, & repræſentes gravitatem abſolutam per lineam p, vimque centrifugam in E per lineam n; Pondus Canalis P C eſt $p\,b$, id eſt productum

ctum omnium partium Canalis illius & lineæ p. Sed pondus canalis E C, quod foret $p\,a$, imminutum eſt per vim centrifugam omnium ſuarum partium, è quibus ſublimior, quæ eſt in E, habet vim n, cœteræque aliæ proportionatam iſti, pro diſtantiis ſuis à centro D: quod facit $\frac{1}{2} n\,a$ pro tota vi centrifuga aquæ canalis E C, quâ demtâ de pondere illius pa, ſupereſt $p\,a - \frac{1}{2} n\,a$, quod æquale debet eſſe $p\,b$ ponderi canalis P C. Unde patet, quod a eſt ad b, ut p ad $p - \frac{1}{2} n$. Scilicet quod diameter E A terræ eſt ad axem illius P Q, velut 289 ad 288½, vel ut 578 ad 577: ratio enim p ad n erat ut 289 ad 1.

Ut reperiam deinde quænam ſit linea curva E D P, fingo mihi canalem plenum aquâ E C D, &, ductâ D O perpendiculari ad axem P C, facio C O $\infty\, x$, & O D $\infty\, y$, cœteræ vero lineæ idem nomen habent quod antea. Conſtat aquam E C & aquam D C debere ietrum æque ponderare. Quinimmo hoc contingere neceſſe eſt quocumque modo fingatur Canalis, modo utrimque ad ſuperficiem pertingat, ut, verbi gratiâ, ſi iret per D O C E aut D O P, aut D C P. Porro vis centrifuga totius aquæ in C D æqualis eſt vi aquæ quæ eſſet in canali O D poſito ejuſdem magnitudinis: quod facile intelligitur ex mechanica planorum inclinatorum. Sed ut E C $\infty\, a$ ad D O $\infty\, y$, ita eſt vis centrifuga in E quæ erat n, ad vim centrifugam in D; quæ igitur erit $\frac{ny}{a}$. Cujus dimidium, multiplicans id quod continetur canali D O $\infty\, y$, conſtituit vim centrifugam canalis illius $\infty\, \frac{1}{2}\frac{nyy}{a}$, quæ igitur eſt etiam vis centrifuga canalis C D. Sed gravitas iſtius canalis C D, verſus centrum C, eſt $p\sqrt{xx+yy}$. Ergo preſſio illius, quæ ſupereſt verſus C, erit $p\sqrt{xx+yy} - \frac{1}{2}\frac{nny}{a}$; quæ debet eſſe æqualis $p\,a - \frac{1}{2} a\,n$, preſſioni canalis E C jam repertæ.

Quæ æquatio poſito $\frac{ap}{n} = f$ huc redit

$y^4 \infty$

$$\begin{aligned} y^4 \infty\ & 4ffyy - 4aaff + 4ffxx \\ & - 4afyy + 4a^3f \\ & + 2aayy - a^4 \end{aligned}$$

Unde patet lineam curvam E D P non eſſe ſectionem Coni, niſi quando p & n æquales ſunt, id eſt, quando vis centrifuga corporis, poſiti in E, ponitur æqualis eſſe gravitati ſuæ verſus centrum C. Tunc enim apparet f æqualem eſſe a; & æquatio fit $y^4 \infty 2aayy - a^4 + 4ffxx$; vel $y^4 - 2aayy + a^4 \infty 4ffxx$; vel tandem $yy - aa \infty 2ax$. Quod
TAB. IX. Fig. 4. argumento eſt E D P fieri tunc Parabolam, qualem hacce in figura videre eſt, ſcilicet quæ habeat verticem P, axem P C æqualem $\frac{1}{2}$ C E, & parametrum duplam ejuſdem C E.

Ac proinde ſi terra, habens diametrum E A eâ magnitudine quâ eſt, volveretur circa axem ſuum B Q decies & ſepties velocius quam facit, (tunc enim vis centrifuga in E æqualis eſſet gravitati versùs centrum ex demonſtratione quæ in diſſertatione hacce videre eſt) haberet figuram corporis quod ſimul faciunt duæ illæ ſemi-parabolæ oppoſitæ, P E C, Q E C, dum volvuntur circa axem P Q. Videturque nullam majorem vim centrifugam poſſe ſupponi, quoniam nimirum, ſi major eſſet quam gravitas, corpora collocata in E in aëra evolarent.

Præter hunc caſum, ſi in Æquatione reperta fiat $yy \infty az$, ſitque z linea indeterminata, habebitur $z \infty a - 2f + \frac{2ff}{a} - \sqrt{4ff - 8f^3 + \frac{4f^4}{aa} + \frac{4ffxx}{aa}}$ Si vero poſueris d pro $\frac{ff}{a} - f$, exſurget $z \infty a + 2d - \sqrt{4dd + \frac{4ffxx}{aa}}$. Unde novi, ſi
TAB IX. Fig 3. C O ſit x, & perpendicularis O T nuncupetur z, punctum T futurum in hyperbola cujus axis additus C E erit $4d$; & ut $4ff$ ad aa, ita fore axem ad parametrum; quæ erit $\frac{aad}{ff}$, id eſt, $\frac{a-na}{p}$, reſtitutis valoribus d & f. Quoniam autem yy erat æqualis az, ſequitur D O ∞y fore mediam proportionalem inter O T & E C. Unde reperiri poſſunt puncta per quæ linea curva E D P tranſire debet.

Li-

Linea autem iſta ſatis facit etiam requiſito ante memorato, ſcilicet, ductâ DR ipſi lineæ ad angulos rectos inſiſtente, ratio OR ad RC conſtabit ex ratione *p* ad *n* & EC ad CD, ut facile probatur ex calculo Algebraico.

Poſui hac in demonſtratione gravitatem eamdem eſſe intra terram ac in ſuperficie, quod veriſimillimum mihi videtur, etſi non neſciam aliquem eſſe locum dubitandi, de quo poſtea. Verum etiamſi ſecus obtineret, fere nihil immutaretur illud, quod inventum eſt de figurâ terræ; niſi in caſu in quo vis centrifuga magna eſſet pars gravitatis aut etiam illi æqualis foret, veluti in hypotheſi figuræ parabolicæ, quæ tum plane alia evaderet. Cæterum, ubi vis centrifuga in E exiguam habet rationem ad gravitatem, ut hîc in terra, tunc hyperbola ETP, ob magnam centri diſtantiam, ad parabolen valde accedit; adeoque EDP neque multum differt ab Ellipſi neque à circulo, quia tunc EC ſuperat CP paululum admodum. Reperimus enim paulo ante exceſſum illum eſſe dumtaxat $\frac{1}{578}$ EC, ſemidiametri terræ.

Newtonus exceſſum hunc invenit, $\frac{1}{231}$ EC, ac proinde figuram terræ multo magis diſtare à ſphærica. Quo in calculo utitur quâdam ſupputandi ratione, quam hic non examinabo, ſiquidem haud aſſentior illi axiomati quod ibi aliasque ſumit; ſcilicet particulas omnes, quæ concipi poſſunt in duobus pluribusve corporibus, ſeſe invicem attrahere, ſive conari ad ſe invicem accedere. Quod concedere prorſus nequeo, quia videor mihi manifeſte percipere cauſam attractionis ejusmodi neque explicari poſſe per principia Mechanices neque per regulas motûs. Neque perſuaſum magis habeo neceſſariam eſſe attractionem hanc corporum integrorum; quandoquidem oſtendi, etſi nulla eſſet terra, fore tamen ut corpora, ſua quam dicunt gravitate, centrum aliquod peterent.

Itaque nihil habeo contra *vim centripetam*, ut vocat

Newtonus, per quam vult planetas gravitare verſus ſolem, lunamque terram verſus. Quin immo eam eo magis ſine difficultate admitto, quod ejusmodi attractionem ſive impulſionem eſſe in natura experientia docet, quam etiam explicare poſſumus per leges motus, ut ex eo videre eſt, quod ſupra de gravitate ſcripſi. Enimvero nil obſtat quominus cauſa vis illius centripetæ verſus ſolem, ſimilis ſit vi quæ cogit corpora gravia terram verſus deſcendere. Exiſtimaveram quidem olim figuram ſolis ſphæricam eadem ex cauſa proficiſci, quæ, juxta meam ſententiam, ut terra ſphærica eſſet efficeret. At nondum extenderam gravitatis vim ad tantas diſtantias à Sole ad Planetas & à terra ad Lunam; quia nimirum vortices Carteſii, quos duxeram olim valde veriſimiles, quique menti adhuc inhærebant, me impeditum dabant. Neque etiam magis attenderam ad diminutionem illam regularem gravitatis, nempe quod ſit in ratione reciproca quadratorum diſtantiarum à centro: quæ nova inſignisque proprietas gravitatis eſt, cujus non ſupervacaneum fuerit inveſtigaſſe rationem. Nunc vero cum videam, ex demonſtrationibus Newtoni, gravitatem ejusmodi verſus ſolem, quæ minuatur eâ proportione, ita æquare vires centrifugas planetarum, & producere præciſe effectum motus Elliptici quem Keplerus conjectaverat obſervationibusque confirmaverat; vix eſt ut dubitem quin hypotheſes illæ veræ ſint, ut & ſyſtema Newtoni, in quantum iis innititur. Imo ſyſtema illud eò probabilius videri debet, quoniam ſolvit plures difficultates quæ in vorticibus Carteſianis negocium faceſſebant. Intelligitur nunc quî excentricitates planetarum poſſint eſſe ſemper eædem; cur plana orbitarum non coincidant ſed retineant conſtanter easdem inclinationes ad planum Eclipticæ; & cur plana omnium illarum orbitarum neceſſario per ſolem tranſeant. Quomodo motus planetarum poſſint celeriores lentioresve fieri per eos gradus quos obſervamus: quæ res difficulter ſic obtinere poſſet, ſi Planetæ innatarent vortici alicui cir-

ca ſolem. Tandem docet ſyſtema illud quo pacto fieri poſſit, ut Cometæ per ſyſtema noſtrum tranſeant. Enimvero ex quo novimus eos ſæpe ingredi in regionem planetarum, difficulter intelligebamus quî poſſent ferri motu contrario motui ejus vorticis qui ipſos planetas abripiebat. Verum doctrina Newtoni ſcrupulum hunc abſtulit, quia nil obſtat quominus Cometæ percurrant vias ellipticas circum ſolem, veluti planetæ, easque longiores & figuræ magis diſſimilis circulari; ac proinde ſtatutis temporibus redeant, ut plures Philoſophi & Aſtronomi veteres ac recentes conjecerant.

Hoc unum modo ſcrupulum injicit, quod Newtonus, expulſis vorticibus, vult ſpacia cœleſtia plena dumtaxat eſſe materiâ quâdam rariſſimâ, ut ſcilicet Planetarum Cometarumque curſus tanto minus impediatur. Quæ ſi ita ſint, videtur funditus corruere mea de gravitate & de lumine explicatio. Ut igitur caput hoc ad examen vocem, dico materiam æthereaM poſſe raram eſſe duobus modis, aut ſi particulas habeat inter ſe diſtantes interſtitiaque vacua; aut ſi particulæ illæ ſeſe quidem contingant, ſed ſingularum contextus ſit rariſſimus pluribusque ſpaciis vacuis intermixtus. Vacuum equidem facile admitto, videnturque corpuſcula parva absque eo non poſſe inter ſe moveri; quâ in re longe aliter ſentio ac Carteſius, qui eſſentiam corporis in extenſione ſola poſuerit, cum addendam eſſe putem duritiem perfectam quâ corpus impenetrabile fiat, ejusque naturæ ut frangi aut minui non poſſit. Attamen ſi raritatem priori modo ſpectem, nullus video quî poſſit gravitatis ratio reddi, imo prorſus mihi impoſſibile videtur explicare velocitatem ſummam luminis, quæ, ex demonſtratione Romeri, quam videre eſt in noſtra diſputatione de Lumine, ſexcenties millies major eſt quam celeritas ſoni. Quamobrem raritatem ejuſmodi puto minime convenire cœleſtibus ſpaciis.

Veriſimilius igitur eſt raritatem altero modo ſumendam

eſſe, quia ita ſpectatæ particulæ ſeſe contingere queunt, velut poſui in mea diſſertatione, & tamen, præ raritate contextûs ſui, parum reſiſtere Planetarum motui. Etenim quis novit quam dura corpora natura poſſit efficere ex pauca materia, imprimis, annon particulæ tenuiſſimæ, & etiam cavæ, poſſint eſſe infinitarum virium. Verùm, etiamſi ad raritatem non attendamus, credo ſummam agitationem materiæ æthereæ multum facere poſſe ut penetrabilis fiat. Enimvero, ſi ex levi particularum ſuarum motu aqua evadit liquida, multoque minus reſiſtit rebus innatantibus, quam aut arena aut pulvis tenuiſſimus; nonne oportet materia ſubtilior & infinitè vehementiori motu abrepta, penetretur tanto facilius?

Utut hæc ſunt, Natura, pro eâ quâ eſt induſtria, poteſt efficere ut ſint ſpatia in quibus corpora cum minimâ reſiſtentiâ moveantur: ſicut patet ex eo quod manus noſtræ ſentiunt in aëre; magisque ex diverſis experimentis quæ fiunt in vaſis vitreis unde aër exhauſtus eſt, in quibus pluma vel leviſſima eadem velocitate deſcendit quâ globus plumbeus. Quod ſi quis dicat id oriri ex ſumma raritate materiæ quæ ibi in vacuo ſupereſt, ei reſpondebo, quod è contrario inibi obſervare ſit effectum materiæ graviſſimæ, ut in experimento ſupra adducto abunde viſum eſt.

Quod autem Newtonus dicit propoſ. 6. libri 3. dum vult probare æthera eſſe rariſſimum: ſcilicet quod gravitates corporum ſint, ut quantitates materiæ, quam continent; ac proinde, ſi ſpatia aëris aut ætheris æque referta eſſent materiâ ac aurum & argentum, metalla illa in iis non deſcenſura eſſe; quia nimirum corpus ſolidum, ſi non habeat plus gravitatis ſpecificæ quam fluidum, in fluidum non poteſt immergi. Fateor corporum gravitates ſequi quantitates materiæ ex qua conſtant, ac idipſum hoc in tractatu ipſe demonſtravi. At oſtendi etiam corporibus illis, quæ vocamus gravia, gravitatem imprimi poſſe à vi

cen-

centrifuga materiæ cujusdam quæ ipſa non gravitat terram verſùs, propter concitatiſſimum motum ſuum in orbem, ſed quæ conatur recedere. Materia igitur illa bene implere poteſt totum ſpacium quod terram circumdat, & in quo nulla alia ſunt corpuſcula; neque hæc impedit quominus corpora gravia deſcendant, cum è contrario illa ſola cauſa ſit, cur tendant deorſum. Res aliter obtineret, ſi poneremus gravitatem eſſe qualitatem inhærentem materiæ corporeæ. Sed hoc Newtonum velle non credo, quoniam hypotheſis ejuſmodi nos longe à principiis Mathematicis mechanicisve avocaret.

Fortaſſe inquiet, etiamſi concedatur materiam conſtare ex particulis quæ ſeſe contingant, ut transmittant lumen, hoc tamen non videri debere ſequi hanc regulam, ſcilicet quod ſe extendat per lineam rectam; hoc enim pugnat cum prop. 42. lib. 2. ubi ait motum, qui propagatur per materiam fluidam, non modo extendere ſe rectà ab origine ſua, ubi per aperturam quandam tranſiit, ſed etiam ad latus declinare. Ad quæ primo reſpondeo, quod illa, quæ attuli, ut probarem, lumen (præterquam in reflexione vel in refractione) tantum directe extendi, non minus ſubſiſtant, etiamſi hæc propoſitio vera ſit. Non enim nego, cum Sol per feneſtram lucet, diffundi motum aliquem ad latus ſpatii illuminati, ſed dico tantum undas illas, cum à via deflexerint, nimis debiles eſſe, quam ut poſſint lumen producere. Quamvis autem ille velit emanationem ſoni argumento eſſe, emotiones illas ad latus eſſe ſenſibiles; pro certo teneo contrarium inde manifeſto colligi. Enimvero ſi ſonus, cum tranſit foramen aliquod, ad latus etiam deflecteret, ut vult Newtonus, non tam accuratè obſervaret in Echo æqualitatem angulorum incidentiæ ac reflexionis, ita ut, quando ſumus in loco, unde nulla poteſt perpendicularis cadere in planum reflectens muri paululum diſtantis, non audiamus Echo reſpondere clamori-

bus quos ibi edimus, ut ſæpe expertus ſum. Neque dubium mihi eſt quin experimentum, quod addit, de ſono qui domo licet interpoſitâ exaudiretur tamen, aliter obtineret, ſi domus illa in medio aquæ collocata eſſet ita, ut nil haberet circa ſe quod particulam aliquam ſoni poſſet reflectere.

Quod vero affirmat, in quavis parte cubiculi cujus feneſtra pateat, ſonum ab extra ortum audiri, non quidem a muro reflexum, ſed venientem rectâ à feneſtra; patet quam pronum ibi ſit errare, propter multitudinem reflexionum repetitarum, quæ quaſi inſtanti fiunt: adeo ut ſonus, quem putes immediate venire à feneſtra, vel à locis vicinis fortaſſe veniat, poſt duplicem reflexionem. Quod igitur pertinet ad undulationes, quas in ſuperficie aquæ videre eſt, fateor id contingere fere ut Newtonus dicit, id eſt undam, ubi pervaſit foramen, utrimque dilatari, plerumque debilius tamen verſus latera quam in medio. Verum dico, quod emanationes ſoni à recta viâ devergentes pœne inſenſibiles auribus ſunt, emanationes vero luminis, quæ à rectâ viâ quoque aberrant, inſenſibiles oculis prorſus.

Exiſtimavi mihi occurrendum fuiſſe difficultatibus, quas liber Newtoni ſubjicere poſſet, quia nimirum probe novi quanti hoc opus æſtimatur, ac merito quidem, ut pote quo nihil in his rebus inveniatur doctius, nihil quod majorem mentis penetrationem demonſtret. Supereſt nunc ut duo capita adhuc obſervem in ejus ſyſtemate, quæ pulcherrima mihi videntur, occaſionemque præbebunt animadvertendi quædam alia; ac demum dicam ea quæ in Adverſariis meis reperi de motu corporum per aëra aliudve medium quod reſiſtat: quo de motu agit non obiter Newtonus lib. 2.

Vidimus, quomodo in ſyſtemate Newtoni gravitates, tum planetarum ſolem verſùs, tum ſatellitum ſuos verſus planetas, poſitæ ſint in ratione dupla reciproca diſtantiarum

rum à centro ſuarum orbitarum. Idem mirifice confirmant ea, quæ Philoſophus ille demonſtravit de Luna, nempe vim centrifugam, quam à motu ſuo habet, æqualem eſſe præciſe gravitati ejus terram versùs; ac proinde duabus illis viribus contrariis Lunam ibi ſuſpenſam hærere ubi eſt. Etenim cum diſtemus ab ea 60 Semidiametris terræ, adeoque gravitas ejus in ſua regione ſit $\frac{1}{3600}$ illius quam nos ſentimus; neceſſe erat, ut vis centrifuga corporis, quod moveretur ſicut Luna, æqualis item eſſet $\frac{1}{3600}$ ponderis quod in ſuperficie terræ haberet. Hoc autem ita prorſus reperitur, facileque computari poteſt, quandoquidem jam novimus vim centrifugam ſub Æquatore eſſe $\frac{1}{289}$ noſtræ gravitatis hîc loci.

Sed exemplum iſtud Lunæ cum tam manifeſte probet pondus minui, ex ratione reciproca quadratorum diſtantiarum à centro terræ; dubitare poſſit quis an non ſit quædam alia inæqualitas in Pendulis, præter eam quæ à motu diurno naſcitur. Si enim Terra non ſphærica ſit ſed propemodum ſphærois, punctumque aliquod ſub Æquatore magis diſtet à centro quam idem ſub Polo, in ratione 578 ad 577, ut jam dictum eſt; cum gravitates ibi ſint in ratione contraria quadratorum diſtantiarum illarum, oporteret etiam pendulum ſub æquatore brevius foret quam pendulum ſub Polo, in eadem ratione contraria. Id eſt, Pendula illa eſſent ut 288 ad 289, ſive pendulum ſub æquatore brevius eſſet $\frac{1}{289}$ quam ſub polo: quod diſcrimen prorſus idem eſt cum eo, quod è motu diurno aut vi centrifuga oritur. Ita ut horologium pendulo æque longo inſtructum lentius moveretur ſub æquatore quam ſub polo, duplo ejus, quo retardatur per motum Terræ; adeoque differentia illa diurna ſub Æquatore fere eſſet 5 min. ſub cœteris vero Parallelis reperiretur ſemper plusquam duplo major quam ibi erat antea. Sed dubium valde mihi eſt an experientia magnam illam variationem confirmet, cum in deſcriptione itineris de qua men-

mentionem feci, obſervaverim primam æquationem ſufficere, futurumque ut æquatio illa plusquam duplo major nimium diſcriminis poneret, verſus medium itineris inter viam navis calculatam ope penduli, eamdemque ex æſtimatione Navarchi computatam. Atque ut rationem adducam cur altera variatio locum non haberet, dico non mirum fore, ſi gravitas, prope ſuperficiem terræ, non ſequeretur præciſe, ut in regionibus ſublimioribus, diminutionem quam producunt variæ diſtantiæ à centro. Etenim poteſt fieri ut motus materiæ, quæ gravitatem gignit, paululum immutetur in viciniis terræ, veluti videtur intrinſecus fieri; cum aliter neceſſe eſſet ut gravitas, ubi accedit ad centrum, in infinitum creſceret: quæ res minime veriſimilis eſt. Quinimmo Newtonus vult gravitatem intra terram minorem fieri, prout corpora ad centrum appropinquant. At id probat principio eodem, de quo jam dixi mihi cum illo non convenire.

Hoc unum ſupereſt quod vehementer mihi placuit illo in ſyſtemate; Nempe invenit methodum quâ, poſito diſtantiam à terrâ ad ſolem notam eſſe, definiri poſſit quænam ſit gravitas quam ſentirent incolæ Saturni & Jovis, comparata cum noſtrâ & quænam ejus menſura ſit ad ſuperficiem ſolis. Eæ res etſi longè à cogitatione noſtrâ remotæ videantur, tamen ſequuntur ex principiis quæ paulo prius recenſui.

Determinatio illa locum habet in Planetis qui unum aut plures ſatellites habent, quia horum tempora periodica, & diſtantiæ à Planetis quos comitantur, debent contineri in calculo; ex quo Newtonus repperit gravitates in ſuperficiebus Solis, Jovis, Saturni & Terræ, eſſe in ratione horum numerorum 10000, $804\frac{1}{2}$, 536, $805\frac{1}{2}$. Non diffiteor aliquid incerti ineſſe, propter diſtantiam ſolis non ſatis notam, quæ hocce in calculo ſumpta eſt quaſi 5000 diametrorum terræ, cum, ex dimenſione Caſſini ſit circiter 10000; quod accedit ad id, quod alias repereram,

ex

ex rationibus veriſimilibus, in Syſtemate meo Saturni, ſcilicet 12000. Diſcrepo etiam paululum in eo, quod pertinet ad Planetarum diametros. Ex mea computandi ratione, gravitas in Jove, ad eam quam hic in terra habemus, eſt ut 13 ad 10, cum Newtonus utramque faciat æqualem, aut ſaltem ejuſmodi, ut diſcrimen vix ſentiri queat. Sed gravitas in ſole quæ ex numeris ſuperioribus, erat duodecies circiter major quam noſtra, à me invenitur vicies & ſexies major. Ergo, explicatâ gravitate ita ut ego feci, materia fluida debet prope ſolem quadrageſies & novies velocior eſſe, quam ea quæ terræ vicina eſt, & quæ jam tum decies & ſepties ſuperabat celeritatem alicujus ſub Æquatore puncti. Summâ hâc rapiditate adductus ſum ad cogitandum an illa non ſit cauſa cur Solis lumen ita fulgeat, poſito quod lumen gignatur eo quo expoſui modo, nempe quod particulæ Solis, innatantes materiæ ſubtiliori & valde agitatæ, impingant in particulas ætheris circumfluas. Si enim agitatio materiæ ejuſmodi, in illo motu quem hic in terrâ habet, poteſt efficere ut fulgeat flamma candelæ, quanto magis lumen illud futurum eſt ſplendidum, à motu quadrageſies & novies rapidiori concitatiorique.

Summa cum voluptate vidi quæ Newtonus ſcripſit de caſu & jactu corporum gravium in aëre ſive alio quovis medio quod motui reſiſtat, quia eidem ſtudio operam olim dederam. Quoniam autem hæc materia partim gravitatem ſpectat, puto me hic poſſe adferre, quæ tum detexi. Sed ſummatim hæc exponam, neque adjungam demonſtrationes, ut pote quas reliquerim imperfectas, cum ſpeculatio illa non mihi videretur tanti uſus aut conſequentiarum, quæ reſponderent difficultatibus, quæ ibidem occurrunt.

Primo examinavi motus illos, ponendo vires reſiſtentiæ eſſe ut velocitates corporum; quod tunc veriſimillimum videbatur mihi. Verum vix fueram aſſecutus quod perſequebar, cum cognovi, ex plurimis experimentis quæ

fecimus Pariſiis in *Academia Scientiarum*, reſiſtentiam aëris & aquæ eſſe ut quadrata velocitatum. Id autem facile concipi poteſt, quia corpus, quod movetur, verbi gratiâ, duplâ celeritate, incurrit in duplum particularum aëris aut aquæ, idque celeritate duplâ. Vidi ita novam meam Theoriam hunc in modum corruere, aut ſaltem inutilem eſſe, volui dein quærere quid contingeret, quando ponitur verum hoc fundamentum reſiſtentiarum; ubi comperi rem eſſe multo difficiliorem, ac præſertim in eo quod ſpectat lineam curvam quam corpora oblique jacta percurrunt.

In primâ ſuppoſitione, quod reſiſtentiæ ſint ut velocitates, notavi, ad reperienda ſpatia certo tempore percurſa, ubi corpora cadunt aut aſcendunt perpendiculariter, & ad determinandas celeritates in fine temporis, lineam quandam curvam, quam jam ante examinaveram, ſummæ utilitatis in hoc negotio eſſe. Nuncupari poteſt *Logarithmica* aut *Logiſtica*, nondum enim quantum video accepit nomen, licet eam plures jam obſervaverint. Linea
Tab. IX. fig. 5. illa infinita eſt ABC, & habet pro aſymptoto lineam rectam DE; in qua, ſi ſumantur partes æquales quæ ſe mutuo ſequantur, ut DG & GF, ducanturque, à punctis D, G, F, perpendiculares uſque ad curvam, ſcilicet DA, GH, FB, lineæ illæ erunt continue proportionales. Unde patet facile reperiri poſſe quotvis puncta in curva illa, cujus poſtea proprietates aliquas deſcribam quæ ſunt notatu dignæ. Ut nunc explicem ea quæ pertinent ad caſus corporum, repeto hic primum ea quæ dixi in fine tractatûs mei de centro agitationis; ſcilicet corpus, cadendo per aëra, celerius celeriuſque ſemper moveri, ita tamen ut nunquam excedere poſſit aut attingere certum quemdam gradum, nempe illum quo aër ab inferiori ſurſum ſufflans opus haberet, ut corpus teneret ſuſpenſum & immobile: tunc enim vis aëris in corpus illud æqualis eſt

gra-

gravitati ejuſdem. Celeritatem illam in unoquoque corpore voco celeritatem *terminalem*.

Si igitur corpus grave perpendiculariter projiciatur ſurſum ea cum celeritate, cujus ratio ad celeritatem terminalem ſit data, exempli causâ, partis AK ad KD in ordinata AD, quæ eſt perpendicularis aſymptoto DE; ducatur KB parallela aſymptoto illi, & in puncto B curva tangatur à recta BO, quæ occurrat DE in O, & DA in Q. Tangens autem illa reperitur, ſumptâ FO, ab ordinata BF æqualis certæ cuidam longitudini, quæ pro omnibus tangentibus eadem eſt, & quam definiam poſtea. Deinde ſit AC parallela tangenti illi, ſecetque KB productam in P; & è puncto C, ubi occurrit curvæ, ducatur pariter CLM parallela AD, ſecansque KB productam, & AM parallelam aſymptoto, in punctis L & M. Nunc tempus, intra quod corpus aſcendit ad altitudinem quo pervenire valet, eſt ad tempus intra quod ab eadem altitudine deſcendit, ut linea KB ad BL.

Tempus vero intra quod, jactum ut diximus, aſcendit per aëra, eſt ad tempus intra quod aſcenderet, ſi nulla eſſet reſiſtentia, ut KB ad KP.

Altitudo autem quò in aëre aſcendet, ad eam quò aſcenderet absque reſiſtentia, ut ſpatium ABK ad triangulum APK, vel ut QA ad AX, quam ſumo eſſe dimidiam partem tertiæ proportionalis lineis DK, KA.

Et Velocitas ejus initio aſcenſus ad eam quam habet in deſcenſu, ut ML ad LC.

Præterea reperitur ex eadem linea quamnam curvam percurrat corpus oblique miſſum. Etenim, in eadem figura, ſi angulus jactûs, in linea horizontali, ſit LMR cum velocitate data, cujus motus ſurſum ſit ad celeritatem terminalem ut AK ad KD; repetatur ſuperior conſtructio, & Recta AS, quæ tangit curvam ABC in A, occurrat KB in S. Deinde ut SP ad PB, ita ſit RL ad LT, & in baſi MC erigatur figura proportionalis TAB. IX. fig. 6.

 ſeg-

ſegmento ABCP; adeo ut lineæ parallelæ & æquidiſtantes ab aſymptoto DE, in utraque figura, habeant omnino eamdem rationem BP ad TL. Curva MTC notabit figuram quæſitam jactûs.

Quoniam vero altitudo jactûs cum reſiſtentiâ erat ad altitudinem jactûs liberi, ut QA ad AX; ſi fiat ut TL habeat eamdem illam rationem ad aliam lineam VZ; illa erit altitudo paraboles MU quam deſcribit jactus ille liber, qui incepit in M eâdem vi & eadem directione MR, quâ alter jactus. Itaque ſi, in angulo LMR, formetur YZ perpendicularis ad MC & æqualis duplici VZ, habebitur vertex paraboles illius in V in medio YZ, & illius dimidia baſis ſive dimidia amplitudo MZ.

Notandum eſt, quicunque ſit angulus elevationis LMR, poſito quod velocitas verticalis eadem maneat, hìc inveniri eamdem amplitudinem MC. Verum hoc moneri debet, tantummodò jactuum figuras ſic reperiri, non vero altitudines amplitudineſque diverſorum jactuum ſimul comparatorum. Etenim debent eſſe omnes ejuſdem altitudinis, quando celeritas verticalis eadem eſt. Itaque ſingula quæque figura jactûs, ſic reperta, debet redigi ad figuram proportionalem æqualis altitudinis, ut ſciamus quomodo amplitudines altitudineſque diverſorum jactuum ſint inter ſe.

Verum addo etiam hic, quod linea Logarithmica non modo utilis ſit reperiendis curvis jactuum, ſed quod ſit curva ipſa in uno caſu, ubi ſcilicet corpus jacitur oblique deorſum, ita ut deſcenſus perpendicularis æquet celeritatem terminalem. Tunc enim corpus illud ſequetur præciſe curvaturam lineæ ejuſmodi, accedendo ſemper ad aſymptotam, quam attinget nunquam. Quod autem determinat ſpeciem lineæ, eſt quod ejus *ſubtangens* (ſic nuncupabo lineam FO quæ pro tangentibus omnibus eadem eſt) dupla erit altitudinis ad quam celeritate terminali corpus aſcendet, abſque medio reſiſtente.

Hæc

Hæc repereram in hypotheſi reſiſtentiam eſſe ut celeritatem; ſed cum theoria mea eo niteretur principio, quam natura non ſequitur in reſiſtentia aëris & aquæ, eam prorſus neglexi, neque reſumpſiſſem unquam niſi tractatus Newtoni moviſſet me ut viderem an ea quæ viis diverſis quæſieramus, inter ſe convenirent. Quod ſic ſe habebat, conſtructio enim quâ utitur prop. 4. lib. 2., ad lineam jactûs, licet diverſa longe à mea difficiliorque multo, eamdem tamen curvam producit, ut poteſt probari demonſtratione Mathematica.

In illis examinandis, quæ contingunt in vera hypotheſi reſiſtentiæ, quæ eſt in ratione dupla celeritatis, determinaveram tantum caſum particularem corporis jacti furſum cum ſua celeritate terminali; ſcilicet tempus, integræ ejus elevationis in aëre, eſſe ad tempus intra quod adſcenderet quouſque poteſt liberè, ut circulus eſt ad quadratum ei circumſcriptum, & altitudinem prioris jactûs eſſe ad altitudinem alterius, ut ſpatium, inter hyperbolen ejusque aſymptoton, terminatum duobus lineis parallelis alteri aſymptoto, quæ ſint in ratione 2 ad 1, ad rectangulum aut parallelogrammum ejusdem hyperboles. Id eſt, ut ſpatium AMDK ad quadratum AC. Tab. IX. fig. 7.
Nondum vero indagaveram cæteros caſus, qui continentur univerſaliter in pulcherrimâ prop. 9. lib. 2. Newtoni, idque, quia non reperiebam ex mea methodo menſuram deſcenſus corporum, niſi ſupponerem quadraturam certæ cujusdam lineæ curvæ, quam neſciebam pendere à quadratura hyperboles. Redegi etiam dimenſionem ſpacii curvæ illius ad progreſſionem infinitam, $a+\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{5}a^5+\frac{1}{7}a^7$ &c. Ignorans eandem progreſſionem dare etiam menſuram ſectoris hyperbolici, quod intellexi poſtea, comparatâ demonſtratione Newtoni cum iis quæ ipſe repereram.

Quoniam autem progreſſio illa, pro menſura hyperboles, nondum obſervata eſt, quod ſciam, hic explicare

care illius uſum lubet. Eſto AB hyperbole cujus aſymptotæ DC & CE faciant angulum rectum, ſemiaxis ſit CA, perpendicularis ad DAE quæ tangit hyperbolem: & ACB ſit ſector, lineaque CB ſecet AD in F. Si nunc accipiatur AC aut AD pro unitate, & AF vocetur a, quæ eſt fractio minor quam unitas, ubi AF & AD ſunt commenſurabiles; Dico, ut ſumma progreſſionis infinitæ $a+\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{5}a^5+\frac{1}{7}a^7$ &c. eſt ad 1, ita fore ſectorem ABC ad triangulum ACD. Si vero ducantur perpendiculares AK & BL ad aſymptoton, idem dici poteſt de ſpatio ABLK, quod eſt æquale ſectori illi, ut facile videre eſt ex æqualitate triangulorum CAK, CBL.

Itaque progreſſio illa, pro hyperbole, reſpondet ei, quam dedit Leibnitzius pro circulo. Per quam, ſi ſector circuli ſit ACG, habens pro radio AC, ac CG ſecet AE in H; ſi AH vocetur a, & AE æqualis 1, ſumma progreſſionis $a-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{5}a^5-\frac{1}{7}a^7$ &c. eſt ad 1, ut ſector ACG ad triangulum ACE, aut velut arcus AG ad rectam AE.

Quod vero attinet ad lineam jactûs obliqui, ſi ſatis eſſet, in ratione illa reſiſtentiæ cognoſcere motum horizontalem & verticalem corporis alicujus, ad inde componendum motum obliquum, ut in prima hypotheſi; poſſent determinari puncta per quæ linea illa tranſire debet: ac eadem linea logarithmica ad id conduceret; ſi volveretur ita ut aſymptotos illius parallela foret horizonti: quinimmo rurſum fieret curva jactus, eo in caſu de quo dixi antea. Sed compoſitio illa motûs cum hîc non admitti poſſit, quia nimirum diminutio motûs retardati, in diagonali alicujus rectanguli, non eſt proportionalis diminutionibus per latera; difficillimum eſt, ſi non omnino impoſſibile, ſolvere hocce problema.

Motus horizontalis ſeorſim conſideratus, ut in globo qui volveretur in tabulato aliquo lævi, id habet notatu dignum, quod debeat in infinitum procedere, quocunque

que etiam modo reſiſtat medium; cum è contrario limites habeat motus certumque terminum nunquam attingat corpus, quando reſiſtentia eſt ut velocitas. Infinitum autem eſſe in primo caſu facile patet ex prop. 5. lib. 2. Newtoni, quia ſpatium, comprehenſum inter hyperbolen illiusque aſymptoton, eſt magnitudinis infinitæ.

De proprietatibus Lineæ Logiſticæ.

PRoprietates Lineæ Logiſticæ, quas recenſiturum me pollicitus fui, & è quibus aliquæ inſervierunt ad reperienda ea quæ obſervavi circa motus per aëra, ſunt illæ, quæ ſequuntur; præter primam de qua jam dixi, proportionalitatem nempe ordinatorum ad aſymptoton, quando æque diſtant, per quam in illa linea reperiuntur puncta.

1. Spatia comprehenſa duabus ordinatis ad aſymptoton ſunt inter ſe ut ordinatarum illarum differentiæ. Sic, in hacce figura, ubi AVD eſt Logiſtica, BO illius aſymptotos, & ordinatæ, AB, VC, DQ; è quibus iſtæ ultimæ productæ occurrunt AK parallelæ aſymptoto, in E, K; ſpatia ABCV, ABQD ſunt inter ſe ut rectæ EV, KD. TAB. IX. fig. 8.

2. Iisdem poſitis & AO factâ tangente in puncto A, ac ſecante CE, QK, in I & G; ſpatia AVE, ADK ſunt inter ſe ut rectæ VI, DG.

3. Spatium comprehenſum duabus ordinatis eſt ad ſpatium infinitum, quod, à minima ex ordinatis illis, extendit ſe logiſticam inter ejuſque aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum ad minimam. Cum vero dico ſpatium infinitum habere certam quamdam rationem ad ſpatium aliquod finitum, ſignificat illud tam prope accedere ad magnitudinem ſpatii dati, quod habeat proportionem illam ad ſpatium finitum, ut differentia poſſit fieri minor quam ſpatium quodlibet datum. Spatium ABQD eſt ad ſpatium infinitum quod à AQ extendit ſe inter curvam & aſymptoton, ut KD ad DQ.

4. Subtangens, ut BO, eſt ſemper ejusdem longitudinis, ad quodcunque etiam punctum logiſticæ pertineat tangens.

5. Longitudo illa per approximationem reperitur, & eſt ad partem aſymptotæ comprehenſam inter ordinatas rationis duplæ, ut 4342944819032518 04 ad 301029995663981195, aut fere ut 13 ad 9.

6. Si ſint tres ordinatæ, ut AD, HG, BF, & è puncto curvæ & minimæ harum, ducatur parallela ad aſymptoton quæ ſecat duas alias ordinatas in R & K, & tangens QB quæ easdem ſecet in N & Q; ſpatia trilinea ABK, HBR ſunt inter ſe, ut partes ordinatarum inter curvam & tangentem, ſcilicet ut AQ, HN. TAB. IX. fig. 5.

7. Spatium infinitum inter ordinatam, logiſticam, & ejus aſymptoton; ubi duæ iſtæ poſtremæ ad ſeſe mutuo accedunt, eſt duplum trianguli quem faciunt ordinata, Tangens ducta ex eodem puncto ac ordinata, & ſubtangens. Sic, ſpatium infinitum, ab ordinata BF, eſt duplum trianguli BFO.

8. Spa-

8. Spatium, comprehenſum duabus ordinatis, eſt æquale rectangulo ex ſubtangente & differentia earumdem ordinatarum. Sic, ſpatium ADFB eſt æquale rectangulo ſubtangentis FO & KA.

9. Solidum, quod producit ſpatium infinitum ab ordinata aliqua, volvendo ſe circum aſymptoton, eſt ſeſquialterum Coni, cujus altitudo æqualis eſt ſubtangenti, & Semidiameter baſeos æqualis eidem ordinatæ. Sic ſolidum, quod ſpatium infinitum BFOC facit, volvendo ſe circum FO, & ſeſquialterum coni, quem facit triangulum BFO, volvendo ſe circum eandem FO.

10. Solidum productum ab eodem ſpatio infinito, volvendo ſe circum ordinatam BF à qua incipit, eſt ſextuplum coni quem facit triangulum BFO, per converſionem ſuam circa BF. E qua ſolidorum menſura hoc ſequitur, quod

11 Centrum gravitatis ſpatii infiniti, ab ordinata una, diſtat ab ea longitudine ſubtangentis.

12. Quod idem illud centrum gravitatis diſtat ab aſymptoto, quartâ parte ordinatæ.

13. Repereram etiam centrum gravitatis primi ex ſolidis illis infinitis diſtare à ſua baſi, dimidiâ parte ſubtangentis.

14. Centrum vero gravitatis alterius ſolidi diſtat à ſua baſi infinita, octavâ axis ſui parte.

15. Lineam illam logiſticam conducere ad quadraturam hyperboles, abunde notum eſt ex demonſtrationibus Patris Gregorii à S. Vincentio, de ſpatiis hyperbolicis comprehenſis duas inter ordinatas ſuper una ex aſymptotis. Ut &, ſi duo ſint ejuſmodi ſpatia, è quibus unius ordinatæ ſint ut AD ad HG, & ordinatæ alterius ut BF ad CE; ſpatia illa inter ſe fore ut lineæ DG, ad FE. Verum neminem ſcio obſervaſſe eadem illa ſpatia hyperbolica eſſe ad parallelogrammum hyperboles (ſic voco parallelogrammum cujus latera ſunt duæ ordinatæ ſuper aſymptotis, ductæ ex eodem ſectionis puncto) ut ſingulæ quæque ex lineis DG, FE ad ſubtangentem FO. Adeoque, ſi parallelogrammum hyperboles ponitur 0, 4342944819 partium, ſingulum ſpatium hyperbolicum, comprehenſum duas inter ordinatas ad unam ex aſymptotis, erit ad parallelogrammum illud, ut logarithmus proportionis earumdem ordinatarum; id eſt ut differentia logarithmorum numerorum, qui exprimunt proportionem ordinatarum, ad numerum 0, 4343944819; ſumptis Logarithmis decem characterum præter characteriſticam.

Hinc facile eſt confirmare quadraturam hyperboles, quam dedi in tractatu de evolutione linearum curvarum, quem videre eſt in meo *Horologio oſcillatorio*.

FINIS.

TAB. IX.

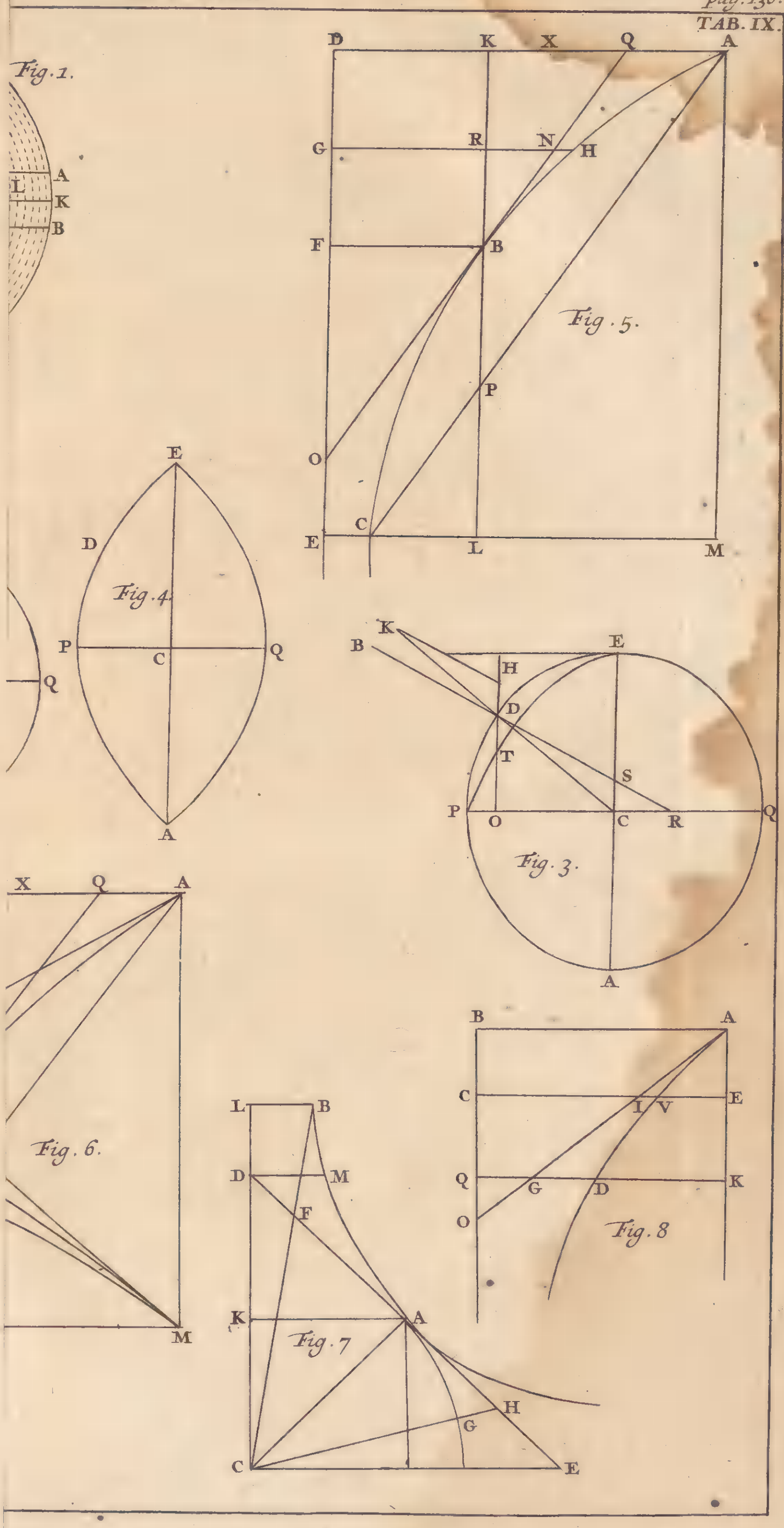


Fig. 1. *Fig. 5.* *Fig. 4.* *Fig. 3.* *Fig. 6.* *Fig. 7* *Fig. 8*

GEOMETRICA DEMONSTRATIO THEOREMATUM HUGENIANORUM

CIRCA

LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM,

Qua occaſione plures Geometricæ Methodi exhibentur circa Tangentes, Quadraturas, Centra gravitatis, Solida, &c. variarum curvarum, uti infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, &c. Aliæque Geometricæ Veritates illuſtrantur.

ADDITA EPISTOLA GEOMETRICA AD P. THOMAM CEVAM S. J.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

CREMONENSI,

Monacho Camaldulenſi, & in Almo Piſano Lyceo Publ. Phyloſophiæ Profeſſore.

AD SERENISSIMUM

FERDINANDUM III.

MAGNUM ETRURIÆ PRINCIPEM.

SERENISSIME

PRINCEPS.

SIngularis in Bonas Artes, maximèque in Mathematicas Diſciplinas, Ser. Celſ. Tuæ Genius, atque in earumdem cultores, MEDICEO PRINCIPE verè digna, Propenſio, & animum, & ſtimulos addiderunt, ut apud eamdem Celſitudinem Tuam Opuſculum hoc Geometricum collocarem. Enimverò maximum operæ compendium facturum me intellexi, ubi ſpeculationes has meas ejuſmodi Principi conſecrarem, apud quem, & Scientiæ ſublimitas, & Argumenti præſtantia, & Doctrinæ utilitas nonniſi

ſuperfluè commendanda foret, nec repetitis, aut votis, aut precibus opus eſſet ad illius Tutelam Operi ſimul, Auctorique impetrandam. Horum ſcilicet ſtudiorum pretium abundè noſti, Principum Optime, imò & nos ipſos non opere minùs, quàm verbo doces, quanti ipſa facienda ſint, dum in illorum præſidium, qui eadem promovere ſtudent, ultrò Ipſe deſcendis, quò confidentiùs, & ſecuriùs ad Te accedere non vereantur. Omne igitur officium ſatis explevero, ſi citra verborum circuitum, brevi dumtaxat, ſimplicique narratione, quale mihi argumentum hìc tractandum ſuſceperim, aperuero.

Clariſſimus Vir Chriſtianus Hugenius (notum Celſitudini Tuæ nomen, pro Litteraria, qua tantoperè excellis, Eruditione Tua, in Aſtronomicis præſertim, Phyſicis, & Geometricis rebus, quas ille diſciplinas ſummè illuſtravit) ex *Logiſticæ*, ſeu *Logarithmicæ* Lineæ proprietatibus, nonnullas planè admirabiles ad calcem ſuæ Diatribæ de cauſa Gravitatis, citrà demonſtrationem ullam, nudè propoſuit, quibus ipſemet uſus fuerat, ad arduas phyſicæ veritates in eodem tractatu indicandas, variorumque problematum determinationem, ad motum corporum, ſeu per aerem projectorum, ſeu proprio pondere deſcendentium, computata etiam medii reſiſtentia, perti-

pertinentium expediendam. Quum itaquè inſignes adeò, ac geometrica contemplatione per ſe digniſſimas eſſe proprietates illas animadverterem, ac prætereà in Philoſophicis etiam uſum habere poſſe, è re futurum judicavi, ut iiſdem demonſtrandis operam darem, quò pleniùs de ipſarum veritate conſtaret, eòque tutiùs deinceps ad Phyſicam transferrentur; Longiſſimè ſiquidem à Geometriæ ditione exulare cognoveram Pythagoricum illud, *Ipſe dixit*, parvamque adeò ſolius pronunciantium Auctoritatis in hac Scientia rationem haberi; atque id quidem meritò, quippe & Magnorum aliquando Virorum determinationibus abſque demonſtratione propoſitis (ſeu methodi, ſeu applicationis, ſeu calculi lapſu, quem in extendenda demonſtratione facillimè animadvertiſſent) falſitatem irrepſiſſe deprehendimus. Evidentiam itaque in ejuſmodi eſſe exigendam, quæ Geometricis potiſſimùm ratiociniis eſt concilianda. Geometricè idcircò ſingulas, ex propoſitis ab Hugenio Logiſticæ Proprietatibus, demonſtrare aggreſſus ſum, nec uno plerumque modo, ſed pluribus, iiſque admodùm generalibus, atque ad infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum, Spiralium, aliarumque variarum curvarum Tangentes, Quadraturas, Solida determinanda conducentibus, ut non ſoli Logiſticæ,

ſed omnibus ferè ſub Geometricam conſideratio-
nem cadentibus figuris, præſentis Opuſculi u-
tilitas communis eſſet.

Et hic quidem, SERENISS. PRINCEPS, hujus Commentarioli mei ſcopus, hæc ſumma eſt, quod cùm per ſe ſe exiguum ſit, ſuique ratione Auctoris obſcurum, Tui Nominis tamen Luce ejus fronti affulgente, non uſque adeò vileſcere poterit, imò & ſupra conditionis, atque indolis ſuæ ſortem ſperare incipiet; quamquàm id unum mihi abundè ſuffecturum ſit, ut mei erga S. C. T. obſequii, gratæque erga Auguſtiſſimam MEDICEAM Domum, cui tot beneficiis devincor, obſervantiæ, acceptum Tibi pignus, perpetuumque in omnem poſteritatis memoriam monumentum exiſtat.

Ex Monaſt. Angelorum Flor. Idib. Julii MDCCI.
Sereniſſ. Celſitud. Tuæ

Humillimus, Addictiſſ. atque Obſequentiſſ. Famulus
D. Guido Grandus Monachus Camald.

A D

AD LECTOREM
PRÆFATIO.

1 COnſuetudinis eſt apud Geometras vetuſtiſſimæ, ut quæ ab aliis ſine demonſtratione propoſita ſunt, ſive Theoremata, ſive Problemata, ſibimet oſtendenda, ac geometricè confirmanda aſſumant, vel exercitationis propriæ, vel communis utilitatis gratia, ut certa ab incertis, à falſis vera ſecerni poſſint, atque hæc tutò recipi, ac in uſum, ſi quem habent, converti, illa tanquam ſpuria, & fallaciter aſſerta reſpui, & amandari; id vel ex uno Archimede conſtare poteſt, qui in Præfatione ad Libros Spiralium, Cononem ſummis laudibus celebrat, ejuſque inventa Mathematicis, ſine demonſtratione propoſita, ſibi demonſtranda aſſumit; id quod tam accuratè, tantoque ingenio præſtitit, *ut*, Bullialdo teſte, *in ſui admirationem, cùm æquales, tùm poſteros converterit; laudum titulos, nullo oblivionis ſitu inducendos, meruerit, earumque* (Spiralium) *inventori Cononi gloriam, palmamque præripuerit.* Enimverò, qui in aliorum propoſitionibus demonſtrandis operam collocant, quàm arduam, difficilemque in ſe provinciam ſuſcipiant, Vir Cl. Galilæus in Trutinatore, *pag.* mihi 48. luculenter oſtendit, dum ait: *Longè ſublimioris ingenii eſt alieni Problematis enodatio, aut oſtenſio Theorematis, quàm novi cujuſpiam inventio; Hæc quippe fortunæ in incertum vagantibus obviæ plerumque eſſe ſolet; tota verò illa, quanta eſt, ſtudioſiſſimam attentæ mentis, in unum aliquem ſcopum collimantis, ratiocinationem expoſcit.*

2. Eum-

2. Eumdem & ipſe pulverem agitare aggreſſus, quemadmodùm ante biennium Vivianea Problemata tibi geometricè demonſtrata obtuli, innumeris aliis veritatibus, ſeu planè novis, ſeu majori compendio ex prolixa Veterum ſupellectili deductis, Conicorumque præſertim Fornicum Tetragoniſmo locupletata; ita nunc HUGENIANA THEOREMATA, longè adhuc plurium ſpeculationum campum, pro variis, iiſque generalibus methodis, quibus in eorumdem demonſtratione uti placuit, aperientia, communicare propoſui. Seriùs id quidem, ſi Theorematum Hugenii propoſitionem ſpectes, illa quippe ad calcem Diatribæ *de Cauſa Gravitatis*, Tractatui *de Lumine* ejuſdem Auctoris adnexæ, uſque ab Anno 1690 Lugduni Batavorum excuſa jam proſtant; Sin verò eadem animadvertendi copiam ante paucos menſes mihi nunc primùm factam attendas, ſatis adhuc tempeſtivè. Hoc ſcilicet Anno dumtaxat, quum Piſis degerem, & obeundis Phyloſophicæ Cathedræ, ad quam Regiæ Magni Etruriæ Ducis Celſitudinis Beneficentia nuper vocatus fueram, muneribus incumberem, apud Humaniſſimum æquè, ac Nobiliſſimum Juvenem Lucam Albizium S. Stephani Equitem, in his, quæ ad Geometriam, ad Phyſicam, multiplicemque Eruditionem ſpectant, apprimè verſatum, prælaudati Hugeniani Tractatus exemplar tandem invenire, ac ſedulò evolvere potui. Rapuit animum ſtatim Propoſitionum illarum, quæ & ſcitu jucundæ, & veſtigatu difficiles videbantur, Utilitas, atque Elegantia; inde ſiquidem, ipſomet Hugenio fatente, pendere videbam, quæ Vir Clariſſimus de Gravium projectione perpendiculari, & obliqua, eorumque deſcenſu pronunciaverat, in hypotheſi, quòd reſiſtentiæ mediorum in eadem ratione creſcerent cum velocitatibus corporum, utì eatenùs creditum fuerat. Ac de Phyſicis quidem Propoſitionibus vix ſollicitus fui, quum jam de hypotheſi non conveniret, majorque,

que, Hugenio teſte, ſe oblatura eſſet in ipſarum demonſtratione difficultas, quàm quæ rei pretio compenſaretur.

3. De Geometricis ſecus apud me ſtatui: legeram apud Serenum Antiſtenſem Epiſt. ad Cyrum, præfixa lib. 1. de ſect. cylindri. *Abſurdum omnino videri, Geometras ipſos de Problemate Geometrico ſine demonſtratione quicquam affirmare*; & quamvis longiſſimè abeſſem ab ejuſmodi conſuetudine, generaliter idcircò damnanda, quum ſcirem, juſtis de cauſis, ſeu temporis inopia, ſeu brevitatis ſtudio, ſive exercitationis Lectorum gratia, id aliquando licere, quemadmodum & nobis, tum in proximè edito, tum in præſenti etiam Opuſculo nonnulla exciderant citra demonſtrationem aſſerta, Geometriæ tamen, ac Phyſicæ promovendæ plurimùm intereſſe putavi, ut miranda hæc Theoremata ad Logiſticam pertinentia tandem demonſtrarentur, è quibus, quemadmodùm illæ, quas ſupra ex Hugenio laudabam, ita aliæ, & aliæ Phyloſophicæ Veritates certioribus hypotheſibus innixæ profluere poſſent, quamdiù autem illa per legitimam demonſtrationem firmas radices non agerent, inculta planè, ac ſterilia jecerent. Et proprio igitur genio, & Amicorum ſtimulis accedentibus, ut in Logiſticæ Proprietatum ab Hugenio propoſitarum veritatem inquirerem, de iiſdem accuratè demonſtrandis cogitare cœpi. Quod quidem fœliciùs, quàm ab initio ſperaveram, deinde ſucceſſit, paucarum quippe horarum meditatione, octo priorum Theorematum (quinto excepto, quod abſtruſiorem ſibi poſcere indaginem prævideram) demonſtrationem inveni; nec multis poſt diebus reliqua omnia enucleavi, præter duodecimum, tertium decimum, ac quintum jam ab initio intermiſſum, quorum Veritas, ut in apertam lucem, vel ipſa ſpontè prodiret, vel educi ſe non invita pateretur, longioris operæ officiis invitanda, roganda, ac tantùm non per vim extrahen-

trahenda fuit, nobiliorem quippe manum fortaſſe expectans, obſcuri hominis conatus refractaria dedignabatur.

4. Sed quorſum, inquies, à tanto Viro propoſita in examen vocare, & ad demonſtrationis amuſſim expendere oportuerat? An non ſatis tutò admitti poterant, citra ſuſpicionem ullam falſitatis, vel hoc ipſo, quòd acutiſſimus ille, & tot nominibus celebris Geometra rem ita ſe habere fidenter aſſeruerat? Archimedi, quidquid diceret, credendum deinceps eſſe Hyeron Syracuſius, & Gelon Siciliæ Rex pronunciarunt, apud Proclum *lib.* 2. *cap.* 3. poſtquàm Navim contra omnium opinionem loco moviſſet, & Artificis fraudem ex Coronæ pondere ad calculos revocaſſet; Quid ni igitur, citra aliam indaginem, & Chriſtiano Hugenio credimus, poſt fœliciter detectum Saturnium Annulum, poſt oſtenſas Curvarum Evolutarum proprietates, Cycloidis longitudinem demonſtratam, Pendulique oſcillationes ad iſochroniſmum revocatas, ut de aliis taceamus præclaris inventis, quibus Phyſicam, Aſtronomiam, & Matheſim denique univerſam inſigniter illuſtravit? Hæc certè ſi Archimedis tempore propoſita fuiſſent, non minùs veſtigatu ardua, inventuque difficilia cenſeri poterant, quàm minimæ potentiæ ad maximum pondus movendum per machinam elevatio, vel aurea corona permixti argenti diſcretio.

5. Ultrò ipſe fateor, dignos eſſe ſummos Geometras, utpotè Veritatis commercio maximè omnium aſſuetos, quibus, etiam eorum, quæ pronunciant, demonſtrationem reticentibus, fides nihilominus habeatur; neque enim *Mathematicos*, conceſſo *Hiſtoricis* privilegio, quis jure fraudaverit, quum ipſa *Geometria* à Pythagora *Hiſtoria* appellari conſueverit, teſte Jamblico in ejus vita, cap. 18.; imò longè potior illius ſit, quàm iſtius ratio, quippe nulla ex parte, aut à lubricis famæ rumoribus, aut ab incertis documentis, aut à præoccupato partium ſtudio ſibimet imponi patitur

titur Geometra, quum quidquam aſſerit, ſed quod evidenti dumtaxat ratione apud ſe conſtiterit pronunciare ſolet; quo nomine perfectam Hiſtoriæ ideam Geometria præbet, quam utinam imitarentur qui Hiſtoricos agunt, nec quicquam temerè ſolis conjecturis ducti, prout ſibi ſomniaverint, deſcriberent, ſed ea dumtaxat, quibus (quantùm materia patitur) demonſtrandis ſe idoneos, & paratos ſentiunt! Nil tamen vetat, quin & ipſi Geometræ, cùm homines ſint, lapſibus quoque obnoxii eſſe poſſint; primo ſiquidem obtutu veri ſpeciem prætendere poteſt fallax quoddam ratiocinium Geometrarum mentibus uno impetu objectum, illoſque in errorem inducere, à quo facilè ſibi caviſſent, ſi ſpeculationum ſuarum demonſtrationem per extenſum adducere, ac per ſingulas partes attentiùs expendere voluiſſent; exempla ſunt, & antiqua in Conone ſupra laudato, quem, inter ingenioſiſſima inventa ſua, Geometris abſque demonſtratione propoſita, quædam complexum fuiſſe, quæ falſa erant, teſtis eſt idem Archimedes *loc. citat.* & recentia non deſunt in Mathematicorum lectione verſatis, quæ hìc referre non vacat, & alibi indicata habes *cap.* 12. *n.* 10.

6. Sed eſto veriſſima omnia ſint, quæ in Geometris ſine demonſtratione proponuntur (ut certè indubia ſunt, quæ à Viviano, ab Hugenio, aliiſque ſummis Viris popoſita habemus, neque id fas in controverſiam adducere) quamdiù hìc ſubſiſtunt Geometræ, tamdiù revera *Puri Hiſtorici* munus obeunt; quiddam amplius Geometriæ titulis accedere par eſt, quàm nudam Hiſtoriæ laudem: utrumque Geometria munus habet, & vera proponere (quod Hiſtoriæ commune eſt) & eadem demonſtrare (qua ſingulari dote ab Hiſtoria diſcernitur, & ſummum humanæ Sapientiæ verticem meritò poſſidet) Hiſtoriæ ſufficit, ſi fidem pariat; Geometria, ſi evidentem prætereà rerum abs ſe propoſitarum ſcientiam Lectorum mentibus non inducit, vix

Geometriæ nomen, & ſpeciem ſervat. Non inutilis igitur operæ fuerit, à maximis ævi noſtri Geometris aſſerta demonſtrationibus ſuis communire, & quod illis, vel temporis, vel opportunitatis defectus invidit, ſupplere, quemadmodum pro viribus exequi, tum in antecedenti, tum in hoc noſtro Opuſculo conati ſumus; Præſertim cùm ea occaſione tam generales Tangentium, Quadraturarum, ac Dimenſionum methodos aperire, Tibique, mi Lector, explanare licuerit, in quibus quid profecerim, quid aliorum inventis addiderim, Tui ipſius judicio relictum eſto. Intereà, ſi hæc boni feceris, infinitis aliis, quæ adhuc, vel ſchedulis ſparſa, vel ordinatiùs diſpoſita premo, edendis animum dabis.

GUI-

GUIDONIS GRANDI MONACHI CAMALDULENSIS

In Piſana Academia Publ. Philoſ. Profeſſoris

GEOMETRICA DEMONSTRATIO THEOREMATUM HUGENIANORUM

CIRCA LOGISTICAM, SEU LOGARITHMICAM LINEAM.

CAPUT I.

Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ deſcriptio. Ejus primaria proprietas. Logiſticæ aliorum graduum. Ejuſdem per duos motus generatio. Axem habet pro Aſymptoto. Tàm ſupra, quàm infra in infinitum continuari poteſt. Alio duplici motu deſcribitur. Spiralis Logarithmicæ per duos motus deſcriptio. Ejus primaria affectio. Ad alios gradus extendi poteſt. Centro per infinitos cincinnos circumvolvitur, licèt longitudine finita ſit. Æquè inclinatur cuilibet radio. Gravia per ipſam delata eodem ſemper momento pollent, reſpectu momenti, quod haberent in perpendiculo, Carteſio etiam id primùm obſervante. Per convolutionem primæ Logiſticæ gigni poteſt. Fallax, ex nonnullorum methodo, ratiocinium circa ejus ſpatii dimenſionem.

1 RECTA methodus poſtulat, ut, antequam ad demonſtrandas, quas Hugenius propoſuit, Logiſticæ proprietates accedamus, illius geneſis, & deſcriptio præmittatur; imò & variis modis idem præſtare non inutilis operæ pretium fuerit, inde ſiquidem non ſolùm primariæ ejuſdem affectiones, ex quibus aliæ pendent, ſponte ſua profluere intelligentur, verùm etiam ad eorum, quæ deinceps dicenda ſunt, intelligentiam haud parùm conducet clara, & diſtincta ejus naturæ notio, per ejuſmodi varias generationes Lectorum mentibus faciliùs indita, atque altiùs infixa.

2. Logiſtica igitur, ſeu Logarithmica linea illa eſt, in qua ordinatæ ad æquales axis partes ſunt geometricè proportionales; nempè diviſo axe BQ in quotlibet partes æquales BC, CG, GQ, &c. ſi ad earumdem terminos ordinatæ BA, CV, GH, QD, &c. fuerint continuè proportionales, quæ per puncta A, V, H, D, (aliaque extrema *z z*, *m m*, mediarum proportionalium, æquo ſemper intervallo, duabus quibuslibet ordinatis interponendarum) tranſit linea, *Logiſtica*, ſeu *Logarithmica* appellari conſuevit, eò quòd inveniendis logarithmis inſerviat, uti ex ſequentibus manifeſtum erit.

TAB. X. Fig. 2.

3. Ex hac enim definitione conſtat, partes axis ita correſpondere ordinatis, quemadmodum Logarithmi reſpondent naturalibus numeris, & quòd ratio quarumlibet duarum ordinatarum, veluti BA ad CV, reſpectu rationis ordinatarum BA ad QD in eadem proportione erit, in qua axis partes CB, & QB per has ordinatas abſciſſæ; ſiquidem, æqualiter creſcente axe, perinde æqualiter creſcit ordinatarum proportio, unde quàm multiplex eſt QB ipſius BC, tam multi-

plex

plex pariter eſt ratio duarum BA, QD, rationis duarum BA, CV; & generaliter, rationes, quas invicem habent duo quælibet ordinatarum paria (etiamſi una pro communi antecedente, aut conſequente non ſumatur, ſed comparetur, verbi gratia, ratio duarum BA, CV, cum ratione, quæ eſt inter duas GH, QD) erunt ad invicem, ut partes axis quolibet ordinatarum pari interceptæ, uti ad ipſam curvæ hujus naturam attendendo, vel ſumptis, tum rationum illarum, tum axis partium æquè multiplicibus, facilè conſtare poteſt; atque hæc erit primaria Logiſticæ proprietas, per quam poterit expreſſiùs definiri, ejuſque natura clariùs determinari.

4. Ubi obiter animadvertendum erit, poſſe aliorum etiam graduum Logiſticas excogitari, ſi videlicet rationes ordinatarum BA ad CV, & BA ad QD jam non forent ut partes axis BC, & BQ, ſed ut earumdem BC, & BQ quadrata, vel cubi, aliæve poteſtates, vel etiam radices quadratæ, vel cubicæ, aliorumve graduum, ſive in ratione axis partium, ut libuerit multiplicata, vel ſubmultiplicata; adde & ſeſquialtera, vel ſeſquitertia, &c. quas quidem Logiſticarum ſpecies hoc loco minimè conſiderandas ſuſcipimus; neque verò id aut ſuſceptæ exercitationis inſtitutum poſtulat, aut temporis etiam ratio permittit, ſed de prima, & ſimpliciſſima dumtaxat, quam ſuprà deſcripſimus, ſpecie erit hic nobis cum Cl. Hugenio tractandum.

5. Porrò, quum proportionalium differentiæ ſint in eadem ratione proportionales, manifeſtum eſt, ipſas A*u*, *ud*, *dl*, *ln*, &c. interceptas axi parallelis V*u*, D*d* L*l*, N*n* æqualiter creſcentibus, fore in continua proportione earumdem ordinatarum; quare hæc linea, uti primus Logarithmorum inventor Neperus delineare aggreſſus eſt, deſcribi intelligetur duplici motu, altero lineæ AB per BF æquabiliter, ſibique æquidiſtanter TAB. XIII. Fig. 4.

ſtanter deſcendentis, altero puncti A motu continuè retardato versùs B delati, ità ut ſpatia, æqualibus quibuſcumque temporibus ſubinde tranſacta, in eadem geometrica ratione decreſcant; quomodo quo tempore linea deſcendens confecerit ſpatium BC, & ſitum CE obtinuerit, ſi punctum A venerit in *u*, jamque in puncto V reperiatur, ſequenti tempore æquali, linea per æqualem axis portionem CQ delapſa, & in QK poſita, punctum A translatum eſſe in *d*, ſpatio *ud* tranſacto, adeòque in ſitu D reperiri concipiendum eſt, ſequenti adhuc tempore, quo linea percurrerit ſpatium QF, & in FM collocata ſit, punctum ex *d* in *l* promotum, atque in ipſo L puncto conſiſtere intelligetur, ſpatiis A*u*, *ud*, *dl*, cæteriſque deinceps decreſcentibus in ratione BA ad CV; evidens enim eſt, motum, ex utroque compoſitum, fore in eadem curva AVDLN, quam priùs determinavimus.

6. Cæterùm conſtat curvam AVN, hac motuum compoſitione deſcriptam, axi BF continuò propiorem fieri, prout punctum A versùs B ſemper fluere, & ad ipſum accedere intelligitur, nec tamen evenire poſſe aliquando, ut cum ipſo axe conveniat, uno verbo, axem ipſi Logiſticæ *Aſymptoton* eſſe, quia, creſcente in infinitum axe BF per additionem æqualium partium, alia, & alia ſpatia multitudine infinita, ſemperque minora, & minora ipſi puncto A percurrenda remanent, antequam ad ipſum B perveniat, quod ideò numquam attingere poterit: ſeriei ſiquidem infinitæ A*u*, *ud*, *dl*, &c. in ratione AB ad CV, vel B*u* continuatæ ultimus terminus eſt punctum B, eò quòd, quum ſit AB ad B*u*, ut A*u* ad *ud*, erit etiam AB ad priorum duarum differentiam A*u*, ut A*u* ad differentiam duarum poſteriorum A*u*, *u*d; quare ex doctrina Progreſſionum Geometricarum, quam poſt Archimedis veſtigia in libro de dimenſione parabolæ, primus recentio-

rum

rum Torricellius idem argumentum tractans lemm. 27., & Cavallerius in ejuſdem Scholio apud ipſum demonſtrarunt, mox Gregorius à S. Vincentio, aliique deinceps fuſiùs illuſtrarunt, erit ipſa AB ſumma progreſſionis terminorum A*u*, *ud*, *dl*, &c. in dicta ratione continua decreſcentium; nec vacat id particulariùs demonſtrare, quum, vel ex ipſa prima deſcriptione curvæ *num.* 2. adducta, ſimpliciùs longè innoteſcat hæc ipſa Logiſticæ affectio, quòd ſcilicet ad axem tanquam aſymptota propiùs accedat, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipſo conveniat; continuatio quippe rationis AB ad CV per minores, ac minores terminos in infinitum fieri poteſt, quin umquam minimus ejuſmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat.

7. Sed & eâdem ratione liquet, Logiſticam DVA in immenſum ſupra ipſam BA continuari poſſe, nec umquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, ſupremumque eius punctorum fontem perveniri, ſed varia dumtaxat ejus ſegmenta per ordinatarum aliquam, veluti AB, vel CV abſciſſa exhiberi, nec magis punctum A, quàm V, vel D, aut aliud quodvis pro Logiſticæ capite ſtatui poſſe: unde & perinde eſſe undecumque incipias, ratio enim ordinatarum BA, & CV, tam benè ad majores terminos, quàm ad minores continuari poteſt, & ideò applicatis infinitis ejuſmodi terminis ſucceſſivè majoribus, & ſupra BA in immenſum creſcentibus, ad partes ipſius axis FB, ultra B producti, longitudine æquales prioribus BC, CQ &c., ita ut per ordinem arithmeticè creſcant axis portiones, geometricè creſcentibus ordinatis, eadem curva ad ſuperiores partes in immenſum continuabitur per applicatas, datam quamlibet magnitudinem excedentes, non minùs quàm ad inferiores

in infinitum produci queat, per appllicatas qualibet magnitudine data minores.

8. Illud etiam intereà animadvertiſſe juvabit, duplici alio motu eamdem curvam intelligi poſſe deſcriptam, ſi videlicet imaginemur, puncto A per AP æquabiliter deſcendente, (vel muſca, aut formica per haſtam AP ſimiliter æquabili motu delata, ut & P. de Chales in logarithmis tradendis ſupponit) ipſam interim AP, lineæ BA perpendiculariter inſiſtentem, ſibi æquidiſtanter versùs B promoveri, ac ſubinde in *u*V, *d*D, *l*L, &c. reperiri, ſpatiis A*u*, *ud*, *dl*, &c. in eadem ratione geometrica decreſcentibus, prout arithmeticè creſcunt ſpatia AE, AK, AM, &c. à puncto æquabiliter deſcendente percurſa; ſic enim punctum A ſubinde reperietur in punctis, V, D, L, N, &c., reſque eodem recidere obſervabitur, ſi ad ſuperiùs dicta *num.* 5. attendamus, unde ulterioris explicationis moleſtiæ parcendum erit: quemadmodum & ejuſdem tædii compendio conſulentes, miſſam facere decrevimus (myſterii pleniſſimam) eorumdem motuum inverſam compoſitionem, qualis haberetur, ſi axis BF ab ipſa tota æternitate motu infinitè tardo per BA motus intelligeretur, ita tamen accelerato celeritatis gradu, ut integra ſpatia, quæ in fine æqualis cujuſcumque temporis particulæ tranſacta forent, veluti B*n*, B*l*, B*d*, B*u*, B*u*, BA eſſent in continua proportione geometrica, puncto aliquo intereà æquabiliter aſcendente per eumdem axem BF, ita ut poſt emenſum infinito tempore infinitum ſpatium infra G poſitum ſubinde æqualibus temporibus ad GFQCB aſcenderet, perque hanc motuum compoſitionem reperiretur ex ordine in NLDVA; aut ſi æquabilis motus ab æterno inchoatus refunderetur in lineam GP versùs BA aſcendentem, acceleratus verò in punctum G, vel B per eamdem lineam ver-

sùs

ſùs P, vel A promoti, ita ut, quolibet æquali tempore, ſpatia percurreret geometricè proportionalia majora, ac majora *nl*, *ld*, *du*, *u*A, poſt emenſos ſimiliter, motu infinite tardo, in tota æternitate ſingulos minores, ac minores ejuſdem progreſſionis terminos per ordinem acceptos, ita ut ſubinde in iiſdem punctis NLDVA reperiatur, &c.

9. Aliud potius Logiſticæ, ſeu Logarithmicæ lineæ genus, de quo infra nonnulla dicenda recurrent, exponere hac occaſione non gravabor. Illa ad modum ſpiralis cujuſdam generari intelligitur, radio circuli per circumferentiam æquabiliter moto, dum punctum quoddam ab extremo radii versùs centrum, motu in geometrica proportione retardato, procurrit, ita ut quidquid præſtat axis Logiſticæ BF in curva ſuperiùs expoſita, id in ſpirali, de qua loquimur, praeſtet circuli peripheria in arcus æquales diviſa; quod verò præſtabant ibi ordinatæ BA, CV, QD, &c. geometricè proportionales, id in præſenti efficient radii à centro ad hujus ſpiralis puncta exporrecti. Itaque, expoſito quovis circulo CAF*f*, determinatiſque quotlibet æqualibus arcubus AF, F*f*, *ff*, ponantur radiorum correſpondentium portiones CA, C*a*, C*a* geometricè proportionales; erunt puncta A, *a*, *a*, in curva *Spirali Logiſtica*, aliis *Spiralis Logarithmicæ*, quibuſdam *Spiralis Geometricæ* nomine appellata, quæ pariter ad infinitos gradus extendi poſſet, ſi fingerentur radiorum ejus rationes non tantùm in ſimplici, ſed & in multiplicata, aut ſubmultiplicata qualibet arcuum abſciſſorum ratione creſcere, prorſus ut de prima Logiſtica dictum eſt ſuprà *num.* 4. ſed enim in prima hujus ſpiralis ſimpliciſſima ſpecie ſiſtimus, nec aliis pro nunc implicamur. TAB. XV. Fig. 8.10.

10. Et quidem hìc pariter, ſi radii CA, C*a*, ſint ut numeri, arcus reſpondentes FA, *f*A, erunt ut Logarithmi,

rithmi, eritque prima hujus curvæ affectio, quòd ratio duorum quorumlibet radiorum ad rationem duorum quorumlibet aliorum ſit, ut nuper indicavimus, in eâdem proportione, in qua ſunt arcus binis quibuslibet radiis intercepti, prorſus ut de rationibus ordinatarum, deque partibus axis in prima Logiſtica acceptis ſupra dicebatur *n.* 3. Unde & conſtat, Spiralem Logiſticam utrinque pariter in infinitum continuari poſſe, tum ad majores, tum ad minores terminos, continuata ratione radiorum creſcentium, aut decreſcentium circa centrum, circa quod per infinitos cincinnos hæc curva convolvetur, prout infinities repetentur arcus æquales, per quos diſtare debent radii illi proportionales, adeòque integræ circulationes numero infinitæ ſibi invicem ſuperponentur, centro intereà reſpectu curvæ quaſi aſymptoto ſeſe habente, quippe ad illud magis, magiſque accedent curvæ puncta intervallo minore quolibet dato, prout diminuentur proportionaliter radii, nec aliquando tamen in ipſum centrum deſinent, quum ad minimum horum terminorum perveniri non poſſit: quæ res, ut patebit, curioſa contemplatione non vacat, (non minùs quàm ſi motuum, quibus deſcribitur, compoſitionem inversè conſideres eo modo, quo in prima Logiſtica fieri poſſe indicavimus ſub finem *num.* 8.) manifeſtum eſt enim, totam, quanta eſſe poſſit, hujuſmodi curvam per infinitos cincinnos infinitè multiplici gyro ſe circa centrum convolventem, determinatæ rectæ lineæ longitudinem minimè excedere, longitudinem ſcilicet ſuæ tangentis AB uſque ad radium perpendicularem ex centro excitatam productæ; quod & ab aliis pridem obſervatum video, facilemque habet demonſtrationem ex infra dicendis, *cap.* 5. *num.* 10.

11. Sed & illud per ſe propemodùm conſtat, atque ex præmiſſa hujus Spiralis geneſi ſponte profluit, radios

dios ad quodlibet ipſius curvæ punctum æquè inclinari, ita ut conſtans, certus, & determinatus ſemper ſit angulus *CaA*, quem quilibet radius cum curva ad easdem partes conſtituit; ſiquidem hoc ſpirali ſpatio in triangula infinitè parva æqualium ad centrum angulorum diſtributo, veluti ſe habent *ACa*, *aCa*, &c. conſtat illa ſimilia fore, propter latera circa æquales angulos proportionalia, quapropter & alii anguli homologi æquales erunt; itaque ſi ponatur, punctum C eſſe Terræ centrum, in quod gravia collimant; quæratur autem curva (in ſuppoſitione perpendicularium, ſeu linearum directionis, non æquidiſtantium, ut phyſicè ſumi ſolent, ſed in centrum convergentium, uti revera eſſe cenſentur) in qua grave poſitum, & per quam delapſum, idem in quolibet puncto momentum retineat, reſpectu momenti, quod habet in perpendiculo, ita ut illud ad hoc (ubicumque conſiderentur) eamdem ſemper determinatam rationem obtineat, ea certè non alia eſſe poterit, quàm Spiralis hæc Logarithmica, cujus inclinatio ad radios *aC* (exprimentes veram gravium directionem, veraque perpendicula, in quibus momentum maximum, ſeu totale exercetur) numquam immutatur, ſed ſemper eadem perſeverat, contra quàm faciat recta quælibet, velut AB, exhibens planum aliquod inclinatum, in quo poſitum grave (juxta rigorem geometricum perpendiculorum convergentium) non idem in quolibet puncto momentum habere poteſt, nec eadem ſemper eſſe hujus momenti ratio ad momentum in perpendiculo [ut ut id re ipſa à Mechanicis ſapienter aſſumatur, quippe in tanta à centro diſtantia perpendicula quaſi parallela habentur, aut rectæ illius portio cum Logiſticæ Spiralis portione reipſa coincidit] ob varium inclinationis angulum ubique inconſtantem, quem diverſa ejuſdem rectæ puncta cum centro conjuncta conſtituunt, un-

de & momentum ad ſingula ferè puncta in rigore variari continget.

Poſt hæc autem ſcripta inveni & Celeberrimum Carteſium par 1. Epiſtolar. ep. 73. Merſenno jam indicaſſe lineam, in qua momenta non variantur, eſſe quamdam ſpiralem, rogatumque ut ejus naturam indicaret, repoſuiſſe epiſt. ſequ. eam talem eſſe, ut ejus tangentes ſint ad radios ubique æqualiter inclinatæ, & curvæ portiones radiis illas abſcindentibus eſſe proportionales; quod re ipſa Logiſticæ, ſeu Geometricæ Spirali convenit, ut monuimus.

TAB.XI. Fig. 8. 12. Hæc eadem porrò Spiralis Logiſtica intelligi etiam poſſet deſcribi per convolutionem primæ Logiſticæ, de qua ſupra loquuti ſumus, toto axe BQ in punctum centri contracto, ipſa verò AK in peripheriam circularem radii BA (repetito, ut opus fuerit, circumvolutionis gyro) curvata, ſingulisque ejus æqualibus partibus in partes arcus contortis, ordinatis intereà BA, CV, QD in totidem radios à centro deductos abeuntibus, atque à parallelismo ad convergentiam in idem centrum tranſlatis; uti viceversà primam Logiſticam per evolutionem hujus Spiralis, rectificata circuli peripheria, & radiis ſeſe explicantibus, atque ad parallelum ſitum redeuntibus, conformari quis concipere poſſet. Cave autem putes, Logiſticam in Spiralem contractam, ſpatium continere dimidium ejus, quod explicata complectebatur, eò quòd infinitè parva parallelogramma B*z*, *xz*, &c. ex quibus illa evoluta conſtabat, in totidem abeant triangula parallelogrammorum dimidia, ex quibus Spiralis Logiſticæ ſpatium abſolvitur. Ejuſmodi enim ratiocinium (ut ut celebrium Geometrarum methodo conforme) plerumque fallax eſſe deprehenditur, quia non eadem retinetur in convolutione dictorum triangulorum altitudo, quæ priùs fuerat parallelogrammorum, (quamquàm in certa

ratione

ratione ſemper varietur) utì nec eadem baſis, quæ enim priùs curva Logiſtica infinita erat, in Spiralem Logiſticam longitudine finitam convertitur; Unde, circa Spiralis hujus Logiſtici ſpatii dimenſionem, ea dumtaxat ſunt attendenda, quæ infra *cap.* 7. *n.* 13. ex evidentioribus principiis generaliter deducemus. Atque hæc intereà, ad ingenerandam Tyronibus Logiſticæ lineæ, de qua deinceps agendum erit, notitiam, prælibaſſe ſufficiat. Nunc quæ ſint nobis ad mentem Hugenii demonſtranda, allatis Clariſſ. Auctoris verbis, breviter indicabimus.

CAPUT II.

Logiſticæ proprietates ab Hugenio propoſitæ. Spatiorum, ſive ad axem, ſive ad ejus parallelam ordinatis interjectorum, tum ad invicem, tum ad infinitum reliquum Logiſticæ ſpatium proportio. Subtangentis longitudo ſemper eadem, & quæ. Trilineorum Logiſticæ proportio. Infinitum Logiſticæ ſpatium, cujus trianguli duplum. Cui rectangulo æqualia reliqua ſpatia. Solida ex infinito ſpatio Logiſticæ circa axem, vel circa ordinatam revoluto, quam proportionem habeant ad conos inſcriptos? Centrum gravitatis Spatii Logiſtici, in qua ab axe, & ab ordinatis diſtantia? Prædictorum ſolidorum gravitatis centra determinantur. Quomodo Logiſtica hyperbolæ tetragoniſmo conducat, & quam proportionem habeant hyperbolica ſpatia ad parallelogrammum quodlibet aſymptotis inſcriptum?

Ipſis Clariſſimi Auctoris verbis latinè redditis, Logiſticæ proprietates referre placet, prout idem ipſe nobis illas propoſitas voluit ad calcem ſuæ Diatribæ de *Cauſa Gravitatis*, ubi ſic habet. Vide ſupra pag. 135.

Les

Les proprietez de la Ligne Logiſtique, que j'ai promis de raporter, & dont quelques unes ont ſervi à trouver ce que j'ai remarqué touchant les mouvemens à travers l'air, ſont les ſuivantes; outre la premiere, que j'ai deja indiquée, de la proportionalité des ordonnées à l'aſymptote, quand elles ſont également diſtantes, par la quelle on trouve des points dans cette ligne.

1. *Que les eſpaces compris entre deux ordonnées à l'aſymptote, ſont entre eux comme les differences de ces ordonnées. Ainſi dans cette figure, où AVD eſt la Logiſtique, BO ſon Aſymptote, & les ordonnées AB, VC, DQ, dont ces dernieres, étant continuées rencontrent AK parallele à l'Aſymptote en E, K; les eſpaces ABCV, ABQD, ſont entre eux, comme les droites EV, KD.*

TAB. X. Fig. 3.

2. *Que les mêmes choſes étant poſées, & AO étant la tangente au point A, la quelle coupe CE, QK, en I,*

Proprietates Lineæ Logiſticæ, quas referre promiſimus, & quarum nonnullæ iis inveſtigandis deſervierunt, quæ circa gravium motus per aërem ſuperiùs adnotavimus, ſequentes ſunt; præter jam indicatam, proportionalitatis ordinatarum ad aſymptoton, quando æqualiter diſtant, cujus beneficio plura hujus lineæ puncta reperiri poſſunt.

1. Quòd ſpatia comprehenſa inter duas ad aſymptoton ordinatas ſunt inter ſe, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præſenti figura, ubi AVD Logiſtica eſt, BO ejuſdem Aſymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ poſtremæ continuatæ conveniunt cum AK ipſi Aſymptoto parallela in E, K; ſpatia ABCV, ABQD ſunt inter ſe, ut rectæ EV, KD.

2. Quòd iiſdem poſitis, & AO curvam tangente ad punctum A, quæ ſecet ipſas CE, QK in I, & G; ſpatia

I, & G; les eſpaces AVE, ADK ſont entre eux, comme les droites VI, DG.

3. Que l'eſpace compris entre deux ordonnées, eſt à l'eſpace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnées, s'étend entre la Logiſtique, & ſon Aſymptote, comme la difference des mêmes ordonnées eſt à la moindre. Quand je dis, que l'eſpace infini a une certaine raiſon à un eſpace fini, cela ſignifie qu'il aproche ſi prés de la grandeur d'un eſpace donné, qui a cette proportion à l'eſpace fini, que la difference peut devenir moindre qu'aucun eſpace donné. Dans la figure précedente l'eſpace ABQD eſt à l'eſpace infini, qui depuis DQ s'etend entre la courbe, & l'aſymptote, comme KD à DQ.

4. Que la ſoutangente, comme BO dans la même figure, eſt toûjours d'une même longueur, à quelque point de la Logiſtique que la tangente apartienne.

5. Que cette longueur ſe trou-

ſpatia AVE, ADK inter ſe ſunt, ut rectæ VI, DG.

3. Quòd ſpatium duabus ordinatis interjectum eſt ad infinitum ſpatium, quod poſt minorem harum ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem. Quum porrò dicimus infinitum ſpatium ad quoddam finitum in quadam ratione eſſe, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum ſpatium, quod finito illi ſpatio in dicta ratione reſpondeat, ut differentia minor evadere poſſit qualibet magnitudine data. In præcedenti figura ſpatium ABQD eſt ad infinitum ſpatium, quod poſt QD, curvæ, & aſymptoto interjicitur, ut KD ad DQ.

4. Quòd ſubtangens, velut BO in eâdem figurâ, ejuſdem ſemper eſt longitudinis, ad quodcumque Logiſticæ punctum tangens pertineat.

5. Quòd hæc longitudo per

trouve par aproximation, & qu'elle eſt à la partie de l'aſymptote, compriſe entre les ordonnées de la raiſon double, comme 434294481903251804 *à* 301039995663981195; *ou bien prés, comme* 13 *à* 9.

per aproximationem reperitur, eſtque ad partem aſymptoti interceptam ordinatis duplæ proportionis, ut 434294481903251804 ad 301039995663981195, ſeu proximè, ut 13 ad 9.

TAB. XI. Fig, 7.

6. *Que s'il y a trois ordonnées, comme dans cette figure ſont AD, HG, BF, & que du point de la courbe, apartenant à la moindre, on mene une parallele à l'aſymptote, qui coupe les deux autres ordonnées en R, & K, & une tangente BQ, qui les coupe en N, & Q; les eſpaces trilignes ABK, HBR ſont entre eux, comme les parties des ordonnées entre la courbe, & la tangente, ſçavoir comme AQ, HN.*

6. Quòd ſi fuerint tres ordinatæ, velùt in hac figura ſe habent AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur aſymptoto parallela, ſecans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ eaſdem ſecans in N, & Q; ſpatia trilinearia ABK, HBR ſunt inter ſe, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, ſcilicet, ut AQ, HN.

7. *Que l'eſpace infini entre une ordonnée, la Logiſtique, & ſon Aſymptote du côté, que ces deux derniéres vont en s'approchant, eſt double du triangle, que font l'ordonnée, la tangengente menée du même point que l'ordonnée, & la ſoutangente. Ainſi, dans la même figure, l'eſpace infini,*

7. Quòd ſpatium infinitum inter ordinatam, logiſticam, & aſymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum eſt trianguli comprehenſi ordinatâ, tangente ad idem ordinatae punctum, ac ſubtangente. Sic in eâdem figurâ ſpatium infinitum, poſt ordinatam BF, duplum

ni, depuis l'ordonnée BF, eſt double du triangle BFO.

8. *Que l'eſpace, compris entre deux ordonnées, eſt égal au rectangle de la ſoutangente, & de la difference des mêmes ordonnées. Ainſi, dans la même figure, l'eſpace ADFB eſt égal au rectangle de la ſoutangente FO, & de KA.*

9. *Que le ſolide que fait l'eſpace infini depuis une ordonnée, en tournant autour de l'aſymptote, eſt ſeſquialtere du Cone, dont la hauteur eſt égale à la ſoutangente, & le demidiametre de la baſe égal à la même ordonnée. Ainſi le ſolide que fait l'eſpace infini BFOC, en tournant autour de FO, eſt ſeſquialtere du Cone qui fait le triangle BFO, en tournant autour du même FO.*

10. *Que le ſolide produit par le même eſpace infini, en tournant autour de l'ordonnée BF, depuis laquelle il commence, eſt ſextuple du Cone, qui fait le triangle BFO, par ſa converſion ſur BF. De laquelle meſure des ſolides il s'enſuit,*

11. Que

plum eſt trianguli BFO.

8. Quòd ſpatium, duabus ordinatis interjectum, æquale eſt rectangulo ſubtangentis in differentiam earumdem ordinatarum; ſic in eâdem figurâ ſpatium ADFB æquatur rectangulo ſubtangentis FO in KA.

9. Quòd ſolidum productum ab infinito ſpatio, poſt aliquam ordinatarum in converſione circa aſymptoton, eſt ſeſquialterum Coni, cujus altitudo æquetur ſubtangenti, baſis verò ſemidiameter ordinatæ par fuerit. Ita ſolidum genitum ab infinito ſpatio BFOC, in converſione circa FO, ſeſquialterum eſt Coni geniti ex triangulo BFO circa eamdem FO revoluto.

10. Quòd ſolidum productum ab eodem infinito ſpatio in converſione circa ordinatam BF, poſt quam exporrigitur, ſextuplum eſt Coni geniti ex triangulo BFO in converſione circa BF. Ex qua quidem ſolidorum menſurâ conſequitur,

X 2

11. Quòd

11. Que le centre de gravité de l'eſpace infini, depuis une ordonnée, eſt diſtant de cette ordonnée, de la longueur de la ſoutangente.

12. Que ce même centre de gravité eſt diſtant de l'aſymptote, du quart de l'ordonnée.

13. J'avois auſſi trouvé, que le centre de gravité du premier des dits ſolides infinis, eſt diſtant de ſa baſe, de la moitié de la ſoutangente.

14. Et que le centre de gravité de l'autre ſolide eſt diſtant de ſa baſe infinie, d'un huitiéme de ſon axe.

TAB. XIII. Fig. 6. *15. On ſçait aſſez, que cette ligne Logiſtique ſert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis les demonſtrations du P. Grégoire de Saint-Vincent, touchant les eſpaces Hyperboliques compris entre deux ordonnées ſur une des aſymptotes. Et que s'il y a deux tels eſpaces, dont les ordonnées de l'un ſoient comme AD à HG & les ordonnées de l'autre, comme BF à CE; ces eſpaces ſeront entre eux comme les lignes DG à FE. Mais on n'a point*

11. Quòd centrum gravitatis infiniti ſpatii poſt unam ordinatarum, diſtat ab hac ordinatâ longitudine ſubtangentis.

12. Quòd idem gravitatis centrum diſtat ab aſymptoto per quadrantem ordinatæ.

13. Reperimus etiam, quòd centrum gravitatis primi, ex dictis ſolidis infinitis, diſtat à ſua baſi per ſemiſſem ſubtangentis.

14. Et quòd centrum gravitatis alterius ſolidi, diſtat ab ejus infinita baſi per octantem ſui axis.

15. Notum jam eſt, hanc Logiſticam lineam Tetragoniſmo Hyperbolæ deſervire, poſt demonſtrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa Hyperbolica ſpatia, duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjecta; quòdque ſi duo fuerint hujuſmodi ſpatia, in quibus ordinatæ unius ſint, ut AD ad HG & ordinatæ alterius, ut BF ad CE, hæc ſpatia erunt inter ſe, ut lineæ DG, & FE. Nondum autem, quod ſciam, innotuit, hæc ipſa ſpatia

point remarqué, que je ſçache, que ces mêmes eſpaces Hyperboliques ſont au Parallelogramme de l'Hyperbole (j'appelle ainſi le parallelogramme, dont les côtez ſont les deux ordonnées ſur les aſymptotes, tirées d'un même point de la Section) comme chacune des lignes DG, FE, à la ſoutangente FO. De ſorte que, ſi le Parallelogramme de l'Hyperbole eſt ſupposè de 0, 4342944819 *parties, chaque eſpace Hyperbolique, compris entre deux ordonnées à une des aſymptotes, ſera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des mêmes ordonnées, c'eſt-à-dire, comme la difference des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnées, au nombre* 0, 4342944819; *en prenant des Logarithmes de* 10 *caracteres outre la caractériſtique.*

Et d'ici il eſt aisé de verifier la Quadrature de l'Hyperbole que j'ai donnees dans le Traité de l'Evolution des Lignes Cour-

ſpatia hyperbolica eſſe ad parallelogrammum hyperbolœ (ſic voco parallelogrammum, cujus latera ſint duæ ad utramque aſymptoton ordinatæ ex eodem puncto Sectionis ductæ) ut unaquæque linearum DG, FE eſt ad ſubtangentemFO. Adeò ut, ſi parallelogrammum hyperbolæ ſuponatur partium 0, 4342944819, quodlibet hyperbolicum ſpatium, duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjectum, erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum reſpondentium numeris exprimentibus proportionem ordinatarum, ad numerum 0, 4342944819; acceptis Logarithmis decem notarum ultra caracteriſticam.

Atque hinc facile eſt veritatem oſtendere Tetragoniſmi Hyperbolici abs me propoſiti in tractatu de Evolutione Curvarum, quem

 Horo-

Courbes, qui eſt dans mon Horologium Oſcillatorium. *Horologio Oſcillatorio* inſertum invenies.

Hactenus Viri Clariſſimi æquè, ac Doctiſſimi Theoremata perinde nova, atque admirabilia: nunc ad eadem demonſtranda accedamus.

CAPUT III.

Primo Theoremate propoſito, oſtenditur aggregata quotlibet geometricè proportionalium à minimo eſſe inter ſe, ut differentiæ terminorum maximi, & minimi. Incommenſurabiles magnitudines per ablationem quantitatis minoris, qualibet data, reddi commenſurabiles. Hinc primi Theorematis Hugeniani demonſtratio more Archimedeo. Spatia Logiſticæ æquè alta ſunt inter ſe, ut homologæ ordinatæ, ſpatia quoque infinitè longa ſunt, ut baſes. Quodvis ſpatium ad ſubſequens infinitum eſt, ut differentia ſuarum ordinatarum ad minorem. Hinc ſecunda ejuſdem primi Theorematis demonſtratio.

1 A Primo igitur Theoremate Clariſſimi Hugenii auſpicantes rem ipſam propiùs attingamus. Illud, ut vidimus, eſt: *Quòd ſpatia comprehenſa inter duas ad aſymptoton ordinatas ſunt inter ſe, ut earumdem ordinatarum differentiæ. Sic in præſenti figura, ubi AVD Logiſtica eſt, BO ipſius aſymptotos, & ordinatæ AB, VC, DQ, quarum duæ poſtremæ continuatæ conueniunt cum AK ipſi aſymptoto parallela in E, K; ſpatia ABCV, ABQD ſunt inter ſe, ut rectæ EV, KD.* Quod ut demonſtremus, duo omninò ſunt præmittenda primæ demonſtrationi; alterum circa aggregata terminorum proportionalium, alterum de li-

TAB. X. Fig. 3.

neis

neis incommenſurabilibus. Quamquàm enim primum ex Torricellii flexilineis, ejuſve lemm. 28. de dimenſione parabolæ, facilè deduci poteſt, ſecundum verò expreſſè à Cavalerio exercit. 6. prop. 24. demonſtratum fuerit, malui tamen demonſtrationes meas per extenſum afferre, ne Lector, libris illis fortè ad manum non occurrentibus, in horum Theorematum demonſtratione hæſitare poſſit, ſed ſolis Euclideis, Conicisve ad ſummùm elementis inſtructus, abſque alio ſubſidio, omnia inoffenſo pede percurrat: quod & aliàs infra obſervabimus, ſemel hìc monuiſſe ſufficiat.

2. Dico igitur primò, quòd, ſi fuerit duplex ſeries quotcumque terminorum in eâdem ratione geometricè proportionalium, erit omnium aggregatum, minimo excepto, in prima ſerie, ad aggregatum, pariter minimo excepto, in ſerie ſecundâ; ut differentia maximi à minimo primæ ad differentiam maximi à minimo ſecundæ ſeriei. Sint enim magnitudines ejuſmodi in prima ſerie A, B, C, D, E, quarum maxima A, minima E, utriuſque differentia FG, differentiæ autem ſingularum per ordinem à proximè minori ſint *a*, *b*, *c*, *d*, utique ſimul ſumptæ æquales ipſi FG extremarum. Sint pariter ſecundæ ſeriei magnitudines M, N, P, Q, quarum maxima M, minima Q, utriuſque differentia RO ſimiliter æqualis omnibus ſimul partialibus differentiis duarum quarumlibet ſibi ſuccedentium, quas notant litteræ *m*, *n*, *p*; ſintque in eâdem ratione continuè proportionales, tum quæ in prima ſerie, tum quæ in ſecunda reperiuntur. Dico, ABCD ſimul ad MNP, ſimul ſumptas eſſe, ut FG ad RO; cùm enim ſint A, B, C, D, E, continuè proportionales, erunt in eâdem ratione proportionales earumdem differentiæ *a*, *b*, *c*, *d*; atque ut una A ad unam *a*, ita omnes ABCD ſimul ad totidem *abcd* ſimul ſumptas, ideſt ad ipſam FG iis omnibus æqua-

TAB. X. Fig. 1.

æqualem: eâdem ratione oſtendetur, ut una M ad unam *m*, ita omnes MNP ad omnes *mnp*, ſive ad RO ipſis æqualem; eſt autem, ut A ad *a*, ita M ad *m*, quoniam ſupponitur eſſe A ad B, ut M ad N; igitur ut ABCD ad FG, ita MNP ad RO, & alternando, ut ſumma terminorum primæ ſeriei, excepto ultimo, ad ſummam terminorum poſterioris, ultimo pariter excepto, ita FG, differentia primi ab ultimo in prima ſerie, ad RO, differentiam primi ab ultimo in ſerie ſecunda. Q. e. d.

3. Dico ſecundò, duarum incommenſurabilium magnitudinum majorem poſſe minori commenſurabilem reddi, ablata magnitudine minori qualibet data. Sunto enim duæ ejuſmodi quantitates incommenſurabiles, AB major, & C minor, quælibet autem magnitudo propoſita AE, quantùmvis parva; dico, poſſe ex majori AB auferri quantitatem, puta AD, minorem aſſignata AE, ita ut reſiduum DB ſit jam ipſi C commenſurabile; nam bifariam diviſa C, ac rurſus ſubdiviſa qualibet ejus medietate, patet, fore ut jam deveniamus ad aliquam ejus partem F minorem, data magnitudine AE: multiplicetur itaque F, quouſque fiat proximè major ipſa BE, & aggregatum ex F toties accepta ſit BD, patet BD minorem fore ipſa BA, quia BD ad ſummùm ſuperabit EB quantitate F, juxta conſtructionem, minori quàm ſit AE, aut plerumque nec integra quantitate F, ſed ejus aliqua portione multò magis minori ipſa AE; itaque BD minor eſt, quàm BA, defectu AD minori, quàm ſit propoſita magnitudo AE; ſed & eadem BD ipſi C commenſurabilis eſt, habens cum ipſa menſuram communem F, ex qua pluries repetita conſurgit; igitur ex majori AB duarum incommenſurabilium magnitudinum facta eſt ablatio partis AD minoris, data quantitate AE, reſidua DB jam commenſurabili ipſi C remanente. Q. e. f.

TAB. XII. Fig. 8.

4. Jam

4. Jam libero pede Hugeniani Theorematis demonſtrationem Archimedeo more ſic inſtituo. Spatiorum ABCV, ABQD (quæ demonſtranda ſunt invicem eſſe, ut VE, DK) altitudines BC, BQ, vel commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles. Sint primùm commenſurabiles, menſura B*x* utrique communiter inſerviente, diſtributoque axe BC, & reſiduo CQ in particulas ipſi B*x* æquales, ac ductis ordinatis, fiant parallelogramma æquè alta B*z*, *xz*, &c. uſque ad C*m* circumſcripta ſpatio BCVA, quorum ultimum C*m* illi penitus extrinſecum remanet, continueturque eadem parallelogrammorum æquè altorum ſeries per reliquum ſpatium CVDQ, cui pariter circumſcripta ſint C*m*, *nm*, &c. uſque ad QO, quod toti ſpatio extrinſecum pariter erit: At ſi menſura B*x* non ſatis ad propoſitum exigua fuerit, poterit illa, & ſequentes portiones ipſi æquales, bifariam dividi, ac rurſus bifariam, multiplicatis parallelogrammis hæc ſpatia circumſcribentibus, quòuſque excedant eadem ſpatia minori exceſſu quolibet dato, ſiquidem ille exceſſus minor ſemper erit primo parallelogrammo B*z*, quod (diminutâ ejus latitudine) minus eſſe poteſt quavis propoſita quantitate; erunt autem hæc parallelogramma æquè alta, ut baſes, nempe ut ordinatæ in Logiſtica paribus intervallis diſſitæ, adeoque erunt, ex primaria Logiſticæ affectione *cap.* I. *num.* 2. relata, in continua proportione, unde ex primo aſſumpto noſtro *num.* 2. hîc probato, aggregatum omnium parallelogrammorum circumſcriptorum ſpatio ABCV, præter minimum toti ſpatio extrinſecum C*m*, ad aggregatum omnium circumſcriptorum ſpatio ADQB, excluſo pariter minimo QO, erit ut differentia B*z* à C*m*, ſcilicet, ut *m*VE, ad differentiam ejuſdem B*z* à QO, ideſt ad ODK, atque adeo, ut VE ad DK. Quoniam igitur ſeries parallelogrammorum ejuſmodi ſpatia TAB. XI. Fig. 8.

circumſcribentium ſemper, quantacumque fuerit ipſorum multitudo, & quantumcumque accedant ad ipſamet ſpatia, inveniuntur eſſe in ratione conſtanti VE ad DK, patet utique Viris Archimedeis & ipſamet Logiſtica ſpatia iis parallelogrammorum ſeriebus inſcripta, nempe AVCB, & ADQB, in eàdem eſſe ratione VE ad DK.

TAB. X. Fig. 3. 5. Sint jam altitudines BC, BQ incommenſurabiles; poterit, ex ſecundo aſſumpto noſtro *num.* 3. hìc demonſtrato, ſumi BN deficiens à BQ, quantitate NQ minori qualibet data, commenſurabilis verò exiſtens ipſi BC; quomodo, ordinata NMR, habebit ſpatium AVCB ad AMNB eamdem rationem, quam VE ad MR, argumento proximè allato id concludente. Si igitur major eſſe dicatur ratio AVCB ad ADQB, quàm ratio linearum VE, & DK, poterit ipſa MR tam proxima eſſe ipſi DK, & tam parum ab ipſa deficere, ut ratio dictorum ſpatiorum ſit adhuc major, quàm ratio lineæ VE ad MR, hoc eſt, quàm ratio ſpatii primi AVCB ad AMNB, atque adeo foret ADQB minus quàm AMNB, quod eſt abſurdum; ſi verò minor eſſe dicatur ratio dictorum ſpatiorum, quàm linearum illis, ut ſupra, reſpondentium, poterit nihilominus linea NM tam proxima eſſe ipſi QD, & ſpatium AMNB tam parum deficere ab ipſo ADQB, ut ratio AVCB ad AMNB, hoc eſt, ratio VE ad MR adhuc minor ſit, quàm ratio VE ad DK, atque adeo MR major foret ipſa DK, quod pariter eſt abſurdum; Æqualis igitur eſt ratio AVCB ad ADQB, rationi VE ad DK. Q. e. d.

6. Aliam adhuc expeditiorem, fortaſſe ejuſdem Theorematis demonſtrationem, ſubjungemus, his aliis præmiſſis, quæ demonſtraſſe in ſequentibus non pigebit: & primò notare juvat, duo quælibet ſpatia Logiſtica æquè alta, juxta indiviſibilium methodum, oſtendi eſſe

eſſe ad invicem, ut ſunt Homologæ utriuſque ordinatæ; nimirum pari exiſtente altitudine BC, CQ, ſpatium BAVC ad CVQD erit, ut BA ad CV, vel CV ad QD; ſumptâ enim ubivis B*x* æquali C*n*, & ordinatis *xs*, *nr*, & alternando, ut BA ad CV, ita *xs* ad *nr*; & hoc ſemper; ergo, ut una ad unam, ita omnes ad omnes, nempe ut BA ad CV, ita ſpatium BAVC ad CVDQ; quod erat, &c. Neque refert, ſint ne hæc ſpatia conjuncta, ſibique immediatè ſuccedentia, an prorſus disjuncta, vel ex parte communicantia; eadem quippe ratio, ut conſtat, perinde obtinet. TAB. XI. Fig. 8.

7. Deinde obſervare oportet, ſpatia poſt quamlibet ordinatam in infinitum producta eſſe ad invicem, ut ſunt ipſæ ordinatæ, ſeu baſes talium ſpatiorum; ſic DABQR, & DVCQR, ex parte R utrâque interminatâ, & infinitè longâ, ſunt ad invicem, ut BA, & CV. Id ſanè conſtat, tum quia infinita BQR, & infinita CQR ſunt æquales, quum differant finitâ longitudine BC nullam rationem habente ad ipſarum utramlibet; quare, ex dictis numero præcedente, ſpatia iis adjacentia ſunt, ut ordinatæ AB, CV; tum etiam exactius ſic.

Diviſo interminato ſpatio DABQR in infinita ſpatia æquè alta BV, CH, GD, &c. ſimiliter & ſpatio DVCQR in infinita ejuſdem altitudinis ſpatia CVHG, GHDQ, &c. erunt utrobique, ex ſupra demonſtratis *in præcedenti numero*, ſpatia illa æquè alta, ut ſuæ ordinatæ, adeoque in geometrica progreſſione; omnes igitur termini BV, CH, &c. ad omnes CH, GD, &c. in infinitum continuatos, erunt, ut primus terminus BV ad primum CH, ex 12. v. elem. aut ex 29. lemmate Torricellii de dimenſione parabolæ aliàs citato; adeoque erunt, ut BA ad CV. Quod e. d. TAB. X. Fig. 2.

8. Hinc

8. Hinc ultro profluit tertium Cl. Auctoris Theorema, quòd ſpatium duabus ordinatis interjectum eſt ad infinitum ſpatium, quod poſt minorem illarum exporrigitur, ut differentia utriuſque ordinatæ ad minorem ipſarum; quia enim DABQR ad DVCQR eſt, ut BA ad CV, igitur dividendo AVCB ad ſubſequens interminatum ſpatium poſt CV eſt, ut EV ad VC, & ſimiliter ADQB ad interminatum ſpatium poſt QD eſt, ut KD ad DQ.

9. Alia igitur primi hujus Theorematis demonſtratio ſic inſtituenda erit; ſpatium ABCV ad interminatum VDRQC eſt, *ex num. præcedenti*, ut EV ad VC; & VDRQC ad interminatum DRQ *ex num.* 7. eſt, ut VC ad QD; denique DRQ ad DVCQ *ex num. præced.* & convertendo eſt, ut QD ad DK; igitur ex æquo AVCB ad CVDQ eſt, ut VE ad DK. Q. e. &c.

TAB. XII. Fig. 8.

CAPUT IV.

Ad ſecundum Hugenii Theorema demonſtrandum, quæ ſit Logiſticæ parameter oſtenditur, & quomodo æqualis ſit ſubtangenti. Poſt demonſtrationem ſecundi Theorematis ad quartum proceditur, quo demonſtrato, determinatoque rectangulo æquali ſpatio Logiſticæ infinitè longo, exponitur Auctoris circumſpecta loquutio de ratione infiniti ſpatii ad finitum, ac familiaribus exemplis ſuadetur, infinitè longa ſpatia determinatæ quantitati æqualia eſſe poſſe. Spatia per variæ rationis ordinatas in Logiſtica abſciſſa quam proportionem habeant; regula ad dignoſcendum quando ſpatia infinitè longa, aut infiniti termini finitam aggregent quantitatem, quando verò infinitam.

1. IN ſecundo Theoremate; *Iiſdem poſitis*, inquit Auctor, & *AO curvam tangente ad punctum A, quæ ſecet ipſas CE, QK in I, & G; ſpatia AVE, ADK ſunt inter ſe, ut rectæ VI, DG.* Quod pariter ut demonſtretur, determinanda prius eſt Logiſticæ, ut ipſe appellare ſoleo, *Parameter*; hæc autem ejuſmodi eſt. TAB. X. Fig. 4.

2. Exponatur linea S, quæ cum quavis ordinata inter Logiſticam, & axi parallelam, veluti cum VE, contineat rectangulum æquale ſpatio AVCB, adjacenti eidem curvæ ad partes axis; manifeſtum eſt, quòd eadem conſtans linea S continebit, cum quavis alia ſimili ordinata DK, rectangulum æquale ſpatio correſpondenti ADQB; cùm enim ex primo Theoremate ſpatia VABC, DABQ ſint, ut rectæ VE, DK, ſeu, ob communem altitudinem S, ut rectangulum ex S in VE ad aliud ex S in DK, ubi ſpatium VABC ſuppoſitum fuerit æquale rectangulo S in VE, ſpatium pariter DABQ æquale erit rectangulo ex eadem S in DK; itaque, non incommodè, linea S Logiſticæ *Parameter* deinceps appellari poterit, eò quòd ſit linea, juxta quam ipſæ VE, DK poſſunt ſpatia Logiſticæ adjacentia AVCB, ADQB.

3. Oſtendemus autem, hanc Parametrum Logiſticæ ſubtangenti, id eſt, axis portioni inter ordinatam BA, & tangentem AO interceptæ, ſemper æqualem eſſe, ita ut, poſita BO æquali ipſi S, juncta OA curvam tangat in A. Sumpto enim in OA quovis puncto I, ſupra, vel infra A, ordinatâque CIV, occurrente axi in C, curvæ in V, axi parallelæ AK in E, erit, ob ſimilitudinem triangulorum OBA, IAE, ipſa OB ad BA, ut AE ad EI; rectangulum igitur OB in EI æquale erit rectangulo BAE; ſed ſpatium BAVC eſt, *ex numero præcedenti*, æquale rectangulo Parametri, ideſt ipſius OB in VE;

 ergo

ergo rectangulum BAE ad ſpatium BAVC eſt, ut recta IE ad EV; puncto autem *i* ſupra A exiſtente, manifeſtum eſt rectangulum BA*e* minus eſſe ſpatio BA*uc*, ergo tunc *ie* minor eſt, quàm *eu*; ob oppoſitam rationem, accepto puncto I infra ipſum A, erit rectangulum BAE majus ſpatio BAVC, unde & recta IE major ipſa EV; quare in utroque caſu punctum I eſt extra curvam, & ipſa OA eſt tangens. Quod erat demonſtrandum.

4. Hoc poſito, demonſtratio ſecundi Theorematis Hugeniani ſic inſtituenda erit; cùm, ob ſimilitudinem triangulorum OAB, GAK, ſit OB ad BA, ut AK ad GK, erit rectangulum ex OB in GK æquale rectangulo BAKQ: ſed OB in DK jam æquatur ſpatio ADQB, ex ſupradictis; igitur reliquum rectangulum ex OB in DG æquatur reſiduo ſpatio DAK. Similiter oſtendetur, rectangulum ejuſdem OB in VI æquari ſpatio AEV; igitur, ut prædicta rectangula, ſive, ut eorum baſes DG, VI, ita ſpatia ipſa DAK, VAE; quod erat demonſtrandum.

5. De tertio Hugenii Theoremate, quod eſt; *Spatium duabus ordinatis interjectum eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem; nempe in præcedenti figura ſpatium ABQD eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt minorem earumdem ordinatarum exporrigitur inter Logiſticam, & ejus Aſymptoton, ut differentia earumdem ordinatarum eſt ad minorem, ideſt in præcedenti figura, ſpatium ABQD eſſe ad ſpatium infinitum, quod poſt QD inter curvam, & aſymptoton interjicitur, ut KD ad DQ*; de hoc, inquam, Theoremate non eſt quòd ſimus ſolliciti, quum ejus veritas jam innotuerit ex dictis *cap. præced. num.* 8. ut nihil jam addendum ſuperſit, niſi hoc quaſi corollarium, ſcilicet.

6. Quòd

6. Quòd ſpatium infinitum poſt quamvis Logiſticæ ordinatam QD, curvæ & aſymptoto interjectum, æquale ſit rectangulo ſubtangentis, ſeu parametri BO in eamdem ordinatam; nam, ut DK ad DQ, ita rectangulum ex BO in DK ad rectangulum ex BO in DQ, & ita etiam ſpatium ADQB ad infinitum ſpatium poſt QD exporrectum; quare quum rectangulum ex BO in DK ſit, ex dictis, æquale ſpatio ADQB, etiam BO in DQ erit æquale ſpatio infinito poſt QD exporrecto.

7. Quæ verò circumſpectè ingerit Nobiliſſimus Auctor illis verbis: *Cùm porrò dicimus, infinitum ſpatium ad quoddam finitum in certa ratione eſſe, hoc unum intelligendum volumus, tam proximè illud accedere ad datum ſpatium, quod finito illi ſpatio in dicta proportione reſpondeat, ut differentia minor evadere poſſit qualibet magnitudine data.* Non ita accipienda ſunt, nec eò ſpectant certiſſimè, ut ſcrupulum movere videatur Cl. Author, num exacta æſtimanda ſit proportio, quam inter utrumque ſpatium aſſignat; ex quò enim Torricellius, infinitum ſolidum hyperbolicum in cylindrum æqualem determinatæ baſis, & altitudinis commutare Geometras docuit, necnon infinitorum proportionalium terminorum ſeries in unam ſummam colligere, jam extra dubium eſt, magnitudinem, unâ vel alterâ dimenſione infinitam, (putà multitudine, licèt non mole, ſi de quantitate diſcreta ſermo ſit, longitudine, licèt non latitudine, ſi de ſpatiis ſuperficialibus loquamur, aut longitudine, licèt non craſſitie, vel craſſitie quidem, ſed non longitudine, loquendo de ſolidis) ita reliquis dimenſionibus, ad abſolutam ejus magnitudinem integrandam concurrentibus, limitari poſſe, ut quantitatem prorſus finitam adæquet.

8. Neque in hoc relictum eſſe puto Geometris ambigendi locum, ut ut id Tyronibus prope incredibile videa-

videatur, qui admirationi, aut potius præjudicatæ, qua tenentur, opinioni paulatim deponendæ aſſueſcent, ſi has fractionum ſeries $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, &c. in eadem ratione dupla decreſcentes, aut $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, cæteraſque decreſcentes in ratione tripla, aliaſve cujuſvis rationis progreſſiones in infinitum minoribus, & minoribus terminis coaleſcentes in unam redigere ſummam attentaverint; cùmque experti fuerint, non poſſe tot ſumi in prima ſerie, quæ umquam ad unitatem pertingant, eò quòd, in additione cujuſlibet termini ad præcedentes, non additur quod ipſis deficit ad unitatem integrandam, ſed ſemiſſis dumtaxat talis defectus, putà ad $\frac{1}{2}$ addendo $\frac{1}{4}$ additur ſemiſſis ejus, quod primo termino deficiebat ad unitatem, & alter ſemiſſis relinquitur, addendo autem duobus præcedentibus $\frac{1}{8}$, non additur quod in prima additione relictum fuerat, nempe quadrans unitatis, ſed ejus quadrantis ſemiſſis, ideſt octans, altero octante relicto; qui defectus rurſus non ſuppletur per ſequentem additionem, quippe non additur octans relictus, ſed ejus ſemiſſis, nempe $\frac{1}{16}$, atque ita porrò; nec poſſe tot ſumi in ſerie ſecunda, quæ umquam unitatis ſemiſſem reſtituant; quia cùm primus terminus $\frac{1}{3}$ deficiat per ſemiſſem ſui, ideſt per $\frac{1}{6}$, à ſemiſſe unitatis, non reſarcit quis illum defectum addendo $\frac{1}{9}$, quippe qui deficiat ab $\frac{1}{6}$ rurſus per ſui ſemiſſem $\frac{1}{18}$, hic verò non ſuppletur additione ſequentis termini $\frac{1}{27}$ deficientis ab illo reſiduo $\frac{1}{18}$ rursus per ſui ſemiſſem, atque ita porrò ſemper procedendo; ita ut nihilominus ad hos limites, nempe ad unitatem in ſerie prima, & ad ſemiſſem unitatis in ſerie ſecunda, ſemper propius accedatur ſumptis pluribus terminis ejuſdem ſeriei, defectu ſemper decreſcente infra quamlibet aſſignatam quantitatem, (veluti in figuris plurium & plurium laterum, circulo, aut parabolæ, alterive curvo ſpatio inſcriptis, veterum more contingit) donec peni-

penitus in ſeriei fine evaneſcat: cùm id, inquam, experti fuerint, atque attenta meditatione rei hujus naturam contemplaverint, fateantur neceſſe erit, quòd ſi prorſus omnes illi infiniti termini ſimul acciperentur, præcisè forent in prima ſerie æquales unitati, in ſecunda ſerie unitatis ſemiſſi, in aliis alteri quantitati ſimiliter determinandæ.

9. Utì autem in quantitate diſcreta, ita in continua (quæ ſemper in diſcretam dividi, & reſolvi poteſt) idem obtinet; ſpatium quippe infinitè longum in ſpatia determinatæ longitudinis multitudine infinita reſolvi poteſt, quæ poterunt ſemper minora, & minora eſſe, ſi latitudo proportionaliter decreſcere intelligatur, ita ut illa infinita ſpatia per ordinem correſpondeant infinitis terminis alicujus geometricæ progreſſionis, utì certè correſpondent ſpatia Logiſtica ad æquales axis portiones abſciſſa, utì ex dictis *præced. cap. num.* 6. colligitur; omnia ergo hujuſmodi æquè alta ſpatia per infinitam Logiſticæ longtiudinem diſtributa, quum ſint quædam ſeries geometrica proportionaliter decreſcentium terminorum in ratione, vel dupla, vel tripla, vel alia qualibet, prout extremæ ordinatæ cujuslibet æquè alti ſpatii in data ratione acceptæ fuerint, determinatæ magnitudini æqualia eſſe, prout in fractionibus contingit, nil prorſus repugnat, immò vel ex hoc ipſo, quod in fractionibus oſtendimus, evidentiſſimè ita debere contingere demonſtratur; idemque ſimiliter de ſpatiis aliis infinitè longis, de quibus paſſim Geometræ, & nos infra nonnulla dicturi ſumus, abſque ſcrupulo pronunciandum, quòd ſcilicet determinatæ magnitudini æqualia ſint, dummodo tota prorſus accipi intelligantur, nulla ipſorum portione relicta; quod quia conceptu difficillimum eſt, quum infiniti natura reſpuat, nedum ut totum integrè deſignari queat, ſed etiam ut imaginatione comprehendi valeat, ita ut,

poſt quamlibet partem, non aliam, & aliam ejus extenſionem cogitemus, quippe cujus ultimum limitem non concipimus; ideo prudens Auctor cautè addidit: *Spatia illa, non tam abſolutè infinita, quàm juxta illam dimenſionem interminata, ad datam cum ſpatio finito proportionem tam prope accedere, ut diſtare poſſint defectu minori quolibet dato, quamdiu ſcilicet illud ſpatium indeterminatè ſumitur, ut longiùs, ac longiùs protenſum, nec totum ſemel integrè accipi intelligitur, aut ſaltem accipi fingitur.*

10. Mirum autem nemini videatur, quòd idem ſpatium Logiſticæ infinitè longum in ſpatia cujuslibet progreſſionis, nempe terminorum in ratione dupla, tripla, quadrupla, ſeſquialtera &c. decreſcentium, in infinitum diſtribui poſſit, pro varia portionum axis altitudine, quum tamen progreſſiones diverſarum rationum non ejuſdem ſint valoris, ſed progreſſio dupla æqualis unitati, tripla ſemiſſi unitatis, quadrupla trienti, &c. non enim eadem eſt quantitas, quæ locum unitatis obtinet diviſo Logiſticæ ſpatio in terminos rationis duplæ, ac quæ eamdem unitatem repræſentat, cùm dividitur in terminos rationis triplæ, aut quadruplæ; ſiquidem in primo caſu unitas eſt duplum primi ſpatii, in ſecundo triplum ſpatii primi, in tertio quadruplum, &c. quæ ſunt quantitates longè diverſiſſimæ; interea hinc habetur, eamdem magnitudinem eſſe duplam ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione dupla, dimidiam tripli, hoc eſt ſeſquialteram, ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione tripla, trientem quadrupli, hoc eſt ſeſquitertiam ſpatii, cujus ordinatæ ſint in ratione quadrupla, atque ita deinceps, eâdem exiſtente omnium horum ſpatiorum majori ordinata, ſingulis pro communi rationis antecedente inſervientе; adeoque ſi totum Logiſticæ infinitum ſpatium ponatur eſſe partium 12., ſpatium primum, cujus ordinatæ

natæ ſint in ratione dupla, erit partium 6, & cujus ordinatæ in ratione tripla, partium 8, & cujus in ratione quadrupla, partium 9, ac ſimiliter de aliarum rationum ſpatiis ratiocinari licebit; id quod tamen ex primo etiam Auctoris Theoremate facilè deduci poteſt.

11. Neſcio autem, an obiter, dum ferrum candet, exponere generalem regulam juvet, qua dignoſci poſſit, quando ſpatia infinitè longa, vel termini multitudine infiniti, etiam cùm decreſcunt, quantitatem abſolutè infinitam adæquent, & quando prorſus finitam, ac terminatam. Eam certè ante plures annos, quum Theologicis ſtudiis adoleſcentes noſtros imbuerem, in quadam Appendice ad Tractatum de Viſione Dei, talem proferebam. Quoniam, ut innui in notatione Præfationis Vivianeorum Problematum *pag.* 27, duarum quantitatum ratio componitur ex rationibus ſingularum dimenſionum illis quantitatibus competentium, & invicem comparatarum, expendendum eſt, num ratio ex his compoſita ſit ratio finita, nec ne. Jam, aggregatum plurium terminorum, quatenus quædam diſcreta quantitas eſt, unam tamen continuam magnitudinem, & quantitatem integrans, duas habet dimenſiones, quippe ex duplici capite quantitas ex hiſce terminis aggregata creſcere, & major fieri poteſt, nimirum ex terminorum *multitudine*, & ex propria ſingulorum *quantitate*; quò plures enim termini adunantur, eò major, cæteris paribus, quantitas conſurgit, puta, quò plures fractiones in unam ſummam colliguntur, eò major ſumma conficitur; & ſtante aliàs pari terminorum multitudine, quò *majores* in ſe ipſis ſinguli fuerint, eò pariter major magnitudo colligitur; ſic tres fractiones decimales majorem ſummam conficiunt, quàm tres milleſimæ, aut centeſimæ; ut ergo videamus, num propoſitis quibuslibet infinitis termi-

terminis, ii quantitatem infinitam aggregent, an tantùm finitam, obſervandum eſt, an creſcente arithmeticè in infinitum ipſorum multitudine, decreſcat pari ratione, aut majori, vel minori ipſorum quantitas; ſi in eâdem ratione decreſcat, ut in 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, &c. ubi ſecundus terminus eſt ſemiſſis primi, tertius triens ejuſdem, quartus ejus quadrans, &c. prout multitudo duorum eſt dupla unius, trium eſt tripla, quatuor quadrupla, &c. procul dubio quantitas omnium ſimul infinita erit, quia cùm terminorum multitudo ſic æquipolleat ipſorum abbreviationi, ſeu parvitati, ratio quantitatis talium terminorum ad aliam aſſignabilem quantitatem, puta ad unitatem, utpotè compoſita ex ratione multitudinis, & parvitatis eorumdem terminorum reſpectu dictæ unitatis, (altera ratione alteram elidente) erit ratio infinita, & ipſorum terminorum quantitas æquipollebit quantitati infinitorum terminorum invicem æqualium, quæ certiſſimè infinita eſt. At ſi in majori ratione termini decreſcant, ut accidit in ſeriebus *numero* 8. adductis, quæ geometricè decreſcunt, creſcente terminorum multitudine arithmeticè, (atque in aliis bene multis, quæ etſi non geometricè, omnibus tamen compenſatis in majori ratione decreſcunt, quàm creſcat ipſarum multitudo) tunc, præpollente parvitate ſingulorum terminorum eorumdem multitudinis incremento, prodibit, ex utriuſque compoſitione, finita ratio, & aggregabitur quantitas prorſus finita; quando autem in minori ratione decreſcant termini, quàm illorum pluralitas augeatur, ratio pluſquam infinita exinde conſurget, ſeu à fortiori, quàm in primo caſu, dicendum erit, omnium aggregatum quantitatis eſſe ſimpliciter, ut ajunt, infinitæ, præpollente multitudinis incremento ipſorum abbreviationi terminorum.

12. Idem applica ſuperficiebus, aut ſolidis, quorum una,

una, aut altera dimenſio infinita ſit, altera tamen, aut reliquis continuè diminutis; prout enim in majori, aut eâdem, minorive ratione minuetur altera dimenſio, quàm creſcat ea, quæ in infinitum extenditur, judicandum erit ſpatium illud præcisè finitum eſſe, aut infinitum, vel pluſquàm (ſi dicere liceat) infinitum. Hinc Cl. Wallisius in Arithmetica Infinitorum optimè obſervat, ſpatium hyperbolæ, & aſymptoto interjectum, cujus latitudo in eadem ratione minuitur, in qua longitudo aſymptoti creſcit, (propter latera parallelogrammorum æqualium ejuſmodi ſpatio inſcriptorum neceſſariò reciproca) eſſe idcirco infinitæ prorſus magnitudinis; in hyperbolis autem aliorum graduum, ex una quidem parte finitum eſſe, ubi in majori ratione decreſcunt lineæ ad aſymptoton ordinatæ, atque adeo latitudo ejuſdem ſpatii, ex altera autem parte, ideſt ad aliam aſymptoton, pluſquam infinitum exiſtimandum, eò quòd in minori ratione ordinatæ decreſcant; id quod in aliis etiam ſpatiis, tum ſolidis, tum ſuperficialibus obſervari poteſt.

C A P U T V.

Quartum Hugenii Theorema, pridem demonſtratum, nova demonſtratione per diverſam methodum ſtabilitur. Tractoriæ proprietas hinc deducta, quòd ordinatæ ad æquales curvæ partes ſint invicem proportionales. Cuilibet curvæ tangentem ducere. Velocitates in diverſis curvæ punctis ſunt, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alternè ſumptas. In Hyperbola ſunt, ut quadrata temporum contrariè ſumptorum. Determinatio tangentium ad infinitas parabolas. Eadem expeditior. In aliis curvis quomodo tentanda. Variarum ad id conſtructionum demonſtratio. Subtangens curvarum, quæ ad modum Spiralium deſcribuntur.

buntur. Infinitæ Spiralium ſpeties, quas ſubtangentes habeant, & quomodo infinitis parabolis reſpondeant. Tangens Spiralis Geometricæ, & quarumvis figurarum per alterius convolutionem genitarum. Tangens Conchoidis Nicomedeæ, aliis infinitis Conchoidibus & Subconchoidibus applicabili methodo, oſtenſa. Eadem geometrica demonſtratione confirmata. Tertia demonſtratio quarti Theorematis Hugeniani. Curva parabolica Logiſticæ ſemper perpendicularis.

1. QUartum Auctoris Theorema; *Quòd ſubtangens, ut BO in eadem figura, ejuſdem ſemper eſt longitudinis, ad quodvis Logiſticæ punctum tangens pertineat*, alia demonſtratione non indiget, quum probatum fuerit *Cap.* 4. *num.* 3. ſubtangentem æqualem ſemper eſſe Parametro hujus curvæ, quæ linea quædam conſtans, & definita eſt; verùm ad pleniorem ſcientiam id aliter, atque aliter demonſtrabimus, diverſa methodo, eaque ad alias longè veritates applicabili.

TAB. XII. Fig. 7. 2. Secunda igitur hujus Theorematis demonſtratio ſic inſtitui poterit. Sint quælibet ad axem Logiſticæ ordinatæ AB, VC, tangentes ad eadem puncta AO, VQ. Dico interceptas ordinatis, & tangentibus, BO, CQ (quæ ſubtangentes appellantur) æquales eſſe. Sumatur quantumvis parva BE, illique æqualis CG, ut ordinatis ED, GF portio tangentis AD ferè cum curva AD, & portio tangentis VF ferè cum curva VF coincidere cenſeri poſſit, ob infinitè parvum intervallum utrivis ordinatarum pari interjectum; erit igitur ex natura curvæ, in qua ſunt puncta D, F, ipſa AB ad ED, ut CV ad GF, juxta primariam Logiſticæ affectionem; rurſus cùm puncta D, F ſupponantur & in tangentibus eſſe, erit AB quidem ad ED, ut BO ad OE; CV verò ad GF, ut CQ ad QG; ergo eadem erit ratio

BO

BO ad OE, quæ CQ ad QG, & per converſionem rationis, eadem ratio BO ad BE, quæ QC ad CG; ſuntque conſequentia æqualia; igitur & antecedentia BO, CQ æqualia erunt. Q. e. d.

Poterat rigoroſiùs argui per deductionem ad abſurdum; ſed quorsum ita? Obſerva potius quid eveniſſet, ſi natura curvæ ea foret, ut ſumptis non in axe, ſed in ipſa curva æqualibus portionibus AD, VF, eædem ordinatæ proportionales eſſent; An non enim eodem argumento conſtaret, OA ad AD eſſe, ut QV ad VF? unde conſequentibus æqualibus exiſtentibus, etiam antecedentia, ſcilicet, tangentes ipſas AO, VQ ubilibet æquales futuras, adeoque ejuſmodi curvam illam ipſam fore, quam *Tractoriam* vocant? eam ſcilicet, quam deſcriberet grave A funi AO alligatum, dum funis extremum O per rectam OQ trahitur in eodem horizontali plano; pondus ſiquidem perfectè ſequetur ejuſdem funis directionem, adeoque ejus viæ tangens erit perpetuò eadem funis longitudo: quamquam hoc generale eſt, ut cùm relatio ordinatarum ad axem mutatur in relationem ordinatarum ad curvam, eadem expreſſio ſubtangentis tranſeat ad ipſam tangentem, ut pluribus exemplis confirmare in promptu eſſet.

3. Utilius erit Tertiæ demonſtrationi ejuſdem Theorematis viam ſternere generali quodam lemmate circa tangentium inventionem præmiſſo, quod ex Torricellii doctrina obiter indicata in l. 1. de mot. gr. prop. 18. ejuſque Scholio, in hunc modum deduxi; ſicque univerſaliter proponere ſtatui. *Ad datum cujuslibet curvæ punctum tangentem ducere.* Datum ſit punctum A curvæ cujuslibet DAV, cujus axis BC, ordinata ex data puncto AB concipiatur hæc curva deſcripta motu ordinatæ BA per axem BC æquabiliter fluentis, ſibique æquidiſtanter delatæ, & ex motu puncti TAB. X Fig. 4. 5.

A

A verſùs B accedentis, vel ab eodem in ipſa linea recedentis, non jam æquabiliter (ſic enim recta linea, non curva deſcriberetur) ſed velocitate accelerata, aut retardata, prout opus ad eam curvam generandam. (quælibet certè curva hoc modo genita intelligi poteſt) Fiat igitur, ut velocitas, quam punctum fluens habet in ſitu A ad velocitatem ordinatæ æquabiliter delatæ, ita ipſa ordinata AB ad portionem axis BO, acceptam verſùs eas partes, ad quas motus acceleratur, ſi curvæ cavitas axem reſpiciat, ad quas verò retardatur ſi curva axi convexitatem obvertat: Dico junctam OA eſſe tangentem. Sumatur enim in ipſa OA, ad partes accelerationis punctum *i*, ad partes verò retardationis punctum I, ordineturque *cui*, CVI occurrens axi in *c*, C, curvæ in *u*, V, axi parallelæ AE per A ductæ in *e*, E. Quoniam velocitas puncti A per AB fluentis ad velocitatem lineæ AB per axem delatæ, eſt, ut AB ad BO, ſeu IE ad EA, aut *ie* ad *e*A, manifeſtum eſt, quòd ſi motus puncti A non acceleraretur, aut retardaretur, fieret per ipſam AI, ſeu A*i*, ita ut quo tempore ordinata deſcenderet, aut aſcenderet per BC, ſeu AE, aut B*c*, ſeu A*e*, punctum A percurreret partem EI, ſeu *ei*, repereturque in I, vel *i*. Verùm, quoniam motus puncti A curvam deſcribentis interea acceleratur verſùs *u*, & verſùs contrariam partem V retardatur, ita ut velocitas ipſius A in A major ſit, quàm in V, quia verſùs eas partes remittitur, minor autem, quàm in *u*, quum verſùs eas partes invaleſcat; ideo quo tempore ordinata venerit in CE, punctum A curvam generans minorem ordinatæ portionem EV confecerit, quàm confeciſſet ſi priſtinam velocitatem retinuiſſet; minor eſt igitur EV, quàm EI; cùm verò ordinata venerit in *ce*, punctum A curvam generans majorem ejuſdem ordinatæ tractum *eu* pertranſierit, quàm ſi priſtinæ velocitati

locitati nullos accelerationis gradus addidiſſet; major eſt igitur *eu*, quàm *ei*; & ideò puncta I, *i* ſunt utrobique ultra, & extra curvam, quare ipſa OA tangit. Quod erat demonſtrandum.

Obſervare hinc juvat, velocitates puncti non æquabiliter fluentis, veluti in figura DAB ad axem CV comparata, in punctis D, A, eſſe ad invicem, ut facta ex ordinatis in ſubtangentes alternatim ſumptas, putà, exiſtentibus tangentibus DP, AV, ordinatiſque DE, AF, ut factum ex DE in FV ad factum ex AF in EP; nam velocitas puncti fluentis in D ad ſimilem velocitatem in A rationem compoſitam habet ex velocitate talis puncti in D ad æquabilem velocitatem lineæ deſcendentis, & ex hac ipſa velocitate ad velocitatem puncti ejuſdem in A; ſed prima ratio, ex hoc Theoremate, eadem eſt, quæ DE ad EP, ſecunda verò eadem, quæ VF ad FA; igitur ratio velocitatis puncti fluentis in D ad velocitatem ejuſdem in A componitur ex DE ad EP, & ex VF ad FA, ideſt eadem eſt, quæ facti ex DE in FV, ad factum ex AF in EP. TAB. XIV. Fig. 2.

Unde adhuc colligitur, in Hyperbola Apolloniana DAB, cujus aſymptoti SC, CV, velocitates puncti fluentis in quibuslibet punctis D, A eſſe in duplicata ratione temporum contrariè ſumptorum; ſpatia enim æquabili motu lineæ per axem CV delatæ tranſacta, velut CE, CF ſunt, ut tempora; ſubtangentes autem EP, FV ſunt ipſis EC, FC diſtantiis à centro æquales; ergo eædem ſubtangentes pariter ſunt, ut EC, FC, ſeu ut FA, ED; ratio igitur facti ex DE in FV, & ex AF in EP, erit eadem, quæ facti ex DE in FC, & ex AF in EC ideſt compoſita ex DE ad AF, & ex FC ad CE, quæ eadem eſt priori, unde cum illa componit duplicatam rationem FC ad CE, quæ proinde duplicata erit temporum contrariè ſumptorum,

ſicut & homologarum ordinatarum DE, AF; & hoc erat demonſtrandum.

TAB. XV. Fig. 6. 4. Hinc tangentes omnium in primis parabolarum determinationem accipiunt; quemadmodum ſi C *a* A fuerit parabola quadratica, quæ æquabili motu ipſius CN per CΦ ſibi æquidiſtanter delatæ, ac deſcenſu naturaliter accelerato, ideſt ſingulis æqualibus temporibus novum ſibi celeritatis augmentum ſuperaddente, puncti C versùs N per lineam fluentem demiſſo deſcribitur, contingit, ordinata ex foco *n* ipſa *na*, celeritatem puncti deſcendentis in quolibet curvæ puncto A ad æquabilem celeritatem ipſius lineæ delatæ ſemper eſſe, ut ordinata ex dicto puncto AN ad prædictam ordinatam ex foco *na*, juxta citatam prop. Torricellii; eò quòd, cùm velocitates deſcenſuum creſcant, ut tempora, atque adeò ut ſpatia motus æquabilis, ideſt ut ΦC, *f*C, ſeu AN, *an*, quas linea NC æquabiliter tranſilit, ſi velocitas deſcenſus in A ſit ut AN, velocitas in *a* erit ut *an*; velocitas autem deſcenſus in *a* eſt æqualis velocitati motus æquabilis, quia ordinata ex foco *an* dupla eſt abſciſſæ *cn*, eadem verò eſt celeritas, quæ motu in hac ratione accelerato acquiritur deſcenſu per C*n*, & qua æquabiliter perſeverante conficitur duplum ſpatium *na*, igitur ſi velocitas in A ſit AN, velocitas motus æquabilis erit eadem quæ deſcenſus in *a*, ideſt erit, ut *na*: quemadmodum igitur hoc in quadratica obtinet, ita in cubica, ubi celeritates deſcenſuum creſcunt in duplicata ratione temporum, ideoque ſunt, ut quadrata ſpatiorum motus æquabilis, ſcilicet AN, *an*, comparando deſcenſum in A ad deſcenſum in *a* (facta priùs *an* tripla abſciſſæ C*n*, quia hoc accelerationis genere velocitas per C*n* deſcendendo acquiſita, triplo ſpatio *an* percurrendo par eſt, ſi æquabiliter permanere intelligatur,

gatur, unde ſimiliter velocitas deſcenſus in *a* æqualis erit velocitati æquabili lineæ) habebitur, velocitatem deſcenſus in quovis puncto A eſſe ad æquabilem illam lineæ delatæ velocitatem, ut quadratum AN ad conſtans quadratum *an*; ſimili ratione in parabola quadrato-quadratica erit velocitas deſcenſus in A ad illam æquabilem velocitatem, ut cubus AN ad *an* poſitam quadruplam ipſius *n*C abſciſſæ, atque ita deinceps in aliis gradibus, facta ordinata *an* tam multiplici abſciſſæ C*n*, quàm multiplex eſt unitatis exponens ordinatarum.

5. Quamquam vix operæ pretium fuerit iis velocitatibus comparandis inſiſtere in parabolarum genere, ubi ſemel conſtiterit in quonam puncto velocitas æquabilis motus adæquet celeritatem deſcenſivam, invento ſcilicet ſemel puncto *a*, ubi ordinata *an* æqualis eſt ſubtangenti *nb* (quod quidem evenit ubi *an* ad *n*C eſt, ut exponens gradus parabolæ ad unitatem, ſcilicet in quadratica, ut 2 ad 1; in cubica, ut 3 ad 1. &c) quia enim curvæ parabolicæ ſimili in ſingulis ſuis partibus accelerationis genere deſcribuntur, ita continuè ordinato, ut ſpatia curvilinea ad circumſcriptum parallelogrammum æqualem ſemper rationem obtineant, etiam in his eadem ſemper erit ratio ſubtangentis *bn* ad abſciſſam *n*C, vel ſpatii C*f* ad interceptam à tangente *fd*; undè cùm notum fuerit *an*, ſeu *bn* ad *n*C duplam eſſe in quadratica, triplam in cubica parabola, &c. etiam BN ad NC in eadem ſemper ratione eſſe manifeſtum erit, quare expeditius dabitur tangens ad quodlibet punctum A.

Similiter & in Hyperbolis, quarum pariter uniformis eſt ubique acceleratio, undè & parallelogrammorum quibuslibet ſpatiis inſcriptorum eadem ſemper eſt ad infinitè longa ſpatia iiſdem baſibus inſiſtentia proportio, ſubtangentes ad diſtantias à centro eamdem

perpetuò rationem obſervabunt. Invento itaque in
TAB. XI. Fig, 9. Hyperbola AaC ad aſymptoton fD, Db puncto a, ubi ſubtangens æquatur ordinatæ, ideſt, ubi velocitas motus æquabilis deſcenſivam adæquat (quod quidem evenit, ubi an ad nD eſt, ut exponens gradus Hyperbolæ ad unitatem, ſcilicet in lineari, ſeu Apolloniana, ut 1. ad 1.; in quadratica, ut 2 ad 1.; in cubica, ut 3 ad 1.&c. prorſus ut in Parabolis contintingit, ſimili enim cum illis motu deſcribuntur, ſed dumtaxat reciprocè poſito, undè evenit ſubtangentes cadere ad partes oppoſitas axis origini, ideſt ſub ipſis ordinatis) cùm conſtiterit ſubtangentem inventi puncti a, nempe bn eſſe æqualem in prima, duplam in ſecunda, triplam in tertia Hyperbola diſtantiæ à centro nD, notum ſimiliter erit, etiam quamlibet aliam ſubtangentem BN in eadem eſſe ratione ad diſtantiam ND ſuæ ordinatæ NA ab eodem centro.

6. Difficilior eſt aliarum figurarum tractatio, in quibus non uſque adeò perſpecta occurret ad ſingula puncta velocitatum in curvæ geneſim conſpirantium proportio; generaliter tantùm dici poſſet, velocitates deſcenſivas ad ſingula curvæ puncta eſſe ad invicem, ut ſpatia ſynchronis quibuſcumque temporibus peracta, ſive ut differentiæ æquè diſtantium ordinatarum in-
TAB. XV. Fig. 6. tervallo infinitè parvo diſſitarum, ſeu ſi concipiatur ad axem $Cf\Phi$ curvæ cujuslibet CaA applicata figura ΦGgC, cujus portiones à vertice abſciſſæ per ordinatas, veluti gCf, $GC\Phi$ ſint ad invicem, ut ordinatæ ad priorem curvam fa, ΦA, quo fiet lineas ipſas fg, ΦG, utpote minimas, & infinitè parvas differentias duorum ex talibus ſpatiis à vertice abſciſſorum, optimè repræſentare infinitè parvas differentias ordinatarum fa, ΦA, quibus dicta ſpatia proportionantur, adeòque etiam exprimere gradus velocitatum motus deſcenſivi, ita ut ſi talis celeritas in a ſit, ut fg, in

A

A futura ſit, ut ΦG; & ſi reperiatur in curva tale punctum *a*, cujus ordinata *af* ad abſciſſam *f*C in eadem ſit ratione, in qua ſpatium *fg*C ad parallelogrammum illi circumſcriptum *fgb*C, habebitur in *a* puncto velocitas deſcenſiva æqualis celeritati tranſverſi motus æquabilis, adeòque hæc velocitas æquabilis optimè exprimetur per *fg*, cæteris deſcenſivi motus celeritatibus per alias parallelas, ut ſupra, determinatis; & ſi fiat, ut parallelogrammum circumſcriptum cuivis ſpatio CGΦ ad ipſummet ſpatium, ita BN ad NC, aut CΦ ad Φ*f*, juncta AB, ſeu A*f*, erit tangens; ſimiliter ſi fiat ut rectangulum AΦG ad ſpatium ΦGC, ita AΦ ad Φ*f*, aut ſi ad rectam ΦG applicetur ſpatium ΦGC, & faciat latitudinem Φ*f*, juncta A*f* tanget, quorum unum vel alterum juxta variam curvæ naturam, ejusve geneſim, præſertim ſi ab initio figura CGΦ determinata fuerit (ut ſi quæratur de curva C*a*A genita ex tranſverſali æquabili motu lineæ CN per datam CΦ, & deſcenſivo puncti C per totam CN, ita accelerato, ut in quovis puncto *a* gradus ejus celeritatis proportionetur ordinatæ *fg* dati trilinei, alteriuſve figuræ CGΦ datæ, & ad datam lineam CΦ applicatæ) aut aliquid cum his connexum facilè innoteſcet, ac tangens expeditè determinabitur.

7. Quorum omnium ratio, quamquam ſufficienter in demonſtratione *num.* 3. allata contineatur, breviter indicari poterit ſic. Tangens ad aliquod curvæ punctum illa recta eſt, quam deſcripſiſſet, & deſcribere pergeret punctum deſcendens, ſi gradum velocitatis, quem in dato curvæ puncto obtinet, æquabiliter retinuiſſet, tranſverſali lineæ motu eodem remanente; ex eo enim, quòd, remota acceleratione, motus puncti A, in *fig.* 4. *Tab.* X. fieret per AI, oſtenſum eſt AI tangentem eſſe; at ſi fiat (*Tab.* XV. *fig.* 6.) BN ad NC, ut parallelogrammum BGΦC ad figuram CGΦ, juncta BA erit

via, cui inſiſteret punctum deſcendens, modò gradum celeritatis ſuæ ΦG toto tempore CΦ retinuiſſet (confeciſſet enim ſpatium BN, quod ad NC accelerate percurſum foret, ut planum velocitatis æquabilis ΦGBC ad planum acceleratæ ΦG*g*C, ſpatium verò tranſverſali motu emenſum eſſet eadem NA) igitur juncta in tali conſtructione AB erit tangens; cùmque & CΦ ad Φ*f* ſit in eadem ratione BA ad A*f*, ſeu BN ad NC; necnon AΦ ad Φ*f* rationem habeat compoſitam ex AΦ ad ΦC, ſeu rectanguli AΦG ad CΦG, & ex ipſa CΦ ad Φ*f*, quam vidimus eſſe, ut rectangulum CΦG ad ſpatium GCΦ; itemque cùm CΦ ad Φ*f* ſit, ut rectangulum CΦG ad *f*ΦG; igitur ſi fiat CΦ ad Φ*f*, ut parallelogrammum circumſcriptum ſpatio ΦGC ad idem ſpatium, aut AΦ ad Φ*f*, ut rectangulum AΦG ad idem ſpatium, aut applicetur ipſi ΦG dictum ſpatium, & faciat latitudinem Φ*f*, ſemper juncta A*f* erit tangens; ſed quorſum plura? præcipuæ ex his conſtructionibus, unde cæteræ pendent, geometricam confirmationem (ſi abſtracta hæc motuum conſideratio obſcurior, aut minùs tuta videatur) habebis infra, *cap.* 13. *num.* 2.

8. Eadem ferè applicari poſſunt aliis curvis ex circulari, & progreſſivo motu deſcriptis, quemadmodum infinitæ Spiralium ſpecies, Conchoides diverſorum generum, Cycloides anomalæ P. Cevæ, & aliæ quamplurimæ [imò quid vetet, ubi commodum acciderit, figuram prorſus omnem ejuſmodi motibus compoſitam concipere, electo intra, aut extra ipſam quovis puncto, velut circularis motus centro, undè protenſi ad curvam rami radiorum elongationem, pro vario progreſſivi motus puncti per ipſos fluentis incremento, exhibeant?] illud tamen in his obſervandum, quòd ſicuti *cap.* 1. *num.* 12. ad geneſim Spiralis Geometricæ per convolutionem Logiſticæ, totus ejus axis in punctum contrahebatur, ordinatis ad æquales axis portiones

tiones in totidem ramos æqualibus angulis divaricatos abeuntibus, ita ad rem noſtram æquabilis motus lineæ per axem delatæ in circularem circa centrum commutandus eſt, deſcenſus verò puncti, aut progresſus per ordinatas, debet in progreſſum puncti per curvæ ramos, ſeu radios figuræ converti; atque ut velocitas progreſſivi motus ad circularem, ita ipſe ramus, ſeu radius ſpiralis, alteriuſve figuræ præfato modo deſcriptæ, ad portionem lineæ ex centro perpendiculariter ad eumdem radium inſiſtentis, utpote parallelæ tangenti arcus per circularem motum deſcripti, in qua eſt ipſius directio: hoc inſuper animadverſo, quòd circularis ille motus æquabilis eodem velocitatis gradu minimè pollet in ſingulis curvæ punctis, ſed pro varia puncti curvæ à centro diſtantia variatur, ut per ſe notum eſt, quippe non in eadem peripheria ALN, verbi gratia, ſumitur circularis motus puncti *a* ſpiralis C*a*A, in qua ſumitur circulatio puncti A, ille quippe ſumendus in peripheria *a*I radio C*a* deſcripta, quem ſolum motum participat ſpiralis in puncto *a*. TAB. XV. Fig. 3.

9. Atque inde eſt, quòd ſubtangens quidem puncti A in ſpirali Archimedea poſt integram revolutionem radii CA æqualis eſt peripheriæ ALNA eodem radio deſcriptæ (exiſtente ſiquidem hìc utroque motu æquabili, ipſorum velocitates ſunt, ut ſpatia eodem tempore percurſa, ut ſi velocitas progreſſivi motus ſit CA, velocitas circularis ſit ipſa CB ſubtangens æqualis peripheriæ eodem tempore percurſæ) at verò ſubtangens *bc* puncti alterius *a* eadem non erit, ac quæ ad dictam peripheriam ſit, ut C*a* ad CA, ut æquabilitas motus exigeret, ſed velocitate progreſſivi motus expreſſa per C*a*, velocitas motus circularis erit tantò adhuc minor, quantò propius centro eſt punctum *a*, ideſt, ut arcus I*da*, quem eò uſque linea

C*a*

Ca illo puncto deſcripſit, & cui propterea ſubtangens cb æqualis erit; itaque decreſcunt ſubtangentes in duplicata radiorum ratione, quia ſemel ob diminutionem radii, & ſemel adhuc ob pariformem diminutionem circularis velocitatis, atque adeò vertice C deſcripta parabola CLK, ductiſque AK, IL ejus axi parallelis, erunt hæ ad invicem, ut ſubtangentes radiis helicis CA, & Ca (æqualis CI) reſpondentes; quòd ſi Spiralis ejus generis fuerit, ut ſpatia AC, aC motu progreſſivo percurſa ſint in ſubduplicata temporum, aut arcuum circulari motu æquabiliter percurſorum ratione, manifeſtum eſt progreſſivam celeritatem puncti A, vel a ſubduplam fore ejus, quæ fuerat in prima Spirali, & exponendam per ſemiſſem radiorum CA, vel Ca, ſi eadem retineatur linea exponens celeritatem æquabilis circulationis, aut ſi illa exponenda ſit per integras lineas CA, Ca, æquabilem celeritatem exponendam fore per priorum ſubtangentium duplas; erit igitur in hoc caſu ſubtangens CB dupla circumferentiæ ALDA, & ſubtangens Cb dupla arcus adI, qui ex tribus capitibus minor erit illa circumferentia, nempe in duplicata radiorum ratione, & in earumdem ſimplici adhuc decremento ob approximationem centri, unde parabola cubica CLK deſcripta, in qua axi parallelæ KA, LI ſint in triplicata radiorum AC, CI ratione, ſive ut eorumdem cubi, erunt ipſæ axi parallelæ, ut ſubtangentes ad correlativa curvæ ſpiralis puncta; ſimiliter in aliis Spiralium ſpeciebus, ac parabolis per ordinem correſpondentibus procedere potes; quod innuiſſe juvabit ad comparandas Spirales curvas cum congruis curvis parabolicis, utì aliàs facturi ſumus, oſtendendo, quòd ſi AK ſit æqualis $\frac{1}{2}$ circumferentiæ ALD in prima Spirali, aut $\frac{2}{3}$ ejuſdem in ſecunda, aut $\frac{3}{4}$ in tertia, $\frac{4}{5}$ in quarta, &c. prima parabola exiſtente quadratica, ſecun-

ſecunda cubica, tertia quadratoquadratica, &c. Lineæ, ſpiralis, & parabolica æquales erunt; Immò etſi motus circularis & ipſe æquabilis non fuerit, ſed acceleratus, congruæ parabolæ nihilominus reperientur earumdem nempe poteſtatum in axe, & ordinatis, quot fuerint in reſpondentis Spiralis circumferentia, & radio, ſed ordinatis parabolæ ad tantò plures gradus elevatis, quot fuerint unitates in exponente poteſtatum axis; neque enim difficilior eſt ſubtangentium & ad has Spirales determinatio, faciendo ſemper, ut velocitas progreſſiva ad circularem, ita AC, vel *a*C ad ſubtangentem CB, aut C*b* ex centro perpendiculariter ductam ad ſuum radium, utì pluribus explicare ſuperfluum eſt.

10. In Spirali Geometrica, quoniam ex dictis *cap.* I. *n.* 12. illa per convolutionem Logiſticæ deſcribitur ad maximum radium CA, poſita CB ſubtangente æquali ſubtangenti ejuſdem Logiſticæ, quæ convolvitur, aliæ ſubtangentes C*b* tantò minores primâ CB faciendæ ſunt, quantò minor eſt C*a* ob rationem in fine *num.* 8. indicatam, quia in ipſa evoluta Logiſtica ſubtangens cujuſvis ordinatæ ſemper eadem eſt, ut ſupra oſtendimus, & mox poſt illuſtratam hanc methodum oſtenſuri ſumus; atque inde eſt, quòd triangula CAB, C*ab* ſemper ſimilia ſunt, angulique à radiis, & tangentibus æquales, totaque curva A*a*C æqualis tangenti AB, & *aa*C tangenti *ab*, &c. immò univerſaliter, ſi curva quælibet convolvi in Spiralem intelligatur eo modo, quo de Logiſtica citato loco expoſuimus, ſubtangentes radiorum quorumlibet Spiralis erunt tantò minores, quàm forent ſubtangentes reſpondentium æqualium ordinatarum evolutæ, quantò propiora centro ſunt puncta extrema dictorum radiorum, quàm punctum extremum maximi radii, quo vides nedum Helicis Archimedeæ, aliarumque diverſorum graduum, per convolutiones, trianguli, parabolæque, quadraticæ, cu-

TAB. XV. Fig. 8.

 bicæ,

bicæ, &c. genitarum, tangentes determinari cohærenter ad dicta numero ſuperiori, ſed infinitarum prope aliarum Spiralium, quæ ex quavis figura ſic convoluta oriri poſſunt.

11. Non raro autem juvabit duorum in eodem radio punctorum motum invicem comparare, quorum alter cognitus ſit, alter certam ad illum proportionem obtineat: exemplo res clarior fiet. Eſto Nicomedea Conchois A*a*B, polo P, regula FH deſcripta, intervallo AF, cui æqualis ſupponatur GP radius circuli G*g*M, & quæratur tangens puncti B; juncto ramo PB ſecante prædictum circulum in M, regulam in D, conſidero curvam A*a*B genitam ex circulari motu lineæ PA circa P, & ex progreſſivo puncti A per ipſam PA ita aſcendentis, ut, non obſtante ejus inclinatione ad regulam FH, ipſum punctum eamdem ſemper à regula diſtantiam obſervet, ſit nempe FA ſemper æqualis DB; progreſſus igitur puncti A venientis in B, nempe exceſſus PB ſupra PA idem erit, ac exceſſus PD ſupra PF; eadem igitur velocitas erit hujus progreſſivi motus, atque illa quam haberet punctum F, ſi in circulatione PF ita per ipſam aſcenderet, ut ſemper reperiretur in regula FH, eamque re ipſa deſcriberet. Velocitas autem circularis in deſcriptione Conchoidis erit ad punctum B tantò major, quàm circularis velocitas in deſcriptione rectæ FH ad punctum D, quantò major eſt BP, quàm PD. Ducta igitur tangente circuli SMO, atque huic parallelis DI, BC, junctaque PIC, ducatur ramo PB parallela IK, occurrens regulæ in K, atque eidem parellela CQ æqualis ipſi IK, juncta QB erit tangens quæſita; motus ſiquidem per DK componitur ex motu per DI parallelam tangenti MS, quæ circularis motus directionem exhibet, & ex motu per IK parallelam PD, in qua eſt motus progreſſivus; ſed & motus per A*a*B componitur ex eodem

TAB. X. Fig. 6.

eodem progreſſivo, qualem exhibet linea CQ æqualis, & parallela ipſi IK, & ex circulari in eadem directione, ſed tantò majori quantò longior eſt BP, quàm DP, adeòque optimè exprimendum per BC, quæ ad DI in eadem ratione reſpondet; igitur juncta QB dabit directionem motus ex utroque compoſiti; ideſt tangentem ad punctum B. Simili modo etiam Subconchoidis, (ſic voco curvam, ad quam ſunt puncta abſcindentia ex ramis PF, PD infra regulam æqualia intervalla) aliarumque ſpecierum in infinitùm curvarum Conchilium, & Subconchilium, cùm ſcilicet abſciſſa ex ramis, vel ſupra vel infra regulam, intervalla, non quidem radiis PM quadrantis circularis æqualia ſunt, ſed ſubtenſis, ſeu ramis PM, P*g* alterius cujuslibet figuræ GM*g* (quomodo ſi hæc ſit ſemicirculus circa diametrum PF, habebitur infra regulam Ciſſois Dioclea in infinitum continuata, quam proptereà ad genus Subconchilium revoco) tangentes expeditè dabuntur, quas etiam geometricis demonſtrationibus confirmare, & generali quadam conſtructione exprimere in promptu eſſet, niſi verendum foret, ne longiùs ab inſtituto digrederer; itaque ſolam primariæ Conchoidis geometricam demonſtrationem, & qua Lector, ſi acuto pollet ingenio, facilè ſibi cæteras comparabit, in medium afferam, quæ quidem eſt hujuſmodi.

12. Supponatur BC concurrere cum regula in C; (poteſt enim tum BC, tum DI cujuslibet longitudinis eſſe, dummodò intra ramum PB, & junctam PC contineantur) ducto autem quovis alio ramo P*a*, ſecante regulam in *f*, ponatur *f*E æqualis, non quidem radio P*g*, ſed P*m* ſecanti anguli MP*g*, & ſic ubique fiat, ut habeatur curva EBE, quam manifeſtum eſt tangere Conchoidem in B; quia, cùm P*m* ſemper major ſit radio P*g*, etiam *f*E major erit intervallo Conchoidis *fa*; puncta igitur E ſemper ſunt ſupra

puncta *a* Conchoidis; ut igitur obſervat Verus Geometra in Recreatione Geometrica, quæ linea recta tanget curvam EBE, eadem tanget Conchoidem *aBa*, propter angulum contingentiæ ſemper indiviſibilem, minoremque, ut dici ſolet, quovis angulo rectilineo. jam verò oſtendemus curvam EBE eſſe hyperbolam intra aſymptotos HNO, ejuſque tangentem eſſe ipſam BQ convenientem cum regula in H; quia ducta PS regulæ parallela, occurrente tangenti MS in S, ob triangula ſimilia DBC, PMS, quorum latera BD, PM ſunt æqualia, æquales etiam erunt baſes DC, PS, unde juncta SC æquidiſtabit ipſi DM; quare CN ad NS erit, ut DN ad NM, ſeu ut PS ad SM, vel CB, adeòque rectangulum NCB æquale erit ipſi NSP; eodem modo ducta ER ipſi BC parallela oſtendetur junctam SR æquidiſtare ipſi *mf*, adeòque NRE æquale eſſe eidem NSP; æqualia igitur cùm ſint rectangula NCB, NRE, curva EBE erit hyperbola intra angulum HNO; cùmque ſit NC ad CD, ut MB, ſeu PD illi æqualis ad BD, ideſt (extenſa IK ad BC in L) ut BL ad LC, ſeu IK ad KL, nempe CQ [æqualis ex conſtructione ipſi IK] ad exceſſum DB ſupra CQ, aut denique ut CH ad eamdem CD, erit NC ipſi CH æqualis; ergo HQB hyperbolam in B tangit, & conſequenter Conchoidem: quod nobis propoſitum erat demonſtrare.

TAB. XII. Fig. 7. 13. Jam tandem, ut promiſſam Theorematis IV. Hugeniani demonſtrationem ex ea, quam propoſuimus, methodo abſolvamus, ſi in Logiſtica fiat, ut velocitas puncti A illam deſcribentis, juxta geneſim *cap.* 1. *num.* 5. indicatam, ad æquabilem velocitatem lineæ AB per axem delatæ, ita AB ad BO, conſtat ex dictis *num.* 3. atque hactenus abundè illuſtratis, junctam AO eſſe tangentem; ſimiliter ſi fiat, ut eadem æquabilis velocitas ad velocitatem puncti fluentis in V, ita QC ad CV,

juncta

junɖa V Q tanget; habebit igitur velocitas in A ad velocitatem in V rationem compoſitam ex AB ad BO, & ex CQ ad CV, ſive erit, ut AB in CQ ad BO in CV; ſed eædem velocitates, ex dictis tum *cap.* 1. *num.* 3. tum indicatis hìc *n.* 6., ſunt etiam ut BA ad CV; omnes quippe ordinatarum æquo intervallo diſtantium differentiæ ſunt ipſis totis ordinatis proportionales, igitur AB in CQ ad BO in CV, eſt ut AB ad CV, quare ſubtangentes BO, CQ ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.

14. Hinc obiter colligere poſſumus, quòd ſi parabola, cujus parameter dupla fuerit parametri Logiſticæ, circa eumdem axem conſtituta fuerit, aut juxta ipſum axem fluere concipiatur, in quovis ſitu alteram altera ad rectos angulos ſecabit, putà parabola VF, cujus parameter dupla ſit ſubtangentis Logiſticæ GQ, & ad communem cum ipſa axem conſtituta, aut juxta ipſum fluens, utraque ſe interſecante in puncto F, aut *f*, angulus curvarum VFA, aut *uf*A ſemper erit rectus; Cùm enim intercepta GQ, inter ordinatam, & QF perpendicularem parabolæ, ſit dimidia ſuæ parametri, demonſtrante id Vero Geometra in Clariſſ. de Max. & Min. Op., erit in hoc caſu æqualis ſubtangenti Logiſticæ; ergo QF tangens Logiſticæ, ideſt ipſamet curva AF, erit perpendicularis parabolæ VF, & è contra tangens EF parabolæ, ſeu ipſa curva parabolica VF, erit perpendicularis tangenti Logiſticæ QF, ſeu curvæ AF in puncto quovis ſibi occurrant. TAB. X. Fig. 7.

CAPUT VI.

Quintum Theorema proponitur, quod ut demonſtretur, oſtenditur, Hyperbolica ſpatia parallelis aſymptoto proportionalibus definita æqualia eſſe; ſpatia quælibet eam inter ſe rationem habere, quam extremarum ordinatarum rationes. Axi Logiſticæ parallelæ inter ſe ſunt, ut Hyperbolica ſpatia iis reſpondentia. In Geometrica Spirali, arcus, & ſectores circulares ejus ramis interjecti, proportionantur ſpatiis, & ſectoribus Hyperbolicis reſpondentibus. Subtangens Logiſticæ ad quamvis axi parallelam eſt, ut parallelogrammum Hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium Hyperbolicum. Demonſtrandi modus à ſcrupulis vindicatur. Propoſitio univerſalior redditur. Quid ſit facere Univerſale. Prima Geometricæ Spiralis ſubtangens eſt ad arcus circulares, ut Hyperbolæ parallelogrammum ad Hyperbolica ſpatia. Spatia Hyperbolica, aut ſectores Hyperbolici in ea ſunt ratione ad circulares ſectores correſpondentes, in qua minima ordinatarum hyperbolæ ad ſemiſſem ſubtangentis Logiſticæ. Parallelogrammum Hyperbolæ inſcriptum ad ſpatium ordinatis duplæ proportionis injectum eſt proximè, ut 10. ad 7. Quinti Theorematis Hugenii demonſtratio.

1. LOngiùs in præcedenti capite progreſſi fuimus, quàm ab initio ſperabamus: habenæ ideo contrahendæ in præſenti, in quo Quintum Hugenii Theorema nobis demonſtrandum proponimus. *Hæc longitudo*, inquit de ſubtangente, *per approximationem reperitur, eſtque ad partem aſymptoti interjectam ordinatis proportionis duplæ, ut* 434294481903251804 *ad* 301039995663981195, *ſeu proximè, ut* 13 *ad* 9. Quia tamen infiniti penè laboris, ac tedii eſſet longiſſimos hos

hos Hugenii numeros perſequi, neque ad manum Tabulæ Logarithmicæ ad tam multiplices notas extenſæ occurrunt, quibus veriſimile eſt uſum Hugenium ad ejuſmodi calculum expediendum, ideo eumdem lapidem alia methodo movere aggrediar, majorique tum compendio, tum emolumento, vel ad hanc ipſam, vel ad aliam huic propinquam dictarum linearum proportionem intelligendam, Lectorum mentes diſponam.

2. Præmittendum igitur, quòd Hyperbolæ, & Aſymptoto interjecta ſpatia, alteri aſymptoto parallelis proportionalibus terminata, invicem æqualia ſunt; id quidem Gregorius à S. Vincentio, Magnus ſuperioris ſæculi Geometra, ſuæque Societatis Lumen Ampliſſimum, primus, quòd ſciam, oſtendit; quia tamen nec mihi, nec pleriſque fortaſſe Lectorum meorum, ejus Codex ad manus eſt, placet demonſtrationem hanc concinnare. Eſto, aſymptotis ABQ interjecta Hyperbola DER, aſſignenturque ſpatia DCNF, KLQR, definita extremis lineis DC, FN, & KL, QR alteri aſymptoto parallelis, invicem verò proportionalibus. Dico ejuſmodi ſpatia invicem æqualia eſſe; ex natura ſiquidem Hyperbolæ erunt etiam BC, BN, BL, BQ proportionales, utpote iiſdem parallelis reciprocè reſpondentes; earumque differentiæ CN, LQ homologis terminis BC, BL, aut LK, CD itidem proportionales. Ordinetur ergo ad CN ipſa CG æqualis LK, & ipſa NI æqualis QR, atque inter duas GB, BN, ſumpta media proportionali BM, ordinetur ME; ſimiliter inter duas BL, BQ, ſumpta media BO, ordinetur OP, cui æqualis ponatur MH; atque ita porrò ſumptis aliis intermediis inter BC, BM, ac BL, BO, inter BM, BN, ac inter BO, BQ, ordinatæ ad extrema talium mediarum in ſpatio KLQR transferantur, & applicentur extremis dictarum mediarum in linea CN exiſtentium, quoadusque fiat ſpatium CGHIN, TAB. X. Fig. 8.

cujus

cujus ordinatæ ſunt æquales ordinatis ſpatii KLQR, ſed applicatæ ad partes altitudinis CN proportionales partibus altitudinis LQ; nec enim dubium, quin NM ad MC ſit, ut QO ad OL, utpote differentiæ trium continuè proportionalium ejuſdem utrobique rationis; (exiſtente ſcilicet NB ad BM, ut BM ad BC, dividendo eſt NM ad MB, ut MC ad CB, & alternando NM ad MC, ut MB ad CB, aut OB ad LB, ideſt, eadem ratione, ut QO ad OL) idemque de aliis intermediis dicendum. Jam ſic: ſpatium DCNF ad KLQR rationem habet compoſitam ex DCNF ad CGIN, & ex CGIN ad KLQR. Sed prima ratio eadem eſt, quæ DC ad CG, vel KL; (cæteræ enim ordinatæ EM, & MH, ſeu PO; FN, & NI, ſeu QR, aliæque intermediæ eamdem perpetuò rationem obſervant) ſecunda autem ratio eadem eſt, quæ altitudinis CN ad LQ, (per demonſtrata prop. 1. append. noſtræ Probl. *Vivian.*) hoc eſt, ex ſupra dictis, eadem, quæ ejuſdem LK ad CD; igitur ratio ſpatii DCNF ad KLQR componitur ex DC ad LK, & LK ad ipſam DC, ſcilicet eſt ratio æqualitatis. Quod erat demonſtrandum.

3. Hinc facillimè deducitur, ſpatia quævis Hyperbolæ, & aſymptoto interjecta, lineiſque alteri aſymptoto parallelis concluſa eſſe ad invicem, ut ſunt rationes extremarum ordinatarum, quibus concluduntur; ſpatia nimirum CDFN, OPQR, ita comparata ſint, ut ratio CD ad NF æqualis non ſit rationi OP ad QR, ſed in alia quavis proportione, putà altera alterius triplicata, aut duplicata, vel ſeſquialterata, &c. erit pariter alterum ſpatium alterius triplum, duplum, aut ſeſquialterum; ſumpto enim rationis CD ad FN quovis multiplici, putà ratione GH ad NF triplicata ipſius CD ad NF (ideſt ipſis FB, DB, ſumptis aliis duabus continuè proportionalibus KB, HB, erectiſque ordi-

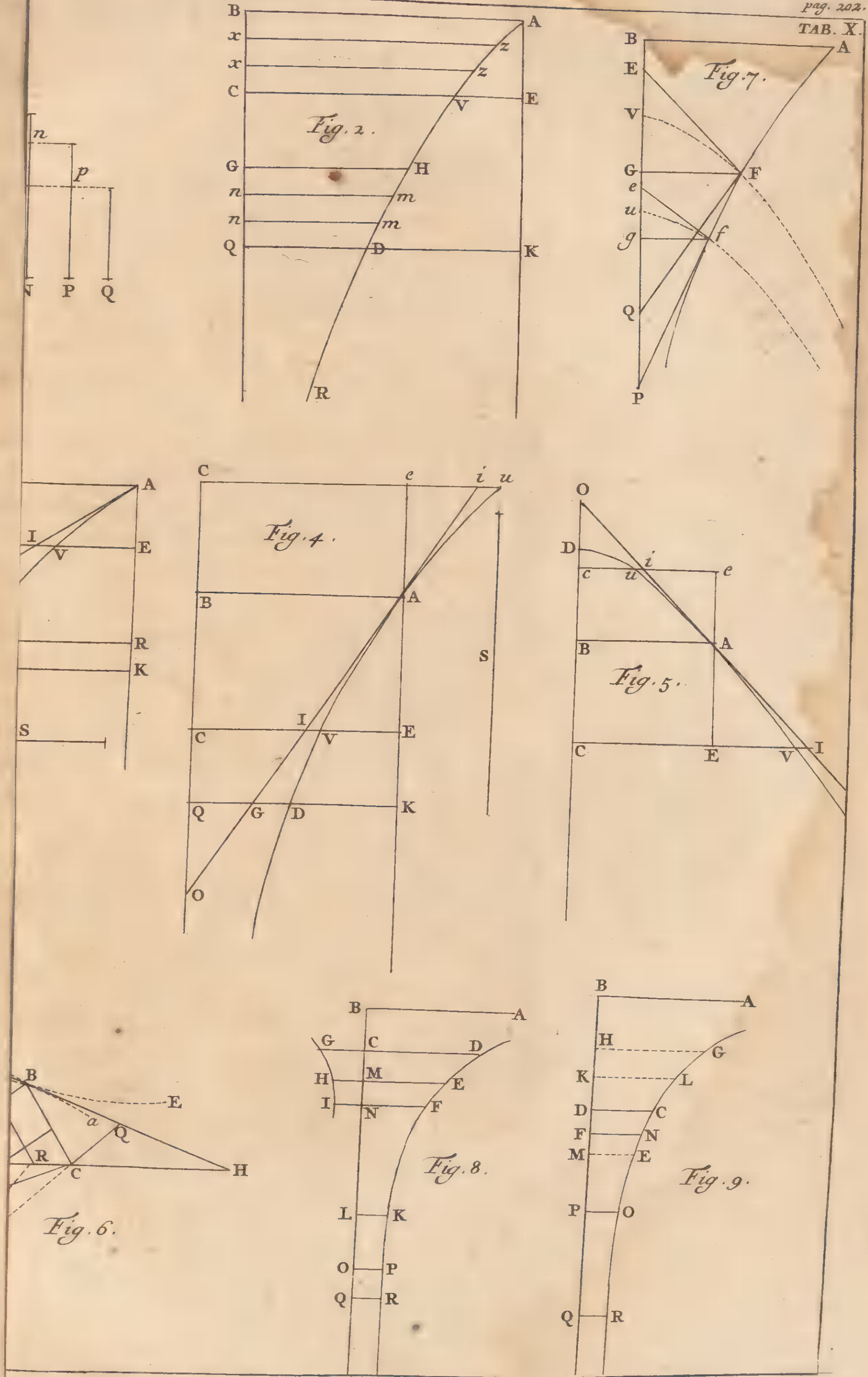
TAB. X. Fig. 9.

ordinatis KL, HG) conſtat ſpatium GNFH æquè multiplex fore ſpatii CDFN (ob ſingula ſpatia GK, LD ipſi CF æqualia ex *num. præced.* quippe lineis proportionalibus terminata.) Similiter rationis OP ad QR ſumpta quavis multiplici, putà duplicata, EM ad QR (ideſt ipſi QB, PB ſumpta tertia proportionali BM, atque erecta ME) patet ſpatium ERQM æquè multiplex, ſcilicet duplum fore ſpatii OPQR, quandoquidem EP æquabitur ex *num. præced.* ipſi OQ. Quòd ſi ratio GH ad NF æqualis foret rationi EM ad QR, ſpatium quoque GHFN æquaretur ſpatio EMQR, ſi illa major, & hoc majus, ſi ratio minor, & ſpatium minus (ut patet, aut apertè deducitur ex *præcedenti*) itaque, ex nota proportionalium definitione Euclidea, erit ratio linearum CD, & NF ad rationem linearum OP, & QR, ut ſpatium prioribus concluſum CDNF ad ſpatium poſterioribus interjectum OPQR. Quod erat demonſtrandum.

4. Unde apertè colligitur, quòd, ſi ordinatæ Logiſticæ adhæreat præmiſſa figura hyperbolica linea NOR, atque aſymptotis BQ, BA interjecta, quarum illa ordinata, hæc axis Logiſticæ fuerit, producanturque ipſæ NF, OP ad Logiſticam in S, R, erit ſpatium hyperbolicum NRQF ad ſpatium ORQP, ut axi Logiſticæ parallelæ, FS, & PR; cùm enim dicta ſpatia ſint ad invicem, ut rationes inter FN, QR, & inter OP, QR intercedentes, ut *num. præced.* oſtenſum eſt, ſive ut rationes inter QB & BF, vel VS, & inter QB, ac BP, ſeu TR intercedentes, quæ quidem rationes ex dictis *cap.* 1. *num.* 3. ſunt, ut portiones axis iiſdem ordinatis interceptæ, VB, TB, ſeu SF, RP, etiam dicta ſpatia Hyperbolica NFQR, OPQR erunt, ut lineæ SF, PR. Quod erat demonſtrandum. TAB. XIV. Fig. 1.

TAB. XV. Fig. 10. 5. Simile quidpiam accidit Spirali geometricæ A*aa*, in qua arcus, aut ſectores per radios ſpiralis abſciſſi, veluti AF, A*f*, aut ACF, AC*f* ſunt, ut hyperbolica ſpatia AIMK, A*im*K comprehenſa portionibus AI, & A*i* aſymptoti AC, quibus differentiæ extremorum ramorum *a*F, *af* ſint æquales [ſunt enim I*a*, *ia* arcus concentrici ipſi AF*f*] & alteri aſymptoto CG parallelis, curvaque hyperbolica iis intercepta; etenim arcus illi AF, A*f*, & conſequenter & ſectores ACF, AC*f* illis reſpondentes, ex dictis *cap.* 1. *num.* 10. ſunt, ut rationes radiorum Spiralis AC, *a*C, ſeu AC, & CI, AC, & C*i*, in qua pariter ſunt dicta ſpatia hyperbolica; cùmque ductis ex centro C rectis CK, CM, C*m* ſector MCK ipſi ſpatio KAIM, & ſector *m*CK ſpatio *mi*AK ſit æqualis (ab æqualibus quippe triangulis KCA, MCI ablato communi CLI, additoque utrique reſiduo MLK res eſt perſpicua) habebimus ſectores hyperbolicos in eadem ratione ſectoribus circuli ordinatim reſpondentes; erit enim MCK ad *m*CK, vel ad *m*CM, ut ACF, ad AC*f*, vel FC*f*.

TAB. XIV. Fig. 1. 6. Colligi intereà ex ſupra dictis poteſt, quòd ſubtangens, ſeu parameter Logiſticæ, eſt ad quamvis axi parallelam, ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum ad congruum ſpatium hyperbolicum, ſcilicet ad punctum R Logſtiicæ ducta tangente RG, erit GT ad RP, ut parallelogrammum KOPB ad ſpatium OPQR; ſumatur enim tangentis portio RS infinitè parva, ita ut ducta parallela ordinatæ SV, parallela axi SHN occurrente hyperbolæ in N, tum ipſa tangens RS ferè coincidat cum curva RS; necnon HS, ut terminata ad curvam ferè æqualis ſit eidem, ut terminatæ ad tangentem; ideſt habeat ad ipſam rationem propiorem æqualitati, quàm quælibet data majoris inæqualitatis ratio


Fig. 2.
Fig. 7.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.

ratio quantumlibet parva, tum etiam hyperbolicum ſpatium NFPO ferè cum rectangulo OPF coincidat, ſeu illud excedat minori exceſſu quolibet dato; conſtat ex *num.* 4. & dividendo, fore ſpatium NFPO ad OPQR, ut HS ad PR, & ſumptis antecedentium æquè proportionalibus, parallelogrammo KP, & linea TG (eſt enim KP ad OPF ferè cum ſpatio PN coincidens, ut BP ad PF, ſeu TR ad RH, vel TG ad HS, prout terminatam ad tangentem, quæ ferè coincidit cum terminata ad curvam in S) erit parallelogrammum KP ad ſpatium OPQR, ut TG ad PR. Quod erat demonſtrandum.

7. Si cui videatur audacior præcedentis demonſtrationis proceſſus, ſimulque infirmior, quàm ut aſſenſum extorqueat, is demonſtratione apagogica utatur, per me licet, immò ut huic & ſimilibus applicare diſcat, ſpecimen hìc dabo. Fingat ſibi quis minorem eſſe, ſi fieri poſſit, alterutram dictarum rationum, verbi, gratia ratio GT ad PR minor eſto ratione KP ad ſpatium OPQR, ita ut illi adiicienda foret ratio alia majoris inæqualitatis, quæ ſit inter *c*, & *d*, ad hoc ut huic alteri rationi æqualis evadat. Cùm itaque ratio PR ad HS (ut terminatam ad curvam) ſit poſteà eadem, quæ OPQR ad ſpatium NP, erit rurſus ratio TG ad eamdem HS minor, quàm ratio KP ad ſpatium NP, eodem defectu rationis *c* ad *d*; poteſt autem HS terminata ad curvam eſſe ad HS, ut terminatam ad tangentem in ratione minori, quàm quælibet data ratio *c* ad *d*; ſi igitur rationi TG ad HS priorem addatur ratio HS prioris ad HS poſteriorem, fiet ratio TG ad HS poſteriorem, hoc eſt TR ad RH, vel KP ad rectangulum OPF, adhuc minor, quàm ſit ratio ejuſdem KP ad ſpatium NP, quod eſt impoſſibile; foret enim rectangulum OPF majus ſpatio NFPO, cui inſcribitur.

 Si

Si verò dicatur e contra ratio KP ad ſpatium OQ minor altera ratione TG ad PR, fiet eadem demonſtratio, incipiendo ex parte ſpatiorum, unde concluderetur, quòd HS terminata ad tangentem major foret, quàm HS terminata ad curvam, ſeu quòd tangens curvam ſecaret. Nullus igitur eſſe poteſt in ratiocinio noſtro ſcrupulus, nec de fallacia inſimulari debet, ſed de compendio laudari.

8. Intereà notandum velim, præmiſſam demonſtrationem non pendere ab ulla ſive Hyperbolæ, ſive Logiſticæ proprietate, ſed hinc dumtaxat, quòd ſpatia hyperbolica proportionalia ſint parallelis axi Logiſticæ; quæ affectio infinitis curvis invicem comparatis communis eſſe poteſt; ut ſi FQN ſit triangulum apicem habens in Q, & FQS trilineum parabolicum, utique axi parallelæ erunt, ut interceptarum FQ, PQ quadrata, ſive ut ſimilia ſpatia triangularia his inſiſtentia; ſi ſuperior figura ſit trilineum parabolicum quadraticum, inferior erit parabolicum cubicum, & ſic de aliis, tum parabolarum ſpeciebus, tum curvarum generibus; quocirca eamdem demonſtrationem iis applicare potes, aut univerſaliùs ipſum Lemma concipere ſic. In qualibet curva QRS, cujus ordinatæ PR, FS (ſumpto FQ pro axe) ſint in eadem ratione cum ſpatiis PORQ, FNRQ per eaſdem ordinatas abſciſſis ex figura NRQF, eidem axi applicata, erit ſubtangens GT ad PR, ut rectangulum, ſeu parallelogrammum OPB ad ſpatium OPQR; & converſim, ſi ut illud parallelogrammum ad hoc ſpatium, ita fuerit PR, ſeu BT ad TG, juncta GR erit tangens; nec refert cava ne, an convexa ſint ſpatia, quæ comparanda ſunt, eadem quippe ratio ſemper militat, aut parum certè immutata. Hinc aliam habes tangentium ducendi methodum, aliaſque, & alias veritates per te, prudens Lector, extundere poteris, ſed

ſed (quod majori in pretio habendum eſt) hinc diſces Veterum, & Recentiorum Geometrarum propoſitiones Univerſaliores reddere, attendendo, num proprietates, quas ſpecialiter de quadam figura demonſtrant ex peculiari ejus affectione pendeant, an verò ex communi pluribus Symptomate deriventur. Atque id revera eſt facere Univerſale, quod adeò deprædicant Metaphyſici, & an per intellectum, an verò, ut barbarè loqui ſolent, etiam à parte rei dari poſſit, exquirunt. Quod quidem ipſis integrè decidendum relinque, mi Lector, atque ab ea ſollicitudine bonas horas aliis utilioribus ſtudiis debitas redimere ſatage, ſpondeo enim, aliquot ſæculorum myriadibus antequàm illi conveniant, & quod, tot tricarum apparatu expiſcari contendunt, in aperto ponant (uti hactenus certè incaſſum laboraſſe video, nec à tot ſæculis, vel latum unguem profeciſſe, aut aliquam ſaltem inde utilitatem in Philoſophicis aut Theologicis rebus inde ſibi, aliiſve exculpſiſſe, plus nimiò expertus agnovi), Te innumerabiles, atque utilliſſimas veritates geometricas inventurum per illud, quod ſuperiùs deſcripſi, Geometricum Univerſale, ejuſdemque applicationem ad multiplices figurarum ſpecies, quas aut Geometria miniſtrat, aut ſibi facilè unuſquiſque fingere poterit.

9. Nec intereà omittendum, quòd Spirali Geometricæ rurſus quid ſimile contingit, quod ipſi Logiſticæ; ſubtangens enim CB prioris radii AC eſt ad quemvis arcum AF, aut A*f*, ut parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum KAC ad ſpatium correſpondens MIAK, aut *mi*AK, quod, tum eadem methodo probari poteſt, tum & de ſe patet, quum ex dictis *cap. præced. num.* 10. prima ſubtangens CB ſit eadem, quæ erat ſubtangens Logiſticæ, ex cujus convolutione, juxta dicta *cap.* 1. *num.* 12. Geometrica Spiralis gignitur, ordinatis in TAB. XV. Fig. 10.

radios commeantibus, & axis portionibus, ejuſve parallelis in arcus curvatis, ac propterea eadem erit ipſius CB ad arcum AF ratio, quæ prius erat ſubtangentis ad parem axis portionem, ejuſve parallelam, adeòque eadem, quæ parallelogrammi prædicti ad aſſignatum hyperbolicum ſpatium.

10. Exinde autem habetur, quòd ſpatia illa hyperbolica, aut ſectores iis æquales, de quibus *num.* 5. in ea ſemper ratione erunt ad correſpondentes circulares ſectores, in qua minima ordinatarum ſpatii hyperbolici AK ad ſemiſſem ſubtangentis CB; etenim ſi AK ſupponatur æqualis dictæ ſubtangenti CB, erit ut rectangulum KAC ad ſpatium hyperbolicum KAIM [quod ſumi poterit latitudinis AI infinitè parvæ, ut ferè coincidat cum inſcripto rectangulo KAI] ideſt ut CA ad AI, ita ipſa KA, vel ipſa CB ad arcum AF, ex numero ſuperiori; rectangulum igitur KAI, ſeu ſpatium ipſum hyperbolicum MIAK erit æquale rectangulo radii CA in arcum AF, hoc eſt duplum ſectoris ACF; cùmque ex dictis *num.* 5. & alii ſectores aliis ſpatiis in eadem ſint ratione, ſingula ſpatia KAIM, KA*im*, aut hyperbolici ſectores KCM, KC*m*, dupli erunt reſpondentium ſectorum circularium ACF, AC*f*; & ſi AK æqualis fuerit ſemiſſi CB, erunt dicta ſpatia, & ſectores hyperbolici ad circulares ſectores in ratione æqualitatis; ſi quis autem obrepſerit ſcrupulus circa hanc demonſtrationem, remedio numeri ſeptimi ritè applicato amoliendus erit.

TAB. XI. Fig. 1. 11. Jam oſtendendum eſt, quòd parallelogrammum Aſymptotis, & Hyperbolæ inſcriptum, eſt ad ſpatium hyperbolicum, cujus extremæ ordinatæ duplam proportionem ſervent, proximè ut 10. ad 7. Eſto ALBE quadratum hyperbolico ſpatio, quod hyperbola AG, aſymptotis LBF continetur, inſcriptum; & ſumpta

FE

FE æquali ipſi EB, ordinetur FG: erunt ordinatæ AE, FG in ratione dupla. Dico quadratum EL ad ſpatium AHGFE (adeòque & quodvis parallelogrammum inſcriptum ad ſpatium ordinatis rationis duplæ interjectum) eſſe proximè, ut 10. ad 7, ducta enim diametro BA, & juucta AF (quæ tangens erit, quoniam extenſa ad alteram aſymptoton bifariam ſecaretur in A, prout BF bifariam ſecaretur in E) ductaque GD, & HICNK aſymptoto BF parallelis; quoniam rectangula ALB, HKB æqualia ſunt, & communi ablato BEC æqualia remanent ECH, KCA, erit HC ad CA, vel CI (ob angulum EAF ſemirectum), ut KC, ſeu EA ad EC, & dividendo, HI ad CI, vel CA, ut CA ad CE; cùm igitur ſint EC, CA, IH continuè proportionales, erit tertia IH æqualis quadrato ſecundæ CA diviſo per primam CE; itaque ſi EA dicatur æqualis a, & quælibet portio AC dicatur c, erit HI æqualis $\frac{cc}{a-c}$; intelligatur ergo AE in 100. æquales particulas dividi, quarum AD erit 50; & ſi ab A ſumantur per ordinem 1, 2, 3, &c. ejuſmodi particularum, & calculo exprimantur lineæ in trilineo AMG reſpondentes, prout HI correſpondet ipſi AC, invenietur hæc ſeries $\frac{1\times1}{100-1}$, $\frac{2\times2}{100-2}$, $\frac{3\times3}{100-3}$, &c. uſque ad $\frac{50\times50}{100-50}$; hæc enim eſt expoſitio univerſalis expreſſionis ſuprapoſitæ $\frac{cc}{a-c}$ pro diverſo valore ipſius c; ideſt rectæ illæ, velut IH, in trilineo AMG paralllelæ, & ad centeſimas quaslibet ipſius AE partes applicatæ, erunt per ordinem $\frac{1}{99}$, $\frac{4}{98}$, $\frac{9}{97}$, &c. uſque ad $\frac{2500}{50}$, quod æquatur ipſi MG 50 ejuſmodi particularum. Summa igitur harum omnium fractionum deſignabit proximum valorem, ſeu quantitatem trilinei AMG, reſpectu quadrati

drati AEB, quod eſt in hac ſuppoſitione 10000; porrò illæ fractiones ad minimos terminos redactæ, & ſimul additæ, dant circiter 700 (ut experiri unuſquiſque poterit, ſi ſatis otii, & patientiæ habuerit ad calculi laborem ferendum) triangulum verò ADM æquatur dimidio quadrati AD, ſcilicet 50 ducto in 25, quod eſt 1250, & parallelogrammum GDEF, quadrati AE ſubduplum, eſt 5000, igitur ſumma ex trilineo, triangulo, & parallelogrammo, nempe ſpatium hyperbolicum AGFE eſt 6950, ut ex hac formula patet.

Trilineum AMG	700
Triangulum ADM	1250
Parallelogrammum GDEF	5000
Summa, ſpatium GAEF	6950

Proportio itaque ſpatii AGFE ad quadratum AEBL eſt eadem, quæ 6950 ad 1000, ſeu, dividendo utrobique per 50, ut 139 ad 200, quæ eſt circiter 140 ad 200, aut ſubdividendo per 20, ut 7 ad 10; & hoc fuerat demonſtrandum.

TAB. XII. Fig. 1. 12. Jam V. Theorem. Hugenii demonſtrationem ſic expedio. Sit AD dupla DK, ſeu FB ordinatæ ad Logiſticam, AB*b*, erit FD intercepta axis inter ordinatas duplæ proportionis; oſtendendum eſt FO ſubtangentem, ſeu parametrum Logiſticæ eſſe ad FD, vel BK proximè, ut 13 ad 9. Jam ex dictis *num.* 6. eſt FO ad BK, vel DF, ut parallelogrammum inſcriptum hyperbolæ ad congruum ſpatium hyperbolicum, quod in hoc caſu (ſi intelligatur ſuper AD deſcriptum, & ordinatis ex A, & K definitum) terminatur ordinatis duplæ proportionis, propter AD duplam

plam DK; ſed illud parallelogrammum ad tale ſpatium hyperbolicum, ex *præcedenti numero*, eſt proximè, ut 10 ad 7, ergo & OF ad DF, vel BK erit proximè in eadem ratione 10 ad 7, aut utrobique per 13 multiplicando, ut 130 ad 91, quod proximum eſt rationi 130 ad 90, hoc eſt 13 ad 9. Ratio igitur ſubtangentis, ad axis portionem interceptam ordinatis duplæ rationis, proximè eſt, ut 13 ad 9, uti Hugenius in hoc Theoremate propoſuerat.

CAPUT VII.

Sextum Theorema proponitur, & univerſaliùs demonſtratur. Spatia Logiſtica in data ratione dividere; Cavum trilineum convexo æquale; rectangula ſpatiis Logiſticis æqualia. Item ſpatiis hyperbolicis. Ordinatæ in trilineo Logiſticæ, axi parallelæ, convexis, & cavis hyperbolæ ſegmentis proportionales. Eadem aliis figuris applicare. Hyperbolam ducere, quæ datam Logiſticam, vel in dato puncto contingat. Maximum parallelogrammum Logiſticæ inſcribere, & duo utrinque æqualia determinare. Data cujuſvis figuræ tangente maximum illi parallelogrammum inſcribere, & contra. Idem circa alia maxima præſtare per alias hyperbolas. Infinitarum hyperbolarum tangentes. Spiralis geometricæ ſpatia inter ſe, & cum ſuis partibus comparantur. Cujuſvis convolutæ figuræ, ejuſve partium ad circumſcriptum ſectorem, & ejus zonas proportio eadem, quæ Conoidis ab evolutâ figurâ, ejuſve partium, ad circumſcriptum cylindrum, & tubos cylindricos. Evolutæ ad convolutam ratio, quibus compoſita. Exempla in Spiralibus. Geometricæ Spirali doctrina applicatur.

TAB. XII. Fig. 1. 1. PRopoſuit in Sexto Theoremate Hugenius, quòd, *ſi fuerint tres ordinatæ, velut in hac figurâ ſunt AD, HG, BF, & ex puncto curvæ ad minimam pertinente ducatur aſymptoto parallela ſecans duas alias ordinatas in R, & K, ac tangens BQ eaſdem ſecans in N, & Q; ſpatia trilinearia ABK, HBR ſunt inter ſe, ut partes ordinatarum inter curvam, & tangentem, ideſt, ut AQ, HN.* Quod quidem ferè cum ſecundo Theoremate coincidit, poteſtque, ex *cap.* 4. *num.* 4. dictis, demonſtrari, ut patebit, applicando demonſtrationem lineæ *g h* minuſculis litteris expresſæ, ſecanti tangentem in *n*, axi parallelam per B ductam in *r*; patebit enim interceptas tangenti, & Logiſticæ curvâ, ordinatis parallelas, ſive infra, ſive ſupra punctum contactus eſſe, ut ſpatia comprehenſa iiſdem ordinatis, Logiſticæ curvâ, & axi parallelâ per contactum ductâ, adeòque ſecundum, & ſextum Theorema in unum convenire.

2. Sic igitur argui poterit. Cùm ſit OF ad FB, ut BK ad KQ, erit OF in KQ æquale FBK rectangulo; ſed FO in BM, ſeu in totam KA æquatur toti ſpatio DABF per *cap.* 4. *num.* 3., igitur FO in reſiduam QA æquatur reſiduo ſpatio KAB: eodem modo oſtendetur OF in RN, ſeu *rn*, æquale rectangulo FBR, FB*r*; adeòque cùm ſit HGFB, *hg*FB, æquale FO in BS, ſeu HR, vel *hr*, erit ſpatium RBH, *r*B*h*, æquale FO in NH, *nh*; adeòque trilineum AKB ad HRB, ſeu *hr*B, erit, ut AQ ad NH, ſeu *nh*, quæ ſunt baſes rectangulorum ſub communi altitudine ſubtangentis FO illis ſpatiis æqualium. Et hoc fuerat demonſtrandum.

3. Hinc facilè erit, quævis Logiſticæ ſpatia, ſive concava, ſive convexa per ordinatas in data ratione, dividere; ſpecialiter autem hinc inferre juvat, quòd ſi ex

quovis

quovis puncto H Logiſticæ, ducatur tangenti O N parallela, occurrens curvæ ultra contactum in *h*, erit portio Logiſticæ concava H R B æqualis convexæ *hr* B, propter æquales H N, *hn*, iis parallelis interceptas; immò addito utrinque ſpatio B H S, cum rectangulo S B *r*, inferes rectangulum H R *r* æquale eſſe ſpatio Logiſticæ, curvâ H *h*, ipſâque H S ad *hr* extensâ, intercepto; indeque rectangulum G R *r* æquale reſiduo ſpatio G H B *hg*, æquale proinde & rectangulo ex O F ſubtangente in R H cum *rh*, ſeu in *s* S, adeòque O F ad G *g* ſe habere, ut G R, ſeu B F, ad *s* S; ſed nimiùm minutis detineor.

4. Expendere potiùs juvabit, quibus ſpatiis proportionales ſint lineæ in trilineo N B H, aut *n* B *h*, parallelæ, non quidem ordinatis, ſed ipſimet axi. Inter aſymptotos A D, D F, ducatur per ipſum punctum B Logiſticæ hyperbola *r* B *rr* R; ante omnia oſtendendum eſt, tangente Logiſticæ O B occurrente ſupremæ ordinatarum, ſeu aſymptoto hyperbolæ in P, rectangulum B K P æquari ſpatio hyperbolico *k* B *r* R A; eſt enim rectangulum B K P ad K B F rectangulum hyperbolæ inſcriptum, ut illius baſis P K ad baſim hujus K D, ſeu B F, hoc eſt, ob ſimilitudinem triangulorum, ut K B ad ſubtangentem Logiſticæ F O, indeque, ex *cap. præced. num.* 6., ut hyperbolicum ſpatium A R *r* B K ad idem parallelogrammum F B K; æqualia igitur ſunt rectagulum B K P, & ſpatium hyperbolicum A R *r* B K: quod fuerat demonſtrandum; ſed & alibi generaliùs idem oſtendemus, ſcilicet *cap.* 13. *num.* 2. TAB. XI. Fig. 2.

5. Cùm verò, ex *cap. præced. num.* 4., ſpatium hyperbolicum K B R A ad quodvis aliud axi Logiſticæ parallelis reſectum K *r* R A ſit, ut K B ad *kh*, & dividendo ſpatium hyperbolicum K B *rk* ad *r* R A *k*, ut *sh* ad *hk*; manifeſtum eſt, ſumpta communi altitudine K P, dictarum linearum in K P ductarum rectangula proportio-

 nari

nari ſpatiis hyperbolicis correſpondentibus, adeòque rectangulum PK in *kh* æquari ſpatio *kr*RA, & rectangulum ejuſdem PK in *sh* æquari ſpatio KB*rk*, &c.

6. Parallelæ igitur axi Logiſticæ, trilineis NBH, *n*B*h* concluſæ, proportionales erunt reſpectivis trilineis hyperbolicis *r*BS, *r*B*s* convexis, aut concavis, prout citra, vel ultra B parallelæ ducuntur; etenim demonſtratione *num.* 3. iterum applicatâ; cùm ſit KP ad BK, ut BM ad MQ, vel BS ad SN, & B*s* ad *sn*, erit rectangulum KBM, vel KBS, aut KB*s* æquale rectangulo ex PK in MQ, SN, vel *sn*; ſed etiam ſpatium BKAR, aut BK*kr* æquatur, ex *num. præced.*, rectangulo ejuſdem PK in MA, aut SH, vel *sh*; igitur rectangulum ex PK in reſiduam AQ, vel HN, aut *hn*, æquale erit trilineo hyperbolico RBM, aut *r*BS, &c. & ideò lineæ AQ, NH, *nh* axi Logiſticæ parallelæ, ejuſque curva, & tangente concluſæ, erunt ut reſpectiva hyperbolica ſpatia ſupra definita. Quod erat demonſtrandum.

7. Aliis figuris ſimilem comparationem ſuſcipientibus, ut ordinatæ unius proportionales ſint ſpatiis abſciſſis alterius, applicari res eadem poteſt, quemadmodùm, tum hìc, tum alibi locum habere poſſunt obſervationes, & corollaria ſimilia his, quæ *num.* 3. indicavimus; ſpecialia verò problemata duo ex ſola figuræ hujus inſpectione facillimè ſolves. Alterum: Inter aſymptotos FD, DA, quarum illa ſit axis, hæc ordinata Logiſticæ AB*h*, hyperbolam ducere, quæ Logiſticam in aliquo puncto B tangat; vel dato in Logiſtica puncto B, hyperbolam nihilominus reperire, quæ idem præſtet: ponatur DF æqualis ſubtangenti FO: ordinatis FB, & DA, fiat per B hyperbola inter aſymptotos FDA; hæc procul dubio Logiſticam tanget; ſiquidem eadem OB, tum Logiſticæ, tum Hyperbolæ tangens communis

nis erit; unde conſequitur, quòd, ſi fingatur per aliud punctum B ducta hyperbola, occurret in alio puncto eidem Logiſticæ, ſupra B quidem, ſi FD major fuerit ſubtangente, infra verò ſi minor. Alterum eſt. Logiſticæ maximum parallelogrammum inſcribere: ponatur DF ſubtangenti æqualis, & ordinetur FB: patet DFB maximum fore omnium, quæ dato Logiſticæ ſpatio inſcribi poſſint, parallelogrammorum; alia ſiquidem parallelogramma eidem Logiſticæ ſpatio inſcripta minora erunt, eò quòd, ut illud primum adæquent, extendenda ſint uſque ad perimetrum hyperbolæ per B deſcriptæ, quæ tota ultra Logiſticam cadit, utpotè ipſam tangens, ex nuper dictis: unde patet, cuivis alteri parallelogrammo aliud æquale eidem Logiſticæ inſcriptum exhiberi poſſe, ducta ſcilicet per punctum, ubi Logiſticæ occurrit, Hyperbola, quæ in alio puncto Logiſticam ſecans dabit punctum, ad quod inſcribatur parallelogrammum æquale priori, eò quòd utraque ſpatio aſymptotis, hyperbolæ interjecto inſcribantur.

8. Leviuſcula quidem hæc, ſi per ſeſe conſiderentur, at ratione methodi, quam generalem eſſe Lectorum ſollertia percipiet, ſuo pretio non fraudabuntur: hinc enim habebimus, data ratione, quam habere debet ſubtangens ME figuræ ABHG ad abſciſſam AE, TAB. XI. Fig. 3. dari & maximum parallelogrammum EBL ipſi inſcriptibile, ſi nimirum in eadem data ratione fiat GE ad EA, ut GE, EM ſint æqualia, tangens quippe MBI erit & tangens hyperbolæ CBC per B inter aſymptotos AG, GH ductæ, atque adeò quodvis aliud parallelogrammum GFDK datæ figuræ inſcriptum minus erit parallelogrammo GFC, atque adeò minus GEB, quod proinde maximum eſſe convincetur; & è contra, dato maximo parallelogrammo GEBL figuræ ABHG inſcripto, dabitur ejus tangens, poſita EM æquali EG, quia quodvis aliud parallegrammum GFD,

 cùm

cùm ſit minus ipſo GEB, erit & minus GFC (ducta per B inter eaſdem aſymptotos hyperbola CBC & ideò FD minor erit, quàm FC, & hyperbola CBC curvam DBD tanget; ſed hyperbolam tangit recta MB, ergo & curvam DBD propoſitam. Et quod de parallelogrammis maximis dictum eſt, aſſumpta hyperbola lineari, poteſt ad maximos cylindros, aliave maxima facta ex gradibus coordinatarum EB, BL transferri, uſurpatis alterius generis hyperbolis, quadratica, cubica, &c. in quibus facta ex homonymis coordinatarum gradibus ſunt æqualia, eò quòd quadrata, aut cubi ordinatarum reciprocentur diſtantiis à centro, ſeu angulo aſymptotali.

9. Quòd ſi earumdem infinitarum hyperbolarum, in quibus videlicet non ſimplices lineæ BL, CN, ſed ipſarum quadrata, aut cubi, aliique majores gradus ſint in reciprocra ratione diſtantiarum GL, GN, earumve, graduum quorumcumque, tangentes ignorare te dicas: ne deſponde animo, paucis, adverte, docebo, & quidem ex hac ipſa, quam præ manibus habemus, methodo demonſtrationem eruendo: exponens graduum, quos conſideramus in ordinatis BL, CN, eſto x; graduum verò, qui conſiderantur in diſtantiis NG, GL eſto y; ducta ex quolibet hyperbolæ puncto BE aſymptoto parallela, fiat GE ad EM, ut x ad y, juncta MB tanget quia enim ut x ad y, ita GE ad EM, factum ex gradu GE, cujus exponens x, in gradum EM, cujus exponens y, maximum erit omnium ſimilium factorum ex partibus lineæ GM utcumque diviſæ, utì ex maximorum, minimorumque methodo facilè conſtat; quare & factum ex ſimilibus gradibus GEB maximum erit omnium ſimilium factorum ex lateribus parallelogrammi triangulo MIG ad aliud, quàm B punctum inſcripti; quæ igitur linea tangit figuram triangularem MIG in B, (ipſum nempe latus MI) tanget in eodem

puncto

puncto hyperbolam C B C ex iiſdem gradibus coordinatarum conſtitutam.

10. Jam ad inſtitutum noſtrum, unde paululum divertimus, propiùs accedentes, quemadmodùm in Logiſtica Hugenius propoſ. 1. 2. & hac, quam præ manibus habemus, ſextâ, varia ejus ſegmenta invicem comparavit; ita, ut in Logiſtica convoluta, nempe Spirali Geometrica, idem nos præſtemus, argumenti ſimilitudo ſuadet. Primùm igitur, ſicut Logiſticæ ſpatia poſt quamlibet ordinatam in infinitum protenſa ſunt, ut ipſæ ordinatæ, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7., ita Spiralis geometricæ ſpatia poſt quemlibet ejus radium in infinitum circa centrum per innumeras, ſibique ſuperimpoſitas circulationes, continuata ſunt inter ſe, ut quadrata eorumdem radiorum; intellecto enim ſpatio Spiralis A *a a* C in triangula innumera, ut *cap.* 1. *num.* 11. factum eſt, diſtributo, quæ, ex ibi dictis, ſimilia erunt, A C *a*, *a* C *a*, &c. erunt ſingula inter ſe, ut homologorum radiorum quadrata, quæ continuè proportionalia ſunt, juxta curvæ hujus naturam; itaque, ut unum A C *a* ad unum *a* C *a*, ita omnia ſpatio A *a* C incluſa ad omnia incluſa ſpatio *a a* C (ſunt quippè totidem hìc, atque ibi, utpotè multitudinis utrobique infinitæ) nempe, ut quadratum A C ad quadratum *a* C, ita ſpatium, quod poſt A C intra dictam Spiralem convolvitur, ad ſpatium, quod poſt *a* C eâdem Spirali concluditur. TAB. XV. Fig. 10.

11. Hinc dividendo habetur, ſpatium A C *a* eſſe ad infinitè contortum poſt minorem radium C *a*, ut differentia quadratorum A C, *a* C, ſeu C I ad minoris *a* C, vel C I quadratum, hoc eſt, ducto arcu *a* I, ut armillæ portio F A I *a* ad ſectorem I *a* C, ſicuti *cap.* 3 *num.* 8. & in tertio Theoremate Hugenii demonſtrando *cap.* 4. *num.* 5. oſtendimus, in Logiſtica ſpatium duabus ordinatis interjectum eſſe ad infinitè longum poſt minorem ipſarum protenſum, uti eſt differentia ipſarum

ordi-

ordinatarum ad minorem ex ipſis ; & veluti in primo Hugenii Theoremate *cap.* 3. demonſtrato, ſpatia Logiſticæ ordinatis concluſa erant, ut extremarum ordinatarum differentiæ, ita in Spirali geometrica ſpatia quælibet A*ca*, *aca* erunt inter ſe, ut differentiæ quadratorum ab extremis radiis dicta ſpatia comprehendentibus, ſive, ut circulares armillæ FAI, *fai*, illis adſcriptæ.

12. Trilineis verò *a*IA, ſive ad invicem, ſive cum reſiduis *a*AF, aut cum zonis FAI*a* comparandis, inſerviet generale hoc Theorema. Si quævis figura LHC, axe AL in punctum A contracto, illique parallela KC in arcum CG æquabiliter curvata, tranſeat in Spiralem CEA, ordinatis HM, *hm* in totidem ejus ramos, ſeu radios AE, A*e* abeuntibus, & per angulum EA*e* divaricatis, cujus menſura ſit arcus D*d* æqualis intervallo ordinatarum, nempe ipſi M*m*, vel N*n*: Dico Spirale ſpatium CEA fore ad circumſcriptum ſectorem CGA, utì eſt conoides ex figura LHC circa axem LA ad circumſcriptum cylindrum ex parallelogrammo AK circa eumdem axem revoluto. Ducto pariter quovis arcu EB, aliiſque lineis coordinatis, ut in figura, trilineum BCE fore ad circumſcriptam zonam BCDE, utì eſt annulus ex HCB circa axem revoluto ad tubum cylindricum ex circumſcripto parallelogrammo HNCB circa eumdem axem, ac dividendo, trilineum BEC ad CED eſſe, ut ſunt annuli ex ipſis HBC, HCN circa axem revolutis; quodlibet etiam trilineum BEC ad aliud *be*C, aut CED ad aliud C*ed* eſſe, ut ſunt annuli ex ipſis BHC, *bh*C, aut ex HCN, *h*C*n* circa ipſum axem; portiones quoque BE*eb*, ſive ad aliam *beeb*, ſive ad trilineum quodvis BCE eſſe, ut reſpectivè inter ſe ſunt annuli ex HB*bh*, *hbbh*, aut HBC circa ipſummet axem LA. Longior eſt propoſitio, quàm demonſtratio. Arcus enim BE ad BF eſt, ut CD ad CG, ſcilicet ex conſtructione, ut CN ad

TAB. XI. Fig. 4.

~~TAB. XIV. Fig. 1.~~

ad CK, vel BH ad BI, nempe ut cylindrica ſuperficies, quæ in conoide ex linea BH, ad cylindricam ſuperficiem, quæ in cylindro per lineam BI circa axem revoluta producitur; & hoc ſemper, ſive lineas majuſculis litteris, ſive minuſculis notatas inter ſe compares; ſunt autem tum arcus BF, in ſectore concentrici, tum cylindricæ omnes ſuperficies ex BI, concentricæ in cylindro, proportionales, quippe in eadem ratione diſtantiarum à centro A, vel axe AL; ergo, ex Lemmate 29. Torricellii de dimenſione parabolæ, omnes arcus concentrici in ſectore ad omnes concentricos in ſpatio Spirali erunt, ut ſunt omnes ſuperficies cylindricæ in cylindro ad omnes cylindricas ſuperficies in conoide; unde & dividendo, & proportionales partes comparando, habebitur veritas Theorematis propoſiti.

13. Quandoquidem ob æqualitatem arcus CG cum axe figuræ LA, ductâ ſubtensâ LC, erit triangulum LAC æquale ſectori CGA, atque adeo erit ad Spirale ſpatium in eadem ratione, in qua cylindrus conoidi circumſcriptus ad ipſam conoidem; hinc figura quælibet evoluta ad convolutam rationem habebit compoſitam ex ratione ſui ad triangulum æquè altum in eadem baſi, & ex ratione circumſcripti cylindri ad conoidem ex ejus revolutione circa axem genitam. Cùm Spiralis Archimedaea, ob æquabilitatem motuum quibus componitur, habeat radios proportionales ordinatis in triangulo baſi parallelis, indeque fiat convolutione trianguli axem habentis parem arcui ſectoris circumſcripti, fit inde, ſpatium ſpirale trientem eſſe circumſcripti ſectoris, quemadmodum conus ex triangulo triens eſt circumſcripti cylindri; & cùm ſecunda Spiralis quadratica fiat convolutione parabolæ, cujus ad inſcriptum triangulum ratio eſt ſeſquitertia, cylinri verò circumſcribentis conoidem ab ipſa genitam

 ratio

ratio eſt dupla, ideo ſpirale ſpatium quadraticum erit ſemiſſis circumſcripti ſectoris, habebit verò parabola, ex qua gignitur, ad ſe ipſam in tale ſpatium convolutam, rationem compoſitam ex ſeſquitertia, & dupla, ideſt quam 8 ad 3., & ſic deinceps applicationem proſequere mi Lector.

14. Ego ad Spiralem Geometricam revertor, in qua, utpote ex convolutione Logiſticæ genita, jam ſcies Trilinea, initio *num.* 12. recenſita, eam inter ſe rationem habitura, quam annuli ex correſpondentibus Logiſticæ portionibus trilinearibus circa axem revolutis, ſive inter ſe, ſive cum tubis cylindricis illos circumſcribentibus comparatis, ubi geometricæ Spiralis trilinea cum zonis circularibus illa includentibus conferantur; quomodo autem illi annuli ex Logiſticæ portionibus geniti notam habent quantitatem, nonniſi perſpecta ſolidorum, quæ ex Logiſtica circa axem revoluta producuntur, menſura, oſtendi poteſt; de qua re, in nono Theoremate cum Hugenio, agendum erit, ideoque ex dicendis *cap.* 9. *num.* 10. defectus ſupplendus eſt.

CAPUT VIII.

Septimum Theorema pridem oſtenſum, ut nova demonſtratione fulciatur, oſtenditur, ſpatio à qualibet curva contento quò ad totum, & quò ad partes æquale ſpatium ex ſubtangentibus ad curvæ puncta applicatis, vel ad reſpectiva puncta baſis: item ducta per quodvis punctum tangentibus parallela, occurrente ordinatis, puncta interſectionum eſſe in curva, quæ cum priori comprehendet ſpatium primæ figuræ duplum, adeoque cum ejus baſi [niſi hanc nova curva ſecet, ac congruo loco punctum acceptum ſit] ſpatium primo æquale. Eâdem operâ duæ ejuſmodi curvæ deſcribuntur.

tur. Eadem doctrina converſim accepta inventioni tangentium deſervire poterit. Dimenſio figuræ per normam, & perpendiculum deſcriptæ; Spatii Cycloidis, obiter ejus tangente determinatâ, dimenſio, variorumque ſegmentorum proportio. Segmenta ejuſdem quadrabilia. Ciſſoidalis ſpatii, ejuſque ſegmentorum menſura. Spatium à Tractoria, & ejus axe interceptum æquale quadranti radio ſuæ tangentis deſcripto. Infinitarum Parabolarum, Hyperbolarum quoque infinitarum ſpecierum, Spiralium item cujuſvis generis, etiam Geometricæ, dimenſio expenditur. Septimi Theorematis Hugeniani demonſtratio ex hac doctrina eruitur. Octavum quoque Theorema, pridem oſtenſum, hinc novam demonſtrationem aſſumit.

1. AD ſeptimum Theorema gradum facimus. Illud Hugenius his verbis proponit: *Spatium infinitum inter ordinatam, Logiſticam, & aſymptoton, qua parte hæ ad invicem accedunt, duplum eſt trianguli comprehenſi ordinatâ, tangente ad idem ordinatæ punctum, & ſubtangente. Sic in eadem figura ſpatium infinitum poſt ordinatam BF duplum eſt trianguli BFO.* Quod quidem ex dictis *cap.* 4 *num.* 6. evidenter deducitur; rectangulum enim ſubtangentis, ſeu parametri FO in ordinatam BF, quod loco citato oſtenſum eſt ſpatio infinito poſt BF exporrecto æquale, utique duplum eſt trianguli BFO ejuſdem baſis, & altitudinis; ſed aliam nihilominus demonſtrationem adjiciemus ad pleniorem ſcientiam, & methodi varietatem, aliis detegendis veritatibus inſervientem, uti ex his, quæ ſpecimінum loco ſubjungemus, prudens Lector agnoſcet; Vix certè figura ulla notæ hactenus deſcriptionis eſt, cujus dimenſio ex fonte jam aperiendo non elegantiſſimè promanet: immo & infinitorum ſolidorum menſura hinc elici poteſt, ut patebit *capite ſequenti num.* 7., & TAB. XI. Fig. 7.

& diſtantia centri gravitatis variarum figurarum, ut *cap.* 11. *num.* 6. conſtabit.

TAB. XV. Fig. 6. 2. Sit curva quævis ADC circa axem BN, & ex quibuſvis curvæ punctis A, *a*, ductis tangentibus AB, *ab*, quæ cum axe conveniant in punctis B, *b*, necnon ordinatis AN, *an*, compleantur parallelogramma ANBG, *anbg* circa ipſas tangentes, velut diametros conſiſtentia; ſicque ſemper fiat, ut per omnium parallelogrammorum angulos exteriores, ideſt per puncta G, *g*, tranſeat curva G*g*: comprehendet hæc cum priori curva A*a*C, & latere extimi parallelogrammi AG, ſpatium C*a*AG*g* æquale figuræ priùs poſitæ C*a*AN; ſumptâ enim quantumlibet parvâ tangentis particulà AD, *ad*, ac per D, *d* ductis axi, & baſi parallelis MDH, EDF, *mdh*, *edf*, erunt rectangula GD, DN, *gd*, *dn*, utpote complementa parallelogrammorum circa diametrum, invicem æqualia, (potes & utrinque addere AD, *ad*, ut compares æqualia parallelogramma AH, NF, aut *ah*, *nf*; potes inſuper directum parallelogrammum AH, *ah* in 7. figura commutare in obliquius intra eaſdem parallelas eidem nihilominus tangenti impoſitum, ſpatio autem CAG*g* melius adjacens ad evidentiorem circumſcriptionem) & hoc ſemper in quolibet puncto eveniet; ergo cùm in utroque ſpatio hæc indefinitè parvæ latitudinis parallelogramma poſſint ab iis deficere, ſi inſcripta ſumantur, aut eadem ſpatia excedere, ſi circumſcripta comparentur, minori defectu, aut exceſſu quolibet dato; conſtat ipſamet ſpatia C*a*AG*g*, C*a*AN integrè, & particulatim; ideſt, tum tota, tum eorum correſpondentes partes invicem comparando, prorſus æqualia eſſe. Immo inde inferre potes, quòd, cùm totum parallelogrammum NG trianguli NBA ſit duplum, & complexum ex utraque figura *g*GA*a*C, & C*a*AN duplum ſolius C*a*AN, reliqua figura BG*g*C dupla erit trilinei

nei C A B, curva C A, tangente A B, & axis portione, quam tangens intercipit, comprehenſi; id quod expeditæ multarum figurarum dimenſioni conducere poteſt.

3. Hinc ſi in qualibet figura C A N, ductis ubilibet axi parallelis, primùm A G æquali ſubtangenti N B extimi puncti A; tum *a r o*, *a r o*, reſectis ultra ordinatam A N ipſis *r o*, *r o* reſpectivè æquantibus longitudinem ſubtangentis *n b*, *n b* ad ſuum punctum *a* pertinentibus, quouſque compleatur figura *o o* G A N; vel etiam, (quod in idem recidit) ſi per N punctum regula quædam N G converti concipiatur, ſecans axi figuræ parallelas *a r*, *a r* productas in punctis *o o*, ita ut eadem regula N G, ſive N *o* ſemper parallela exiſtat tangenti A B, aut *a b*, ſintque B A G N, *b a o* N parallelogramma (quomodo rurſus *r o* æqualis erit reſpectivæ *n b*, auferendo ſcilicet ex æqualibus *a o*, *b* N, æquales *a r*, *n* N), ex utraque, inquam, hac deſcriptione colligitur, figuram *o o* G A N æqualem fore prius datæ figuræ C A N, quemadmodum & partes correſpondentes *r* A G *o*, *n a* A N ſemper æquales eſſe; quid enim hoc aliud eſt, quàm ipſas lineas A G, *a g*, *num. præced.* conſideratas, directè deprimere in A G, *r o*, ut jam non ad curvam, ſed ad reſpectiva baſis A N puncta terminentur? Spatium igitur C *a* A G *g*, ſervatâ ſingularum ſuarum linearum æqualitate, protruſum in N *o o* G A, erit, ut prius, æquale ipſi C A N, niſi malis & hìc ſumere infinitè parvam tangentis portionem, ferè cum curva A *a* coincidentem, & ex proportionalitate B N, ſeu G A ad *r a*, cum N A ad A *r*, inferre æqualitatem rectangulorum G A *r*, & A N *n*, ac ſimiliter in reliquis, ut ſupra. TAB. XII. Fig. 4. 5.

4. Vel etiam ſumptâ infinitè parvâ tangentis, aut curvæ portione A *a*, junctiſque ad N radiis A N, *a* N, *a* N, oſtendetur ſemper parallelogrammum G A *a* duplum trianguli N A *a*, utpote eidem baſi A *a*, inter eaſdem parallelas A *a*, N G (aut *a a*, N *o*) inſiſtentis, quare

 tota

tota figura C*a*AG*oo*N totius CAN dupla erit, & dividendo ſpatium *oo*GAN ipſi CAN æquale erit; eo modo quo & in his bilineis curva, & recta compre-
TAB. XI. Fig. 5. 6. henſis, velut *aa*A, aut N*a*A, accepto puncto N, ſive in extremo baſis, ſive alibi, aut etiam intra figuram, & per N tranſeunte recta N*o*, quæ tangentibus *ad* perpetuò parallela exiſtens, ſecet ipſas *ar*, ad baſim NA ordinatas, in punctis *o*, erit N*oo*A*a*N dupla trilinei, ſeu bilinei (prout integra ſumitur, aut ejus pars ramis N*a* intercepta) N*a*A, propter parallelogrammum *daob* ubique duplum trianguli *da*N; unde mirum, quot figuræ dimenſionem accipiant.

TAB. XIII. Fig. 1. 2. 5. Immo eâdem operâ poſſent duæ figuræ eidem datæ æquales conſtitui, ſi nempe regula mobilis per punctum N utrinque extendatur, ut occurrat ambis coordinatis ex eodem puncto, ſcilicet non tantùm ipſi *ar* axi parallelæ, ſed & *an* parallelæ baſi in punctis O*o*; habebitur enim eàdem ratione figura CNO*o*, tum priori CAN, tum eidem collaterali GONA integrè, & particulatim (ideſt quò ad totum, & quò ad partes proportionales) prorſus æqualis; ſicut viceverſa, ubi figura CNO, vel etiam GONA alteri adjacenti CAN integrè, & particulatim modo præſcripto æqualis fuerit, ducta *ab* ramo NO parallela tanget curvam A*ac* in *a*; ſi enim ita non ſit, alia igitur, quàm NO, parallela erit tangenti *ab*, unde alia figura, quàm CNO*o*, fiet particulatim, & integrè æqualis ipſi A*a*CN, adeoque & ipſi primæ CNO, vel GO NA; quod inferret æqualitatem totius cum parte; multarum igitur curvarum tangentes hac methodo determinabis; cave tamen partium ordinem hactenus indicatum adamuſſim obſerves, in lubrico enim, ſi quidquam immutaveris, te fore prævideo. Placet autem compendii cauſa figuras hactenus deſcriptas *invicem Correlatas* appellare.

6. Quoniam verò tangentium alias methodos dedimus,

mus, in negotio dumtaxat dimenſionis figurarum paullò diutius immorabimus, cujus ex hac methodo ſpecimina benè multa obvia ſunt. Proponatur primò figura N*oo*, cujus olim hanc geneſim excogitaveram ad circuli quadraturam promovendam. Norma ex regulis CN, NA ad angulum rectum CNA compoſitis in plano verticali circa punctum N ita convertatur, ut brachium NC determinatæ longitudinis exiſtens, extremo ſuo C peripheriam quadrantis circularis C*aa*A deſcribat, brachium verò indefinitè extenſum NA infra horizontem versùs S inclinetur, ſeceturque in *o* à filo *ao*, pondere T perpendiculariter deſcendente extenſo, atque extremo regulæ NC, ſive N*a* alligato; itaque angulus *a*N*o* ſemper rectus erit; ſed & ducta circuli tangente *ab* rectus eſt N*ab*; æquidiſtat igitur N*o* tangenti *ab*; eſtque N*oo* figura quadranti Correlata; & ideo ſpatium curva N*oo*, radio NA, & aſymptoto AS interjectum æquale erit circulari quadranti CAN, ejuſque partes N*or*, ſemiſegmentis arcu C*a*, ejuſque ſinu recto, & verſo comprehenſis, æquales erunt, & zonæ *orro* zonis arcu *aa*, ordinatiſque ad axem NC interjectis æquabuntur, & interminata ſpatia *oor* AS, ſpatiis arcu Aa, radio AN, & ſinu arcus *a*C determinatis; præterea ſectores convexi NC*a*, cavis ſectoribus N*ao* æquales erunt, & portiones, curva N*o*, ejuſque ſubtenſa N*o* comprehenſæ, trilineis arcu *ac*, ejuſque tangente, & intercepta axis portione definitis æquabuntur, & arcus C*a* ad ejus ſinum, ſive ad N*r*, erit perpetuò, ut ſpatium N*oa*C ad rectangulum CN*r*, aut AN*r*, &c. Tangentem poſcis ad quodlibet punctum *o*? divide bifariam N*o*; ex puncto diviſionis ad punctum *a* junge rectam, quæ ſecabit N*r* in aliquo puncto; hinc juncta ad *o* tanget. Unde habetur, tangentem *ab* quadrantis NCA, productam uſque ad radium NA, ſimul cum ſinu *ar*, ſeu linea *or* ordinata Correlatæ N*oo*, & ramo

TAB. XII. Fig. 2.

mo N*o*, ac tangente, quam ſupra determinavimus ad punctum Correlatæ *o*, ipſum radium NA, uſque ad occurſum tangentis *ba* protenſum, ſecare in harmonica proportione; ſeu abſciſſam N*r* ad ſubtangentem, quæ correſpondet puncto *o*, & ordinatæ *or*, eſſe, ut *oa* cum *ar* ad ipſam *ar*. Eandem lineam ab aliis poſtmodum deſcriptam inveni poſita N*o* æquali abſciſſæ AS, ſine relatione ad circulum.

TAB. XIV. Fig. 10. 7. Spatii Cycloidalis dimenſio hinc etiam profluit; eſto enim Cyclois A*a*O, cum circumſcripto parallelogrammo DN, ac per punctum N perpetuò feratur recta NO, parallela exiſtens tangentibus Cycloidis *ab*, & occurrens ordinatis trilinei Cycloidalis, nempe ipſis *an* productis in *o*. Conſtat, figuram Correlatam, inde provenientem, N*oo*, fore ipſummet ſemicirculum genitorem Cycloidis, quippe cujus chordis N*o* parallelæ ſint dictæ tangentes Cycloidis, ut dudum Geometris innotuit, ac Torricellius indicavit, poteſtque ex generali noſtra de tangentibus ex motuum compoſitione determinandis doctrina, *cap.* 5. tradita, ſic paucis deduci.

TAB. XIV. Fig. 9. Gignitur Cyclois ex duplici motu, utroque æquabili, & æquè veloci, altero per baſim OD, cujus directio in puncto *a* eſt *ad*, altero per arcum ſemicirculi, cujus directio eſt tangens *d*B; hac igitur poſita æquali lineæ *da*, ſeu ipſi arcui *d*A, juncta B*a* erit tangens, utpote diameter Rhombi laterum æqualium *ad*, *d*B, adeoque in qua eſt directio motus ex duobus æquè velocibus per latera *ad*, *d*B compoſiti; verùm quia tam angulus C*d*A ſimul cum A*d*B, quàm angulus CA*d*, ſimul cum A*dr* rectum conſtituunt, eſtque C*d*A æqualis CA*d*, etiam B*d*A ipſi A*dr* æquabitur; duplus eſt igitur B*dr* ipſius A*d*B; ſed & duplus unius ex æqualibus internis *d*B*a*; itaque anguli *d*B*a*, B*d*A ſunt æquales, ſed & alterni; æquidiſtat igitur tangens *a*B chordæ circuli genitoris A*d*. Quoniam igitur præſcripta figura N*oo* eſt ſemicircu-

circulus genitor, atque ex ea, quam nunc illuſtramus, doctrina, æqualis eſt integrè, & particulatim trilineo O*a*AN, hoc ſublato ex parallelogrammo NADO, quod ejuſdem ſemicirculi, ex Archimedeis doctrinis, ſive utì & nos in Vivianeis oſtendimus ad *Pr.* 36. *Cor.* 1. eſt quadruplum, reſiduum ſpatium ſemicycloidis O*a*AD triplum erit ſemicirculi genitoris. Sed & partium cavæ cycloidis, duabus tangentibus, & curva comprehenſarum dimenſio innoteſcet; putà ſpatium A*ba* ſemper æquale erit portioni circulari, arcu A*d*, ejuſque chorda comprehenſi, eò quòd ſpatium A*dr* ſpatio, *vide fig.* 9. A*ai*, & triangulum A*dr* triangulo *iba* ſit æquale. TAB. XIV. Fig. 10.

8. Sed & ſpatia trilinearia, *redi ad fig.* 10. *ad* A*a*, arcu circuli *d*A, curva A*a*, & ordinata *da* comprehenſa, dupla ſemper eſſe convincentur ſegmentorum cycloidis, curva A*a*, & ſubtenſa A*a* comprehenſorum; ſiquidem tota parallelogramma *d*A*ba* dupla ſunt integrorum triangulorum *a*A*b*; ſed ſegmenta cava cycloidis *a*A*b*, ſimul cum ſegmentis circularibus A*d* duplum efficiunt ſolius cavi cycloidalis ſegmenti *a*A*b*; igitur reliqua trilinea *ad*A dupla erunt reſiduorum ſegmentorum convexorum cycloidis A*a*; unde & zonæ *adda* duplæ erunt ſectorum cycloidalium *a*A*a*, duabus ſubtenſis, & curva *aa* comprehenſorum. Hinc ſi ordinata *ad* eſſet ad ſemiſſem altitudinis cycloidis, ſive per centrum C circuli genitoris tranſiret, quoniam tunc trilineum A*da* quadrabile foret, utpote æquale ungulæ, ſeu figuræ ſinuum quadrantis, ad cujus arcum applicaretur, ideſt æquale quadrato radii C*d*; tunc, inquam, ſegmentum convexum cycloidis *a*A quadrabile pariter foret, (Leibnitio etiam id demonſtrante) nempe æquale ſemiſſi quadrati radii; quòd ſi ordinata *adr* ſit ad quartam altitudinis partem, ita ut A*r* ſit æqualis ſemiſſi radii AC, quia ſector circularis *d*AC duplus erit

 trian-

trianguli adA (quippe in æqualibus baſibus dA, da ad altitudinem CA duplam ipſius Ar) & trilineum cycloidale dAa, ex nuper dictis, duplum eſt ſegmenti convexi cycloidis Aa, erit tota figura $aACda$ dupla ſegmenti aAd, chorda Ad, curva Aa, & ordinatæ portione ad contenti; igitur dividendo, triangulum æquilaterum dAc æquale erit huic ipſi ſegmento; quod proinde quadrabile erit; unde & quadrabile, quod additione trianguli dAr conficitur, ſemiſegmentum aAr, ejuſque duplum in integra cycloide, æquale nimirum æquilatero triangulo, quod genitori circulo inſcribitur, utì Hugenio jam pridem innotuit; ſed & cycloidalia ſegmenta, quorum ſubtenſæ puncta conjungunt, alterum à tangente verticis, alterum ab ordinata per centrum circuli, æquè diſtantia, facilem quadraturam admittunt, ſive ad eaſdem, ſive ad diverſas partes puncta jungantur, & zonæ binis ejuſmodi ſubtenſis interjectæ pariter quadrabiles inveniuntur, & ſegmenta, tum cycloidis, tum ſemicirculi genitoris, abſciſſa chordis, quarum extrema à verticis tangente, & à baſi æquè diſſita ſint ad eaſdem partes, æqualia oſtenduntur, ubi verò ad partes contrarias, æqualia ſemicirculo, ſimul cum rectangulo diametri in ſinum arcus reſpondentis, &c. in quibus immorari non vacat, quippe ad alia pergendum.

9. Quod etiam demonſtravit olim Hugenius, ſpatium Ciſſoide Dioclea ultra quadrantem continuata, ejuſque aſymptoto, & circuli genitoris diametro interceptum, triplum eſſe ſemicirculi genitoris, facillimè ex noſtra hac methodo deducitur, illud, ejuſque ſingulas partes, cum cycloide, & ejus portionibus comparando. Sit enim ſemicyclois ACN, cujus ſemicirculus genitor AdN, ex quo etiam genita intelligatur Ciſſois Noo. Juncta ſubtenſa qualibet No, atque ordinatis, ut in figura, patet junctam Nd eſſe ipſi No perpendicularem, propter dr, rN, ro continuè proportionales; æquidiſtat

TAB. XII. Fig. 3.

diſtat igitur ipſa N*o* chordæ A*d*, atque adeò & tangenti cycloidis *ab*; quod cùm ſemper eveniat, ſequitur totum ſpatium infinitè longum *o*NAO toti ſemicycloidi, & ejus ſingulas partes N*or* ipſis portionibus C*an*, & *orro* ipſi *naan* perpetuò adæquari; juncto autem ciſſoidi ſemicirculo A*d*N, totum ſpatium *oo*N*dd*AO ſemicirculi eſſe quadruplum, & partes *o*N*d* quadruplas ſegmenti N*d*, arcu ſcilicet, ac chordâ his litteris deſignatâ comprehenſi, aut ſectores diametro AN, curvæ portione N*o*, junctiſque ex A ad *o* chordis A*o* interjectos, eorumdem ſegmentorum circularium N*d* eſſe triplos, &c.

Si curva A*ac* fuerit Tractoria, qualem *cap.* 5. ſub finem *num.* 2. deſcripſimus, cujus nimirum tangens *ab* ejuſdem ubique eſt longitudinis, utique ei Correlata figura *oo*G erit circuli quadrans, centro N, radio NA, quippe NO tangenti parallela, erit ubique æqualis, unde infinitum ſpatium à Tractoria, ejuſque Aſymptoto concluſum, quadranti circulari, radio tangentis deſcripto, æquale demonſtrabitur, & partes proportionales ſegmentis congruis reſpondebunt. TAB. XIII. Fig. 2.

10. Quid de parabolarum infinitis ſpeciebus addam? Sanè, reſumpta figura *numeri* 2. *hujus Capitis*, conſtat, ſpatium A*a*C*g*G eſſe duplicatum trilineum parabolicum ACΦ, poſito quòd ipſa CAN ſit parabola quadratica, in qua ſubtangentes NB, ſive iis æquales AG, duplæ ſunt abſciſſarum NC, ſeu AΦ; itaque parabola ACN, utpote æqualis ſpatio A*a*C*g*G, erit dupla trilinei ACΦ, ſui nimirum complementi ad parallelogrammum circumſcriptum, adeòque æqualis erit $\frac{2}{3}$ ejuſdem circumſcripti parallelogrammi; ubi autem ſubtangens NB abſciſſæ NC tripla fuerit (utì accidit in parabola cubica, ſeu in curva, cujus ordinatarum NA, *na* cubi fuerint, ut partes axis NC, *n*C à vertice abſciſſæ) erit, eadem ratione, figura A*a*CG, adeòque TAB. XV. Fig. 6.

& ipſa parabola CAN, tripla trilinei CAΦ, & conſequenter æqualis $\frac{3}{4}$ circumſcripti parallelogrammi; ac generaliter habebit cujuſvis ſpeciei parabola ad trilineum, ſeu complementum parallelogrammi ipſum circumſcribentis, eandem ſemper rationem, quam exponens poteſtatis ſuarum ordinatarum ad exponentem poteſtatum axis; ideſt in quadratica, ut 2 ad 1., in cubica, ut 3 ad 1., in quadratoquadratica, ut 4 ad 1. &c. In ea, in qua cubi ordinatarum fuerint, ut quadrata abſciſſarum, ut 3 ad 2., & in qua quadratoquadrata ordinatarum ſint, ut cubi partium axis, ut 4 ad 3, &c. quippe in hac ipſa ratione erunt ſemper ſubtangentes, conflantes figuram ACG parabolæ æqualem, ad abſciſſas conflantes dictum trilineum, ut dudum Geometris innotuit, poteſtque deduci ex generali tangentium conſtructione, *cap.* 5. præſertim *num.* 4. & ſequentibus, ad parabolas applicata.

TAB. XI. Fig. 9.

11. Eodem planè modo infinitas hyperbolas ad menſuram vocabis: Ac primò, ſpatium Apolloniana hyperbola, ejuſque aſymptoto concluſum infinitum eſſe, ſic patebit: eſto talis hyperbola A*a*C, cujus aſymptoti ΦD, DB; manifeſtum eſt, ſubtangentes BN æquales eſſe diſtantiis à centro ND; unde factâ, juxta præſcriptum *num.* 2., figurâ *g*GA*a*C, erit perpetuò GA æqualis AΦ, *ga* æqualis *af*, &c. & ſpatium *g*GA*a*C æquale ſpatio C*a*AΦD*b*; ſed & idem æquale C*a*AN*b*; ſpatia igitur C*a*AΦD*b*, & C*a*AN*b* ſunt æqualia; ſed primum excedit ſecundum parallelogrammo NAΦD; ergo oportet utraque infinita eſſe; ex finitis enim, quod alterum ſuperat ſpatio finito, non eſt illi æquale, ſed tantùm in infinitis hoc locum habet; poſtea curva A*a*C ſupponatur eſſe hyperbola ſecundi gradus, in qua videlicet ordinatarum AΦ, *af* quadrata reciprocè ſunt inter ſe, ut partes aſymptoti *f*D, DΦ; manifeſtum eſt, ex dictis *cap. præcedenti num.* 9., diſtantias à centro DN,

DN, duplas fore ſubtangentium NB; itaque, cùm ſemper in hoc caſu ΦA ſit dupla AG, *fa* dupla *ag*, tota figura *b*DΦA*a*C dupla erit ipſius *g*GA*a*C, adeòque dupla ſpatii huic æqualis C*a*AN*b*; & dividendo, ſpatium infinitum C*a*AN*b* æquale parallelogrammo hyperbolæ inſcripto NAΦD. In hyperbola tertii, aut quarti gradus, propter diſtantias à centro triplas, & quadruplas ſubtangentium, colligetur, ſpatium C*a*AN*b* eſſe ſemiſſem, aut trientem, &c. parallelogrammi DA; & generaliter eſſe illud ſpatium ad hoc parallelogrammorum, ut exponens diſtantiarum à centro ΦD, ad exponentem ordinatarum ΦA, diminutum exponente earumdem diſtantiarum; ſeu ſi exponens diſtantiarum ſit *y*, ordinatarum *x*, ut *y* ad *x-y*, ſcilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 0.; in ſecunda, ut 1 ad 1.; in tertia, ut 1 ad 2. &c. in ea, in qua diſtantiarum quadrata eſſent, ut cubi ordinatarum, ut 2 ad 1. &c.

12. Spirales verò, aut quæ harum inſtar generari concipiuntur figuræ, numquid ad hujus methodi, & doctrinæ legibus excludentur? immò & ipſæ illius influxum in ſe derivare poterunt, ſed ſuæ naturæ contemperatum; figura enim, ex ſubtangentibus ad reſpectiva puncta radii applicatis, non quidem æqualis, ſed dupla ſemper erit Spiralis figuræ ſibi correſpondentis, eò quòd harum figurarum elementa non ſint parallela, & parallelogrammis analoga, ſed convergentia, & triangulis parallelogrammorum ſubduplis reſpondentia. Exempli gratia, in Spirali Archimedea ad quemvis radium AC, vel *a*C ducta ex centro perpendiculari CB, aut C*b* æquali peripheriæ radii CA, aut reſpectivè arcui *a*I, qualem radius aſſumpto puncto A, vel *a* in ſui converſione eò uſque deſcripſit, patet ex Archimede, immò & ex dictis *cap.* 5. *num.* 9., junctam BA, ſeu *ba* tangentem eſſe; puncto igitur D, ſeu *d* aſſumpto, quod contactui quàm proxi- TAB. XV. Fig. 3.

proximum ſit, completiſque parallelogrammis DG, DC, ſeu *dg*, *dc* æqualibus, utpote complementis parallelogrammorum circa diametrum, patet, junctis DC, *dc*, triangula CDA, C*da* eſſe ſemiſſem æquè altorum, & eamdem baſim obtinentium parallelogrammorum CAFE, C*afe*; quare & ſemiſſis erunt æqualium illis parallelogrammorum MAGH, *magh*; cùmque hæc triangula excedere poſſint Spirale ſpatium CA*a*C minori exceſſu quolibet dato, conſtat ipſum integrum Spirale ſpatium omnium ejuſmodi parallelogrammorum MG, *mg*, ad minimam latitudinem redactorum, & in unam figuram confluentium (quod fit, ipſis lineis AG, *ag* ad reſpectiva puncta ejuſdem radii CA in eadem à centro diſtantia applicatis, ſcilicet AG in AK, *ag* in IL, exiſtente CI æquali ipſi C*a*, & ſic ubique, quòuſque compleatur figura CLKA, quæ in hoc caſu erit trilineum parabolicum, eò quòd ſubtangentes, quemadmodum & arcus, quibus æquantur, in duplicata radiorum ratione procedunt, ut monuimus *eodem cap. 5. num.* 9.) ſubduplum eſſe; atque adeò, cùm tale trilineum CKA, duplum ſpiralis ſpatii, conſtet, ex dimenſione parabolæ, eſſe duos trientes trianguli ſub radio CA ut altitudine, & AK ut baſi, ideſt duos trientes circuli radio CA, aut correſpondentis ſectoris radio aC, vel CI deſcripti, & ipſum Spirale ſpatium circumſcribentis, habetur, ſpiralia ſpatia trientem eſſe circularium ſectorum eadem circumſcribentium. Similiter aliarum ſpecierum ſpiralia ſpatia per correſpondentia trilinea parabolica, *cap. 5. citat.* indicata, metiri poteris, & cum ſectoribus circumſcriptis comparare; ſed & Spiralem Geometricam, ſeu Logarithmicam A*aa* invenies comprehendere, poſt infinitos ſibi ſuperimpoſitos cincinnos, cum radio CA ſpatium ſubduplum circumſcripti trianguli ABC; figura enim CLKA ex ſubtangentibus ad congrua radii puncta applicatis hìc in triangulum degenerat, quia ob æqua-

TAB XV. Fig. 8, 10.

æqualem ſemper inclinationis angulum C A B, C *ab*, triangula rectangula C A B, C *ab* ſimilia evadunt, & ſubtangentes C B, C *b*, ſeu his æquales A K, I L, in eadem radiorum A C, C *a*, vel C I ratione; Unde habes confirmationem eorum, quæ *cap. præced. num.* 10. & 11., circa hujus ſpatii comparationem, attulimus.

13. Hanc igitur tot exemplis illuſtrem doctrinam ad propoſitum applicantes, ſeptimum Hugenii Theorema ſic demonſtrabimus. Subtangentes Logiſticæ A *aa* C ſint N B, *nb*, *nb*, quæ ad reſpectiva puncta A, *r*, *r* applicatæ A N referantur in A G, *ro*, *ro*; eſt igitur figura N A G *o* O æqualis ſpatio poſt ordinatam A N, aſymptoto, & curvæ interjecto, juxta hanc doctrinam; verùm & idem ſpatium N A G convincitur eſſe rectangulum ſubtangentis N B in ordinatam N A, eò quòd, ex dictis *cap.* 5., ſubtangentis longitudo N B, *nb*, ſive jam A G, *ro*, ſit ſemper eadem; itaque ſpatium infinitum, quod poſt quamvis Logiſticæ ordinatam exporrigitur, æquale eſt rectangulo ſub eadem ordinata, & ſubtangente, atque adeò eſt duplum trianguli ejuſdem baſis, & altitudinis, quod, ordinata tangente & ſubtangente, comprehenditur, utì Clariſſimus Auctor in hoc Theoremate nobis demonſtrandum propoſuit. TAB. XII. Fig. 4.

14. Sed & ſequens Theorema octavum, videlicet, quòd *ſpatium duabus ordinatis interjectum æquale eſt rectangulo ſubtangentis in differentiam earumdem ordinatarum, utì in ſequenti figura ſpatium A D F B æquatur rectangulo ſubtangentis F O in K A*, quod quidem *cap.* 4. *num.* 4. ſatis oſtenſum eſt, atque ex iis, quæ aliàs diximus, facilè oſtendi poteſt, ex hac ipſa doctrina iterum ex abundanti demonſtrari poteſt, quippe in figura paragraphi antecedentis, nedum totum ſpatium infinitum C A N B toti rectangulo N A G O probatur æquale, ſed & ejus pars quælibet N A *an* parti correſpondenti A *ro* G, ex ſubtangentibus curvæ A *a* ad TAB. XI. Fig. 7.

ipſam

ipſam Ar applicatis genitæ, quæ eſt rectangulum ſubtangentis in differentiam ordinatarum; nec juvat amplius hìc immorari. Ad ſolida tranſeamus.

CAPUT IX.

Prima Noni Theorematis demonſtratio. Hinc ſolida omnia ex infinitis Logiſticæ ſpatiis eſſe oſtenduntur, ut quadrata radiorum baſis, & portiones, ut differentiæ quadratorum à radiis extremis. Alia Logiſtica in duplicata ordinatarum prioris ratione ſpatium comprehendit prioris ſubduplum, item ſubtangentem ſubduplam habet: generaliter quæcumque fuerit Logiſtica, ejus ſpatium, & ſubtangentes, tam ſubmultiplex erit prioris, quàm ſubmultiplicata ordinatarum ratio. Idem nonum Theorema ſecundò demonſtratur. In Correlatis figuris ſolidum ab exteriori duplum ſemper eſt ſolidi, quod ab interiori circa axem revoluta deſcribitur, & partes partium reſpondentium. Hinc tertia ejuſdem Theorematis demonſtratio. Dimenſio ſolidi ex figura quadranti correlata, ejuſve partibus tum concavis, tum convexis, item ſolidorum ex trilineo cycloidis, ipſave ſemicycloide circa tangentem verticis revoluta, ejuſque partium. Solidorum quoque ex ſpatio Ciſſoidis concavo, aut convexo, tum circa aſymptoton, tum circa ei parallela ex vertice. Conoidum ex infinitis parabolis ad circumſcriptos cylindros, vel conos, item ſolidorum ab infinitis hyperbolis ratio ad inſcriptos cylindros nota.

1. IN hoc nono Theoremate ita pronunciat Hugenius: *Solidum*, inquit, *productum ab infinito ſpatio poſt aliquam ordinatam in converſione circa aſymptoton eſt ſeſquialterum Coni, cujus altitudo æquetur ſubtangenti, & baſis ſemidiameter æqualis ſit ordinatæ: ita ſolidum pro-* du-

ductum ab infinito ſpatio BFOI in converſione circa FO, ſeſquialterum eſt Coni geniti ex triangulo BFO circa eamdem FO revoluto. Hujus prima demonſtratio ſic inſtitui poteſt. Intelligantur huic ſolido circumſcripti innumeri cylindri FM, QR, PS, &c. æqualis ubique altitudinis FQ, QP, PT, &c. indefinitè exiguæ, itaut horum cylindrorum congeries pro ipſo rotundo ſolido ſumi queat, & tangentis OB portiuncula primo cylindro FM intercepta ferè cum ipſa curva BN coincidat, ſeu ad ipſam obtineat rationem minorem qualibet inæqualitatis majoris ratione aſſignabili, (hoc enim ex vulgatis methodis fieri poteſt) deſignetur etiam OH æqualis ſubtangenti OF. TAB. XIV. Fig. 7.

2. Jam ſic: Hæc ſeries cylindrorum, qui inter ſe ſunt, ut baſium FB, QN, PV, continuè proportionalium quadrata, eſt quædam Geometrica progreſſio ſolidorum proportionalium in infinitum continuata; igitur ex demonſtrationibus, ſive Cavallerii, ſive Torricelli, ſive Gregorii à S. Vincentio, omnium terminorum aggregatum (ideſt rotundum ſolidum, de quo loquimur) erit ad primum terminum, (ſcilicet ad cylindrum MF) ut ipſe primus terminus ad primam differentiam, hoc eſt, ut quadratum FB ad ejuſdem differentiam, à quadrato QN, vel ut quadratum FO ad rectangulum HQF, quo differt ipſum quadratum FO ab OQ ex vi conſtructionis, & hypotheſis præmiſſæ. Cùm ergo ratio ſolidi rotundi ad inſcriptum conum, ex triangulo BOF genitum, componatur ex ratione talis ſolidi ad primum cylindrum FM, & ex ratione ejuſdem cylindri FM ad conum FBO, quarum prima, ex dictis, eſt eadem, quæ OF quadrati ad rectangulum HQF, ſecunda verò eadem eſt, quæ QF ad trientem altitudinis OF propoſiti coni, aut rectanguli HQF ad HQ in trientem altitudinis OF, ideo erit ſolidum rotundum Logiſticæ ad prædictumconum, ut quadratum

OF ad rectangulum HQ in trientem OF, nempe in compoſita ratione ex OF ad QH, (quæ eſt ratio ſubſubdupla, propterea quòd HQ differat ab HF differentia QF indefinitè parva, & re ad minimos cylindros redacta, penitus evaneſcente) & OF ad trientem ſui, quæ eſt ratio tripla; ex his autem compoſita ratio eſt ſeſquialtera, ut patet in his numeris 3, 6, 2; itaque ſolidum ex Logiſtica circa axem FO revoluta ſeſquialterum eſt Coni ex inſcripto, & per tangentem determinato triangulo FBO. Quod erat demonſtrandum.

TAB. XI. Fig. 8. 3. Hinc nullo negotio deducitur, rotundum ſolidum à ſpatio poſt AB infinito, ad ſolidum rotundum à ſpatio item infinito poſt aliam ordinatam CV, ad invicem eſſe, ut quadrata BA, CV, quippe & horum ſolidorum ſubſeſquialteræ magnitudines, nempe inſcripti coni, ob eamdem altitudinem ſubtangentis, ſunt ad invicem, ut quadrata radiorum baſis; necnon ſolida ex portionibus AVCB, BADQ, eſſe ad invicem, ut differentias quadratorum AB, CV, & AB, QD, ſive, ut armillas circulares ab VE, & DK circa BQ revolutis deſcriptas, vel hæc ſolida ad invicem eſſe, ut reſpondentia ſpatia geometricæ ſpiralis, per hujus Logiſticæ convolutionem, axe BC in punctum contracto, provenientia; quæ omnia, etiam argumentis *cap.* 3. adductis in demonſtratione primi Theorematis, confirmari potuiſſent, intellectis nimirum loco parallelogrammorum Bz, xz, &c. totidem cylindris, eademque prorſus demonſtratione applicata.

TAB. XII. Fig. 6. 4. Nobis aliam hujus veritatis demonſtrationem meditantibus illud oſtendendum occurrit, quòd, ſi intra Logiſticam BCA deſcribatur ad eamdem aſymptoton, eamdemque ordinatam FB alia Logiſtica BNM, cujus ordinatæ ſint, ut quadrata prioris Logiſticæ, faciendo nimirum ubique, ut FB ad DC, ita DC ad DN, & ut FB ad EA, ita EA ad EM, &c. ſpatium à Lo-

Logiſtica FBNM comprehenſum ſubduplum erit ſpatii à Logiſtica FBCA comprehenſi; ſumpta enim quavis ordinata DNC, ac poſita EF dupla FD, ordinetur EMA; eſt igitur in priori Logiſtica FB ad DC, ut DC ad EA; ſed etiam ex conſtructione, ita DC ad DN ordinatam poſterioris Logiſticæ, æquales ſunt igitur DN, & EA, & hoc ſemper; ordinantur autem EA in ſpatio FBCA ad altitudinem EF, ſemper duplam altitudinis FD interceptæ ab æquali ordinata DN in ſpatio FBNM; igitur, ex Propoſit. 1. noſtræ Appendicis ad Demonſtr. Vivian. Probl., erit ſpatium FBCA duplum ipſius FBNM. Q.e.d.

5. Colliges ſpatium FBNM æquale eſſe triangulo FBO per tangentem prioris Logiſticæ BO determinato, ſiquidem & hujus duplum eſt, ex Theoremate ſeptimo Hugeniano, idem ſpatium FBCA; necnon evidens eſt, ſubtangentem Logiſticæ poſterioris FBNM fore ſemiſſem ipſius OF, quippe ejus rectangulum in FB æquale foret ſpatio FBNM, utì & prædicto triangulo; immò generaliter, quàm ſubmultiplicata fuerit ratio ipſarum DN, DC, rationis DN, FB, tam ſubmultiplex fore ſpatium à Logiſtica BNM comprehenſum ſpatii comprehenſi ab ipſa BCA, & tam ſubmultiplices pariter fore ſubtangentes hujus, ſubtangentium illius.

6. Ut altera igitur propoſiti Theorematis demonſtratio compleatur, triangulo OFB ad verticem O inſcriptum eſto trilineum parabolicum ORPBF, cujus ad verticem tangens OF; manifeſtum eſt, Conum ex OBF circa FO proportionaliter analogum eſſe trilineo OPBF, quippe, ut circuli, vel quadrata radiorum BF, ND, ita lineæ BF, DP; quemadmodum & ſpatium FBNM ſupra deſcriptum proportionaliter analogum eſt ſolido rotundo ex Logiſtica FBCA circa FO, eò quòd circuli, vel quadrata radiorum FB, DC, ſint ut lineæ FB, DN; ita erit igitur ſolidum ex FBCA ad Conum

ex FBO, quemadmodum ſpatium FBNM, ideſt, ex *præced. num.*, triangulum FBO, ad trilineum FBPO; nempe in ratione ſeſquialtera. Q. e. d.

TAB XV. Fig. 6. 7. 7. Duas alias adhuc diverſas ejuſdem Theorematis demonſtrationes afferre poſſem, ſed ne longior ſim, & alteri longè utiliori locum aperiam, hac dumtaxat contentus ero, quam tertio loco ſubjungam, atque ut Lectores patienter attendant enixiùs rogabo. Semen fœcundiſſimum eſt, unde illa pullulat, quippe illi, quod *præc. cap num.* 2. ſevimus, atque unde tot fructus abundè collegimus, agnatum penitus, atque congeneum eſſe reperies. Sint igitur eædem Correlatæ figuræ, quas loco citato deſcripſimus, *g*GA*a*C, & NA*a*C; utraque autem circa axem NB convertatur; ajo ſolidum à ſpatio primo, & exteriori, productum duplum eſſe ſolidi à ſecundo, & interiori ſpatio, geniti; facta enim eâdem, ut priùs, conſtructione, cùm parallelogrammum NF æquale ſit ipſi MG, utroque circa NB revoluto, cylindrus ex primo erit ad tubum cylindricum genitum ex ſecundo, ut dimidia NA (quæ eſt diſtantia centri gravitatis ipſius NF ab axe motus) ad mediam arithmeticam inter MN, & AN, (quæ eſt diſtantia centri gravitatis MG ab eodem axe); hæc autem media arithmetica in parallelogrammis infinitè exiguæ latitudinis, atque adeò in ipſiſmet ſolidis, in quæ tandem deſinunt tubi illi cylindrici, punctis M, A, coincidentibus, & omni latitudine MA penitus evaneſcente, eſt ipſiſſima linea NA; itaque, cùm idem ratiocinium valeat in omnibus aliis cylindris ex *nf*, & tubis cylindricis ex *mg* in tali converſione ſpatiorum genitis, erit ſemper unuſquiſque cylindrus ſolidi ex interiori figura ad quemlibet tubum ſolidi ex figura exteriori, ut dimidia NA ad totam NA, ut dimidia *na* ad totam *na*, ſemper nimirum in ratione ſubdupla; ſolidum igitur ex interiori figura C*a*AN eſt ſemiſſis ſolidi ex

figura

figura exteriori *g*GA*a*C. Quod erat demonſtrandum.

8. Directè autem depreſſis, aut evectis lineis ſingulis AG, *ag*, ut jam non ad ipſam curvam A*a*C, ſed ad baſim NA ipſarum extrema pertingant, quemadmodum *cap. præcedenti num.* 3. monuimus, non variari figuræ quantitatem, ſed eamdem eſſe figuram N*oo*GA hinc provenientem, ac quæ prius erat *g*GA*a*C, ita pariter conſtat, idem ſolidum ex ipſa *oo*GAN circa NB revoluta proventurum, quod priùs ex *g* GA*a*C, propter ſervatam eamdem linearum AG, & O*r* tum longitudinem, tum diſtantiam ab axe motus, adeòque eaſdem cylindricas ſuperficies hæc ſolida componentes; duplum eſt igitur ſolidum ex figura *oo*GAN, ſolidi ex C*a*AN (factâ circa NB utriuſque rotatione, deſcripti; immò & partes partium reſpondentium, videlicet ſolidum, quod ex portione N*ro*, duplum ſolidi ex C*an* (acceptis *or*, & *na* homologis, ſcilicet in idem *a* punctum convenientibus) & quod ex *or*AG, duplum ejus, quod ab A*an*N, ob eamdem rationem. TAB. XII. Fig. 4. 5.

9. Tertia igitur propoſiti Theorematis Hugeniani demonſtratio ſic expedietur. Eſto Logiſtica A*a*C. Conſtat, ex dictis *cap. præced. num.* 13., ei Correlatam figuram eſſe parallelogrammum NAGO, quòd ſi circa axem Logiſticæ rotetur cylindrum producet triplum coni ab inſcripto triangulo NAB ejuſdem baſis, & paris altitudinis; cùm igitur ex ea, quam hìc adduximus, doctrinâ ſolidum ex Logiſtica circa axem ſit ſubduplum præfati cylindri ex parallelogrammo NAG, erit ſolidum Logiſticæ ad conum illum inſcriptum in ratione compoſita ex ſubdupla, inter ipſum, & cylindrum intercedente, & ex tripla inter cylindrum, ac dictum conum repertâ; Ratio autem ex his compoſita (ut ad finem *num.* 2. indicavimus) eſt ſeſquialtera; quare, &c. TAB. XII. Fig. 4.

10. Sed & hinc pariter conſtat dimenſio portionum ejuſdem ſolidi, putà ejus, quæ à parte *na*AN circa

*n*N rotata generatur, quippe quæ demonſtretur ſemiſſis tubi cylindrici ex correſpondente parallelogrammo A*ro* circa eumdem axem converſo geniti, ideſt æqualis cylindro, baſi differentia circulorum AN, N*r*, altitudine verò ſemiſſe ſubtangentis; indeque ſubtracto cylindro ab inſcripto parallelogrammo *nar*, reſiduum æquale erit annulo ex ſpatio trilineari *ar*A circa axem revoluto, quod proinde notam rationem habebit, ſive ad alium annulum *ar*A, ſive ad tubum cylindricum ex parallelogrammo, quod ſibi circumſcriberetur; & hoc, *cap.* 7. *num.* 14., deſiderabatur ad ſpatia quædam trilinearia Spiralis Geometricæ, tum ad invicem, tum ad circumſcriptas armillarum circularium portiones comparanda, ut ex ibi dictis conſtat. Calculum ineat qui volet. Nobis colligendi ſunt fructus ex doctrina, *num.* 7. & 8. indicata, uberrimè manantes, immò veriùs Lectoribus indicandi, ne voluptatem illos per ſe decerpendi eiſdem invidiſſe videamur.

TAB. XII. Fig. 2. 11. In primis igitur in figura quadranti Correlata, *cap. præc. num.* 6. deſcripta, patet, nedum integrum ſpatium SAN*o*O circa NC revolutum, producere ſolidum æquale ſpheræ radio NA deſcriptæ, quippe duplum hemiſpherii ex converſione quadrantis CAN; ſed & quarum ſpheræ portionum duplæ ſint portiones ejuſdem ſolidi à partibus concavis N*or* deſcriptæ, ac conſequenter cui ſolido æquales conoides à convexis etiam portionibus, curva N*o*, & axe CN producto interceptis, ordinataque ex *o* ipſi *r*N parallela terminatis, & circa eumdem axem converſis, & tam facile erit, ſive aliquod ex hujuſmodi conoidibus, ſive ex ſolidis à ſpatio concavo deſcriptis in data ratione dividere, quàm facile eſt in ſpheræ portionibus, & reſiduis cylindrorum illas circumſcribentium idem præſtare.

TAB. XIV. Fig. 10. 12. Cycloide O*a*AN circa tangentem verticis AN revoluta, patet ſolidum inde proveniens eſſe ſubduplum annuli

annuli ex ſemicirculo N*o*O circa eamdem tangentem converſo: unde & reſiduum cylindri illi ſolido circumſcripti, ideſt ſolidum, quod ex ſemicycloide convexa O*a*AD circa tangentem verticis converſa deſcribitur, notæ dimenſionis erit, immò & ejus partium menſura innoteſcet: quæ jam pridem inter Geometras magna ſollicitudine quæſita fuiſſe video. Idem in Ciſſoide præſtandum, cujus quidem ex nota proprietate linearum A*r*, *rd*, *r*N, *ro* proportionalium, obvia eſt dimenſio ſolidi ejus converſione circa aſymptoton AO deſcripti, quippe utì rectangula A*ro*, *dr*N æqualia inde oſtenduntur, adeòque & cylindricæ ſuperficies ab iis deſcriptæ, ita integrum illud Ciſſoidale ſolidum, integro annulo ex ſemicirculo genitore circa tangentem in N revoluto, & partes partibus correſpondentibus æquari manifeſtum eſt; ex noſtra verò doctrina manifeſta etiam evadit dimenſio ſolidi ex eodem cavo ciſſoidali ſpatio *oo*NAO circa N*n* revoluto, ejuſque partium, per comparationem ad fuſum Cycloidale ex CAN, ejuſque partes; immò & innoteſcet dimenſio Conoidum ex ſpatiis convexis, curva N*oo*, & axe *n*N producto, ac ordinata ex *o* ipſi *r*N parallela terminatis, quippe reſidua cylindrorum ex rectangulis N*ro* productorum. Solidum ex Tractoria ſubduplum pariter invenies hemiſpherii ex quadrante ſibi correlato, &c. TAB. XII. Fig. 3.

13. In parabolis cujuſvis generis C*a*A, Conoides, ex figura CAN circa axem CN, habebit ſemper ad circumſcriptum cylindrum ex CΦNA rationem notam; nota quippe eſt ratio axis NC ad ſubtangentem NB, unde & ratio cylindri ex CΦNA ad cylindrum ex BGAN, quæ eadem eſt; cylindrus autem BGAN componitur ex ſolido ex C*g*GAN (quod ſemper eſt triplum Conoidis ex CAN, quippe ſolidum ex C*a*AG*g* hujus ſemper eſt duplum), & ex conoide ex C*g*GB, cujus ratio ad ipſum CAN eadem ſemper eſt, quæ CB TAB. XV. Fig. 6.

ad

ad CN, *cb* ad *cn*, juxta Propoſit. 1. Append. noſtræ Vivian. Probl., adeòque eſt ad illum in quadratica, ut 1 ad 1., in cubica, ut 2 ad 1., in quadratoquadratica, ut 3 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum ſunt, ut quadrata ex ſagittis, ut 1 ad 2, & univerſaliter ſi ordinatarum exponens ſit x, partium verò axis y, ut x minus y ad y; itaque ſemper cylindrus ex BGAN erit ad conoidem, ex parabola CAN circa axem revoluta, ut $3y + x - y$ ad y; ſcilicet in quadratica, ut 4 ad 1., in cubica, ut 5 ad 1., in ſequenti, ut 6 ad 1, &c. in ea, in qua cubi ordinatarum reſpondent quadratis ſagittarum, ut 7 ad 2., in qua verò quadratoquadrata reſpondent cubis, ut 10 ad 3, &c. Vel ſic etiam calculus inſtitui poteſt; quoniam cylindrus ex BGAN triplus eſt coni ex triangulo BAN; ſolidum item ex C*g*GAN triplum Conoidis CAN; reliqua etiam Conois ex C*g*GB tripla erit ſolidi ex trilineo CAB; eſt verò, ex dictis, Conois CAN ad Conoidem C*g*GB convertendo, ut y ad $x - y$; ergo ex æquo Conois CAN ad ſolidum ex trilineo CAB eſt, ut y ad $\frac{x-y}{3}$, ſive, ut $3y$ ad $x - y$; & componendo, ac per converſionem rationis, conus BAN ad conoidem ex inſcripta parabola, ut $2y + x$ ad $3y$; nempe in quadratica, ut 4 ad 3., in cubica, ut 5 ad 3, in quadratoquadratica, ut 6, ad 3, in ea, in qua cubi comparantur quadratis, ut 7 ad 6, &c.

TAB. XI. Fig. 9. 14. Non difficilior infinitarum hyperbolarum tractatio erit. Sit quævis hyperbola C*a*A inter aſymptotos BDΦ; & huic correlata figura *g*G, cujus ordinatæ AG, *ag* æquales ſubtangentibus NB, *nb*. Quoniam, ex dictis *cap.* 7. *num.* 9., eſt DN ad NB, ſeu ΦA ad AG perpetuò, ut exponens ordinatarum AΦ ad exponentem diſtantiarum ΦD, videlicet, ut x ad y; etiam ſolidum ex ſpatio C*a*AΦD circa DB ad ſolidum ex

*g*GA*a*C

gGAaC circa eumdem axem, (quippe quorum cylindricæ ſuperficies à lineis Φ A, AG, & fa, ag eamdem perpetuò rationem obſervant) ut x ad y; unde idem antecedens ſolidum, ad ſolidum ex CaAN, quod eſt juxta noſtram doctrinam, ſolidi conſequentis ſubduplum, erit ut x ad $\frac{1}{2}y$; vel ut $2x$ ad y; & dividendo, cylindrus ex inſcripto parallelogrammo Φ AND ad ſolidum ex ſpatio infinitè longo CaAN erit, ut $2x-y$ ad y; ſcilicet in prima hyperbola, ut 1 ad 1 (uti jam Torricellius oſtendit) in ſecunda, ſeu quadratica; ut 3 ad 1; in tertia, ſeu cubica, ut 5 ad 1; in quarta, ſeu quadratoquadratica, ut 7 ad 1; & ſic ſemper, ſumpto antecedente juxta imparium numerorum progreſſionem; quòd ſi cubi ordinatarum ad diſtantiarum quadrata comparentur, ratio invenietur, ut 4 ad 2, ſeu 2 ad 1; ſi quadratoquadrata illarum ad illarum cubos, ut 5 ad 3, &c. Alia exempla, aliæque ſpeculationes non deerunt, ſi Lectoris induſtria, hiſce veſtigiis inſiſtens, in feraciſſimos Geometriæ campos ſe conferet.

CAPUT X.

Decimum Theorema proponitur, ac prima demonſtratione ſtabilitur. Infinita ſeries terminorum proportionalium æquatur maximo ducto in exponentem rationis, ac diviſo per eumdem exponentem unitate minutum. Ex hoc demonſtrandi modo, tum finitæ, tum infinitæ ſeries æquales oſtenduntur ſummæ, vel differentiæ duarum poteſtatum, per ſummam, vel differentiam radicum diviſæ, &c. Solidum rotundum, de quo in hoc Theoremate, per infinitæ ſeriei calculum ad menſuram redigitur. Subtangentes Logiſticæ in ordinata acceptæ ſunt, ut rectangula Logiſticæ inſcripta. Solidum ex quovis Logiſticæ ſpatio circa ordinatam re-

 voluto

voluto ad inſcriptum cylindrum eſt, ut congruum trilineum ad inſcriptum triangulum. Hæc ratio nota eſſe oſtenditur. Annulis quoque latis, per hæc ſpatia progenitis, demonſtratio applicabilis eſſe indicatur.

I. DEcimum Auctoris noſtri Theorema inventu, fateor, difficillimum mihi fuit, duas tamen, aſpirante Geometriæ Præſide, ejus demonſtrationes, eo, quod ſequitur, medio tandem extundere potui: *Solidum*, inquit, *productum ab eodem infinito ſpatio in converſione circa ordinatam BF, poſtquam exporrigitur, ſextuplum eſt Coni geniti ex triangulo BFO in converſione circa BF.* Fiat enim angulus EFH ſemirectus, & ordinatæ ND, ME in Logiſtica extendantur ad lineam FH in G, H. Concipiatur modò ſolidum ex triangulo HFE, (ad partes HE indefinitè protenſo ſimul cum Logiſtica) in ſpatium Logiſticæ FBME, quod conflabitur ex totidem rectangulis GDN, HEM, &c. Aut etiam, ut in Vivianeis indicavimus ad Schol. propoſ. 6. pag. 51. Spatium Logiſticum FBNM ita erectum, ut perpendiculare fiat plano HFE, per quod motu ſibi ſemper parallelo fluere intelligatur, ut partes ipſius Logiſticæ, lineam FH prætergredientes, deinceps evaneſcant, ita ut, cùm Logiſtica attigerit punctum G, ejus portio FDNB defecerit, ſolaque remanſerit reſidua poſt DN versùs EM in infinitùm protenſa; ubi verò attigerit punctum H, defecerit pars EFBM, ſolaque reſidua fuerit quæ poſt EM in infinitùm extenditur, &c. Jam conſtat ex prima geneſi, hoc ſolidum fore ad rotundum ex Logiſtica circa ordinatam BF revoluta, ut radius cujuſpiam circuli ad ejus circumferentiam; quæ enim lineæ DN, EM in ſolido ſupra deſcripto ducerentur in GD, HE, æquales ipſis DF, EF, in rotundo ſolido circa FB ducerentur in peripherias ab eiſdem radiis DF, EF, deſcriptas

TAB. XII. Fig. 9.

TAB. XI.

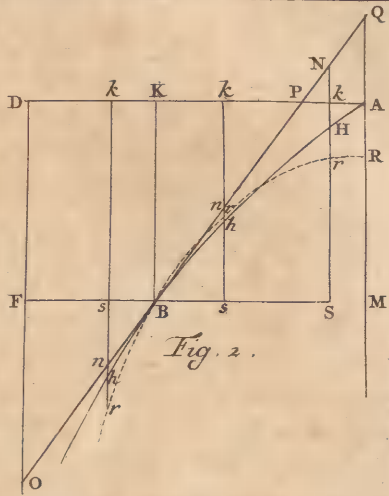


Fig. 2.

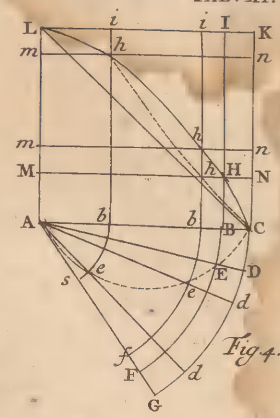


Fig. 4.

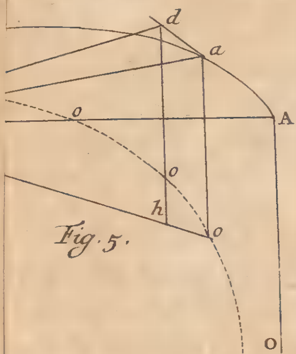


Fig. 5.

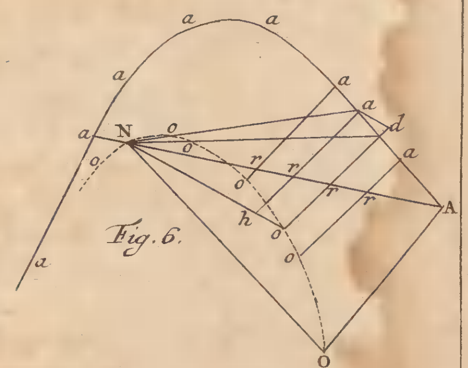


Fig. 6.

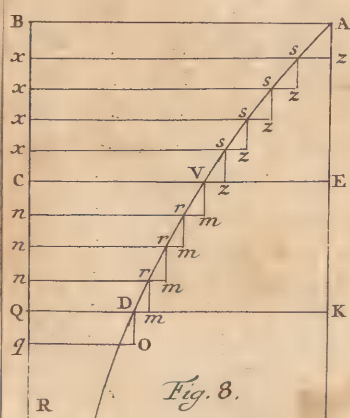


Fig. 8.

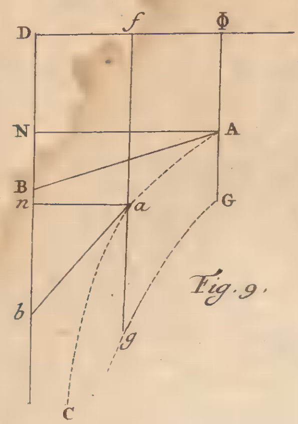


Fig. 9.

ſcriptas in rotatione earumdem ordinatarum DN, EM. Rurſus ex ſecunda geneſi ejuſdem priùs deſcripti ſolidi, patet illud fore æquale priſmati altitudine ſubtangentis OF, baſi verò integro Logiſticæ ſpatio FBNM, ideſt, per dicta *cap.* 8. in demonſtratione Theorematis ſeptimi, baſi ipſo rectangulo OFB. Ratio eſt, quia ſolidum illud, juxta ſecundam geneſim conſideratum, habet pro baſi ſpatium FBM, & ad punctum G, ſive ad altitudinem GD, habet ſectionem baſi parallelam ſpatium infinitum poſt DN extenſum, ſicut & ad altitudinem EH ſpatium infinitum extenſum poſt EM, &c. quemadmodum & priſma, baſi ſpatio FBNM, altitudine OF, ſecari poſſet in rectangulum OFB æquale ipſi FBM, & ad diſtantiam FD (æqualem DG) ſecaretur in rectangulum ex OF in DN æquale ſpatio infinito poſt DN, necnon & ad diſtantiam EF (æqualem EH) in rectangulum ex OF in EM æquale ſpatio poſt EM infinitè protenſo, &c.

2. Ratio igitur ſolidi rotundi ex ſpatio FBME circa FB rotati ad conum ex triangulo OBF, utpote compoſita ex ratione dicti ſolidi rotundi ad priſma altitudine OF, baſi ſpatio FBM, vel rectangulo OFB, & ex ratione hujus ipſius priſmatis ad dictum conum, componetur ex ratione circumferentiæ radii OF ad radium OF, (vel, aſſumpta communi altitudine OC, dicas ex ratione cylindricæ ſuperficiei deſcriptæ ab OC ad rectangulum FOC) & ex ratione dicti priſmatis ad deſignatum conum, (ſcilicet ex compoſita rurſus ex ratione rectanguli FOC ad triangulum FOB, & ex OF altitudine priſmatis ad circumferentiam ex triente OF, quæ eſt diſtantia centri gravitatis trianguli ejuſdem ab axe motus, juxta celeberrimam regulam Guldinianam, ſeu dicas ex ratione trianguli ejuſdem OFB ad triangulum ex triente circumferentiæ ab OF deſcriptæ in ipſam FB, vel OC) hæ autem rationes componunt ratio-

 nem

nem ſextuplam; cylindrica ſiquidem ſuperficies ab OC in converſione circa FB deſcripta, (quæ eſt primus terminus) cùm tripla ſit cylindricæ ſuperficiei ejuſdem altitudinis in trientem dumtaxat peripheriæ ex OF, ſive in peripheriam trientis OF, ſextupla erit trianguli ex tali triente circumferentiæ in OC, vel FB, (quod eſt ultimus terminus) utpote ſubdupli cylindricæ ſuperficiei ejuſdem altitudinis, & baſis. Solidum igitur rotundum ex Logiſticæ ſpatio FBM circa FB revoluto, ſextuplum eſt Coni ex OFB triangulo inſcripto circa eamdem ordinatam rotato. Quod erat demonſtrandum.

3. Alia ejuſdem Theorematis demonſtratio aſſumptum hoc, jam inter Geometras pervulgatum, præſupponit, quòd ſcilicet quælibet infinita ſeries terminorum continuè proportionalium æqualis eſt maximo termino ducto in exponentem rationis, & diviſo per eumdem exponentem unitate minutum; ſit, verbi gratia, communis ratio infinitorum terminorum illa, quam habet a ad 1, ſitque maximus terminus m; erunt igitur termini iſti per ordinem m, $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{aa}$, $\frac{m}{e3}$, $\frac{m}{e4}$, &c. in infinitùm: dico omnes ſimul æquari $\frac{ma}{a-1}$; multiplicentur enim ſinguli ex propoſitis terminis per $a-1$: fiet $ma-m$, $+m-\frac{m}{a}$, $+\frac{m}{a}-\frac{m}{aa}$, $+\frac{m}{aa}-\frac{m}{a3}$, &c. ubi conſtat, omnes terminos poſt ma ſe mutuò elidere; qui enim priùs negantur, iidem immediatè poſt affirmantur; atque adeò omnes æquantur ſoli priori producto ma; igitur è contra, dividendo per $a-1$, fient $m+\frac{m}{a}$, $+\frac{m}{aa}+\frac{m}{a3}+\frac{m}{a4}$, &c. in infinitùm æquales $\frac{ma}{a-1}$; quod enim multiplicatio confi-

conficit, hoc ipſum diviſio retexit. Vel ſic: In propoſitis terminis proportionalibus, ut una differentia ad unum terminum, (putà ut $a-1$ ad a) ita omnes ſimul differentiæ (ideſt ipſe maximus terminus m, in quo differentiæ omnes includuntur) ad omnes terminos, qui proptereà æquales eſſe debent $\frac{ma}{a-1}$. Q. e. d.

4. Priorem demonſtrandi modum, qui clarior eſt, atque, me judice, omnium facillimus, indicavi jam in Vivianeis ad finem pag. 150., atque expeditiſſimum innumeris veritatibus demonſtrandis Lector inveniet, ſi in illo ſemet tantiſper exercere non dedignetur. Exempli cauſa in ſeriebus finitis, deprehendet differentiam quarumlibet homogenearum poteſtatum, diviſam per differentiam radicum earumdem, æquari aggregato tot terminorum continuè proportionalium, uno gradu depreſſiorum, quot fuerint unitates in earum poteſtatum exponente; putà

$$\frac{aa-bb}{a-b}=a+b$$

$$\frac{a3-b3}{a-b}=aa+ab+bb$$

$$\frac{a4-b4}{a-b}=a3+aab+abb+b3$$

&c.

multiplicando enim per $a-b$ terminos primæ æquationis, fit $aa-ab+ab-bb=aa-bb$, ob reliquos terminos ſe mutuò elidentes; item, multiplicando terminos æquationis ſecundæ, habetur $a3-baa+baa-abb+abb-b3=a3-b3$ ob eamdem rationem; ſimiliter in aliis idem eveniet. Differentiam autem quarumlibet homogenearum poteſtatum gradus à numero pari denominati, vel ſummam gradus denominati ab impari numero,

ro, diviſam per ſummam radicum, æqualem deprehendes aggregato ſimilium terminorum, ut ſupra, ſed alternatis affirmationis, & negationis ſignis: verbi gratia,

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = aa - ab + bb$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - aab + abb - b^3$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3 b + aabb - ab^3 + b^4$$

&c.

Nam multiplicando terminos per denominatorem $a + b$ fit in prima æquatione $aa + ba - ba - bb = a^2 - b^2$, in ſecunda æquatione fit $a^3 + baa - aab - abb + bba + b^3 = a^3 + b^3$ cæteris ſe elidentibus; in tertia, & quarta, aliiſque infinitis idem proveniet.

5. In ſeriebus autem infinitis, proponatur ſumma quarumvis poteſtatum diviſa per differentiam radicum; dico æquari tot terminis uno gradu depreſſioribus, & continuè proportionalibus, quotus eſt poteſtatum gradus, cum dupla ſerie infinitarum fractionum ſimiliter proportionalium, putà $\frac{aa + bb}{a - b} = a + b + \frac{2\,bb}{a} + \frac{2\,b^3}{aa} + \frac{2\,b^4}{a^3}$ &c.

Hos quippe multiplicando per $a - b$, habes

$$aa - ba + ba - bb + 2bb - \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^3}{a} - \frac{2b^4}{aa} + \frac{2b^4}{aa} \text{ \&c.}$$

ubi,

ubi, retractis iis, qui ſe elidunt, remanet $aa + bb$. Similiter

$$\frac{a^3 + b^3}{a - b} = aa + ab + bb + \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^4}{aa} + \frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

hos enim multiplicando per $a - b$ fiet

$$a^3 - baa + baa - abb + abb - b^3 + 2b^3 - \frac{2b^4}{a} + \frac{2b^4}{a} \text{ \&c.}$$

ubi, remotis contradictoriè oppoſitis, habetur $a^3 + b^3$ &c. Idem ferè contingit, ubi poteſtatum paris gradus ſumma, vel imparis gradus differentia dividitur per ſummam radicum, niſi quòd ſigna tunc ſunt alternanda; ut

$$\frac{aa + bb}{a + b} = a - b + \frac{2bb}{a} - \frac{2b^3}{aa} + \frac{2b^4}{a^3} \text{ \&c. in infinitùm.}$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a + b} = aa - ab + bb - \frac{2b^3}{a} + \frac{2b^4}{aa} - \frac{2b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^4 + b^4}{a + b} = a^3 - aab + abb - b^4 + \frac{2b^4}{a} - \frac{2b^5}{aa} \text{ \&c.}$$

Sic etiam

$$\frac{aa}{a \mp b} = a \mp b + \frac{bb}{a} \mp \frac{b^3}{aa} + \frac{b^4}{a^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^3}{a \mp b} = aa \mp ab + bb \mp \frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{aa} \mp \frac{b^5}{a^3} \text{ \&c.}$$

Non diſſimili ratiocinio demonſtrare ſoleo extractionem radicis Neutoniano modo per ſeries infinitas. Putà ℞ $aa + xx$ (quæ eſt expreſſio generalis ordinatarum ad rectum hyperbolæ latus, exiſtente a ſemitranſverſo,

& x

& x diſtantia à centro) vel ℞ $aa - - xx$ (quæ exprimit ordinatam quadrantis circuli, cujus radius a, diſtantia ordinatæ à centro x) ſic enim ſeries ordinari ſolet

$$a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{3x^6}{48a^5} - \frac{15x^8}{384a^7} - \frac{105x^{10}}{3840a^9} \text{ \&c.}$$

ubi ſignum $\pm$ valet $+$ in hyperbola, $-$ in circulo, numeri autem, qui poſt tertium terminum afficiunt numeratores, ſunt per ordinem 3. 3×5. $3 \times 5 \times 7$. &c. qui verò afficiunt denominatores, incipiendo à ſecundo termino, ſunt 2. 2×4. $2 \times 4 \times 6$. $2 \times 4 \times 6 \times 8$. &c. orti ſcilicet, illi quidem ex mutua multiplicatione omnium imparium, hi verò ex multiplicatione mutua omnium parium numerorum per ordinem diſpoſitorum.

Demonſtratur, inquam, id ita eſſe, quia ſi illa ſeries ducatur in ſe ipſam, ſingulis ejus terminis in ſingulos multiplicatis, orietur nil aliud, quàm $aa \pm xx$, adeòque eſt legitima radix ejuſdem: nam ducatur illa ſeries

in a fiet $\quad aa \pm \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{8aa} \pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

in $\pm \frac{xx}{2a}$ fiet $\quad \pm \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{4aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $- \frac{x^4}{8a^3}$ fiet $\quad - \frac{x^4}{8aa} \mp \frac{x^6}{16a^4}$ &c.

in $\pm \frac{3x^6}{48a^5}$ fiet $\quad \pm \frac{3x^6}{48a^4}$ &c.

&c.

Summa erit $\quad aa \pm xx \quad 0 \quad 0$ &c.

6. Ad propoſitum noſtrum redeuntes, doctrinam,

num. 3.

num. 3. adductam, alteri Theorematis decimi demonſtrationi ſic applicabimus: eſto Logiſtica BVI, tangens ad B ipſa BO, ſubtangens OF, cujus particula infinitè parva FQ accepta, circumſcribantur æqualis latitudinis parallelogramma FM, QR, PS, &c. ſpatium Logiſticæ ita ſtringentia, ut ſolidum ab ipſa circa FB rotata productum ferè coincidat cum aggregato ſolidorum à talibus parallelogrammis in eadem rotatione deſcriptorum, quorum primus cylindrus ex FM, ſecundus, tertius, & alii deinceps totidem cylindrici tubi ex parallelogrammis QR, PS, &c. à quibus certè deficere poteſt illud rotundum Logiſticæ ſolidum minori defectu quolibet dato, & ratio, quam de illorum aggregato ad conum ex FOB comparato concludemus, eadem de ipſomet Logiſticæ ſolido demonſtrata eſſe intelligetur. Subtangens igitur FO vocetur a, & FQ infinitè parva d; OQ autem pro unitate 1 deſignetur, ipſa FB per b denominata; cùm ſit igitur (ob indefinitam ipſius FQ parvitatem, & punctum N curvæ cum tangente OB coincidens) FO ad OQ, ſcilicet a ad 1, ut BF, ſeu b ad QN, hæc exprimenda erit per $\frac{b}{a}$; & reliquæ lineæ PV, TI, &c. in quibus eadem proportio (ex curvæ natura) continuatur, eò quòd paribus intervallis ſint diſitæ, erunt per ordinem $\frac{b}{aa}, \frac{b}{a3}, \frac{b}{a4}$ &c. in infinitum; altitudines igitur prædictorum ſolidorum conflabunt hanc geometricam ſeriem $b, \frac{b}{a}, \frac{b}{aa}, \frac{b}{a3}, \frac{b}{a^4}$ &c. baſes autem eorumdem in ratione quadrati primi radii FQ, & mox differentiæ quadrati FP ab FQ, & quadrati FT ab FP, &c. nempe, ut dd, $3dd$, $5dd$, $7dd$, eò quòd differentiæ quadratorum à lateribus arithmeticè proportio-

nalibus ſint, ut impares numeri; hac igitur ſerie per illam multiplicata prodibit ſeries ipſorum per ordinem ſolidorum ddb, $\frac{3ddb}{a}$, $\frac{5ddb}{aa}$, $\frac{7ddb}{a^3}$, &c. quam quidem reſolvere potes in has numero infinitas, prefixis majuſculis litteris ſubnotatas,

$$\begin{array}{lccccc}
\text{A} & ddb + & \frac{ddb}{a} + & \frac{ddb}{aa} + & \frac{ddb}{a^3} + & \frac{ddb}{a^4}, \&c. \\
\text{B} & & \frac{2ddb}{a} + & \frac{2ddb}{aa} + & \frac{2ddb}{a^3} + & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
\text{C} & & & \frac{2ddb}{aa} + & \frac{2ddb}{a^3} + & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
\text{D} & & & & \frac{2ddb}{a^3} + & \frac{2ddb}{a^4}, \&c. \\
\text{E} & & & & & \frac{2ddb}{a^4}, \&c.
\end{array}$$

quarum ſumma $ddb + \frac{3ddb}{a} + \frac{5ddb}{aa} + \frac{7ddb}{a^3} + \frac{9ddb}{a^4}$, &c. eadem, ut conſtat, quæ priùs.

7. Sunt verò præſcriptæ ſeries terminorum proportionalium, quorum exponens commune a; ſi igitur maximi earum termini ducantur in a, & productum dividatur per $a - 1$, (quod hìc juxta conſtructionem eſt quantitas d infinitè parva) habebuntur termini iis infinitis ſeriebus æquales: putà ſeries A æquatur dba; ſeries B æquatur $2\,db$; ſeries C æquatur $\frac{2\,db}{a}$; ſeries D æ-

qua-

quatur $\frac{2db}{aa}$, & ſic deinceps; ſeries igitur illorum ſolidorum æquabitur progreſſionibus duabus

$$dba + db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \&c.$$

$$db + \frac{db}{a} + \frac{db}{aa} + \frac{db}{a^3}, \&c.$$

quippe harum ſumma terminis nuper collectis æquatur;

$$dba + 2db + \frac{2db}{a} + \frac{2db}{aa} + \frac{2db}{a^3}, \&c.$$

prima autem harum ſerierum (facta eadem multiplicatione) æqualis eſt baa; ſecunda verò æqualis ba; (ſive, ut æquè multæ utrobique appareant dimenſiones, addita hinc unitate, dicas ba 1) eſt verò unitas QO, ferè $=$ OF, ideſt a, quippe à qua deficit differentia FQ infinitè parva, igitur pro ba 1 accipi poterit iterum baa; atque adeò ſeries dictorum ſolidorum, ſeu ipſum rotundum ſolidum Logiſticæ, de quo loquimur in hoc Theoremate, optimè exprimetur per $2baa$; Conus autem ex triangulo BOF, utpote æqualis trienti cylindri circumſcripti (pro circulo accepto radii quadrato, ut in ſolidorum ſerie factum eſt, quod in idem recidit, ob proportionalitatem ſervatam) exprimendus erit per $\frac{1}{3}baa$; ſolidum igitur Logiſticæ ad inſcriptum Conum erit, ut $2baa$ ad $\frac{1}{3}baa$, ſive ut 2 ad $\frac{1}{3}$, vel ut 6 ad 1. Q. e. d.

8. Niſi hic demonſtrandi modus plenè ſatisfecerit, prima oſtenſione contentus, ſecundæ ſaltem conatum lauda, ac mecum progredere ad dimetiendas ejuſdem ſolidi portiones, à partibus videlicet per binas ordinatas reſectis, & circa majorem ipſarum revolutis progenitas; idque diverſâ rurſus à præcedentibus methodo: eſto,

 Logis-

TAB. XIV. Fig. 8. Logiſtica BNM, cujus ad puncta N, M, tangentes NC, MG occurrant aſymptoto quidem FG in punctis C, G, ordinatæ verò BF in punctis K, I, & coordinentur ND, NA, ME, MH; dico AK ad HI (ſubtangentes ſcilicet in ordinata, non in aſymptoto acceptas) eſſe ad invicem, ut ſunt rectangula AND, HME; ratio enim AK ad HI componitur ex AK ad AN (ſeu DN ad ſubtangentem DC, vel EG), AN ad MH, & MH ad HI (ideſt ſubtangentis EG ad EM), ergo & componitur ex DN ad EM, & AN ad MH; ex his autem conflatur ratio rectanguli AND ad HME; itaque conſtat propoſitum. Breviùs ſic: ob proportionales lineas GE, EM, MH, HI, eſt rectangulum ex GE, aſymptoti ſubtangente, in HI, ſubtangentem ordinatæ, æquale inſcripto rectangulo EMH; ſimiliter CD in AK æquabitur DNA; ergo, ut rectangula ſubtangentium aſymptoti in ſubtangentes ordinatæ, (hoc eſt ipſæ ſubtangentes in ordinata, cùm quæ in aſymptoto ſint æquales) ita erunt rectangula Logiſticæ inſcripta.

TAB. XIII. Fig. 2. 9. Concipiamus jam Logiſticam eſſe A*a*C, cujus ordinata AN, aſymptotos N*b*, tangens ad quodvis punctum *a* ipſa *a* B, conveniens cum ordinata in B; ac motâ regulâ N*o* per punctum N, ita ut perpetuò parallela exiſtat tangenti, occurrat verò ordinatæ productæ *an* ad puncta *o*O, perficiatur figura N*o*O ad communem axem N*b* poſita, quæ, ex dictis *cap.* 8. *num.* 4. & 5., erit ipſi Logiſticæ correlata, ejuſque ſpatia *o*N*n* reſpectivè ſemper æqualia ſpatiis *a*A*r*: ſingulæ autem lineæ *on* æquales erunt ſubtangentibus *r*B, in ordinata acceptis; ſed hæ proportionantur rectangulis *nar*, inſcriptis Logiſticæ ſpatio, vel etiam ſuperficiebus cylindricis per illorum converſionem circa NA deſcriptis; erunt igitur lineæ ordinatæ in figura ON*n*, ipſi *on* parallelæ ut concentricæ ſuperficies cylindricæ in ſolido rotundo ex *na* AN, circa AN revoluto, productæ à ſingulis ordinatis *na* per

na per eadem puncta *n* tranſeuntibus; igitur omnes lineæ figuræ *on*N ad totidem æquales extremæ *on* (ſive ipſa figura *on*N, aut trilineum *a*A*r* illi æquale ad rectangulum N*no*, vel *ar*B) erunt, ut omnes cylindricæ ſuperficies in dicto ſolido, ex portione *na*N revoluta genito, ad totidem æquales extremæ à linea *na* generatæ, (ideſt ut ipſummet ſolidum rotundum ad ſolidum, quod gigneretur ab hyperbola per *a* aſymptotis *n*NA inſcripta, & circa NA revoluta, quippe in illo omnes cylindricæ ſuperficies concentricæ æquales forent ei, quæ ab *na* deſcribitur, propter ſingula inſcripta parallelogramma ipſi *nar* æqualia) & ſumendo conſequentium ſemiſſes, erit trilineum *ar*A ad inſcriptum triangulum *ar*B, ut ſolidum rotundum ex *na*AN circa AN, ad inſcriptum cylindrum ex parallelogrammo *nar*N revoluto productum.

10. Nota autem eſt ratio trilinei ad inſcriptum triangulum, quippe, aſſumptâ figurâ *cap.* 7. *num.* 2. adhibitâ, conſtat, trilineum BKA æquari rectangulo ſubtangentis OF in QA, triangulum verò BKQ æquatur rectangulo ex BK in ſemiſſem KQ; propterea ratio trilinei ad triangulum componetur ex OF ad BK, (vel DK ad KQ) & ex QA ad ſemiſſem KQ (vel dupla QA ad KQ); ideſt erit, ut duplum rectangulum ex DK in QA ad quadratum KQ; nota igitur ſimiliter erit ratio ſolidi rotundi ex ſpatio Logiſticæ duabus ordinatis intercepto, & circa majorem revoluto, ad cylindrum inſcriptum, ab inſcripto ſcilicet parallelogrammo in eadem converſione progenitum, eadem ſemper, quæ præfati rectanguli ad dictum quadratum. Tubos verò, ſeu annulos ex ejuſmodi ſpatiis circa ordinatam à majori remotiorem revolutis, putà ex GHBF circa AD rotato, progenitos, eâdem aſſumptâ ſuperioris numeri figurâ, eodemque argumento facilè ad menſuram vocabis, ſimilia veſtigia premendo. TAB. XII. Fig. 1.

CAPUT XI.

Propoſitio, & demonſtratio Undecimi Theorematis circa diſtantiam centri gravitatis Logiſticæ ab ordinata. Solida infinitorum Logiſticæ ſpatiorum circa ordinatas ſunt, ut eædem ordinatæ. Centrum gravitatis quomodo diſtet ab alterutra ordinatarum in ſpatiis determinatis Logiſticæ. Solida ex his ſpatiis circa quamvis ordinatam revolutis. Datum ſolidum in data ratione dividere, &c. Propoſitio, ac prima demonſtratio Theorematis XII. circa diſtantiam centri gravitatis Logiſticæ ab axe. In Correlatis figuris diſtantia centri gravitatis interioris ſubdupla eſt ſimilis diſtantiæ exterioris. Talis diſtantia in figura Correlata quadrantis circuli eſt ſeſquitertia baſis quadraticis. Centrum gravitatis trilinei Cycloidis diſtat à verticis tangente per ſemiſſem radii. Diſtantia centri gravitatis ſemicycloidis, & ejus trilinei à baſi, & vertice; necnon ſolida ab iis deſcripta. Ciſſoidalis ſpatii centrum gravitatis, in qua ab aſymptoto diſtantia; ejus ſolida, atque hinc ratio fuſi cycloidalis ad cylindrum. Figuræ, quæ Logiſticæ ad axem correlata eſt, diſtantia centri gravitatis ab ordinata. Similis diſtantia in harum, & generaliter omnium Correlatarum figurarum complexo. Secunda demonſtratio Duodecimi Theorematis, & extenſio ad inventionem centri, in quibuſvis Logiſticæ portionibus, ad ſolida, ex iis circa quamvis lineam rotandis determinanda, utilem.

1. JAm ad centra gravitatis, tum ſpatii ſuperficialis Logiſticæ tum ſolidorum ipſius, determinanda procedit Hugenius; ait enim Theoremate Undecimo: *Ex hac ſolidorum menſura ſequitur, quòd centrum gravitatis infiniti*

finiti ſpatii poſt unam ordinatarum diſtat ab hac ordinata longitudine ſubtangentis; quod ſic breviter demonſtratur. Rotunda ſolida rationem habent compoſitam ex rationibus figurarum genitricum, & diſtantiarum centri gravitatis earumdem ab axe motus, ex pervulgata jam regula Guldini, cui neſcio an præluſerit Pappus ad finem ſuæ præfationis in *lib.* 7. *mathem. collect.* Solidum igitur ex Logiſtica BCA circa BF ad conum, ex inſcripto triangulo OBF circa eamdem revoluto, eſt in compoſita ratione ex ſpatio Logiſticæ FBCA ad triangulum OBF, (quæ per Theorema 7. *cap.* 8. demonſtratum eſt ratio dupla) & ex diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa FB ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, quæ, ut notum eſt, æquaretur trienti ipſius OF; ſed hæc eadem ſolida, ex dictis *cap. præced.*, ſunt ad invicem in ratione ſextupla, ideſt in compoſita ex dupla, & tripla; oportet ergo diſtantiam centri gravitatis ſpatii Logiſtici ab ipſa FB eſſe triplam diſtantiæ centri gravitatis trianguli ab eadem FB; ergo oportet talem diſtantiam eſſe ipſammet ſubtangentem OF, cujus triens diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut diximus, determinat; patet ergo propoſitum. TAB. XII. Fig. 6.

2. Hinc habetur, cujuſvis infiniti ſpatii Logiſticæ BAVQ, vel CVFQ, diſtantiam centri gravitatis ab extrema ordinata eamdem ſemper eſſe, quippe æqualem communi ſubtangenti: unde efficitur, ſolida ex primo ſpatio circa BA, & ex ſecundo circa CV, eſſe ad invicem, ut ipſamet ſpatia, ex quibus gignuntur, ob æqualem utrinque centri gravitatis diſtantiam, ſeu eſſe ad invicem, ut ipſæ ordinatæ BA, CV talibus ſpatiis proportionales, ex dictis *cap.* 3. *num.* 7., id quod vel exinde patet, quòd talium ſolidorum ſubſexcupla, nempe coni ab inſcriptis triangulis AOB, CVQ, ob TAB. XII. Fig. 7.

cir-

circulos æqualium radiorum BO, CQ, ſunt, ut altitudines BA, CV, circa quas convertuntur.

3. Hinc etiam patet, determinato quovis ſpatio BAVC duabus ordinatis interjecto, aſſignari poſſe diſtantiam ejus centri gravitatis ab alterutra ordinatarum. Ducatur enim tangens AO, itaque in O eſt centrum æquilibrii totius ſpatii BAVQ compoſiti ex propoſito BAVC, & ex reliquo CVFQ; ſed reliqui CVFQ habetur centrum gravitatis, ducta tangente QV, in ordinata ex puncto Q, diſtans videlicet ab æquilibrii centro O per QO æqualem altitudini CB propoſiti ſpatii (ut patet, æqualibus ſubtangentibus CQ, BO, communem ſubtrahendo, vel addendo quantitatem CO). Si igitur fiat, ut ſpatium BAVC ad reliquum CVFQ, nempe ex Theoremate tertio, quod *cap.* 4. *num.* 5. & *cap.* 3. *num.* 8. demonſtravimus, ut differentia ordinatarum AB, CV ad ipſam CV, ita QO, vel BC, ad OE, erit in ED centrum gravitatis propoſiti ſpatii CVAB, diſtans ab AB per EB, & à CV per EC; conſtat ergo propoſitum.

4. Dabuntur itaque ſolida ex quavis Logiſticæ portione AVCB, nedum converſa circa majorem ordinatarum BA, ſed & circa minorem CV, quippe ad invicem in ratione EB ad EC; & annuli ex variis ſpatiis EDVC, & CVFG, circa eamdem, vel diverſas ordinatas revolutis, notam dimenſionem, & proportionem habebunt, quippe in compoſita eorumdem ſpatiorum, diſtantiarumque ab axe ſui motus ratione; Quibus facile erit, dato ſolido ex dato ſpatio circa axem datum revoluto, aliud ex alio item ſpatio dato circa aliam quamdam ordinatam majorem, minoremve revolvendo producendum reperire, priori ſolido, vel æquale, vel in data ad ipſum ratione; item, quodvis ex talibus ſolidis per concentricas ſuperficies in data ratione, dividere, &c.

5. Jam

5. Jam ad Duodecimum Theorema Hugenii gradum faciamus, in quo aſſerit: *Idem centrum gravitatis diſtare ab aſymptoto per quadrantem ordinatæ*; Similiter enim ratio ſolidi ex BCA Logiſtica circa axem FO, ad conum ex triangulo OBF circa eumdem axem, cùm ſit, ex Theoremate, & *cap.* 9., ratio ſeſquialtera, componetur utique ex dupla, & ſubſeſquitertia, ut patet in numeris 6, 3, 4; componitur autem & ex ratione ſpatii FBCA ad triangulum FBO (quæ eſt ratio dupla) unà cum ratione diſtantiæ centri gravitatis ſpatii FBCA ad diſtantiam ſimilis centri trianguli FBO ab eodem axe motus FO; oportet igitur, quòd diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſticæ ab axe ſit ſubſeſquitertia diſtantiæ centri gravitatis trianguli, nempe ſubſeſquitertia trientis ipſius FB, adeòque quòd ſit æqualis quadranti ipſius FB, ut in hoc Theoremate proponitur, ſic enim erit ad diſtantiam centri gravitatis trianguli, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{3}$, ideſt prorſus, ut 3 ad 4. Q. e. d. TAB. XII. Fig. 6.

6. Eadem veritas, ut ſecundò demonſtretur, immò & ad diſtantiam centri gravitatis partium Logiſticæ extendatur, uberrimum illum fontem Correlatarum figurarum, unde bis jam hauſimus, in *cap.* ſcilicet 8. & 9., tertiò iterum repetam, neque enim venam idcirco exhauriendam putes, Mi Lector. Audi igitur. In Correlatis quibuſcumque figuris CAN, & *g*GA*a*C, aut CAN, G*oo*N, diſtantia gravitatis centri primæ figuræ interioris CAN ab axe NB, ſemper ſubdupla eſt diſtantiæ ſimilis centri alterius figuræ *g*GA*a*C, vel AG*oo*N ab eodem axe; cùm enim æquales ſint hæ figuræ, utì *cap.* 8. demonſtratum eſt, ſolidum tamen, quod ex prima ſit, ex *cap.* 9., ſubduplum ſolidi ex ſecunda circa axem NB revoluta, patet, hæc ſolida eſſe ad invicem, ut ſunt diſtantiæ centrorum gravitatis ab axe motus, adeòque diſtantiam primæ eſſe ſubduplam diſtantiæ alterius; & datâ diſtantiâ centri gravitatis alteru- TAB. XV. Fig. 6. 7. TAB. XII. Fig. 4. 5.

terutrius ex Correlatis figuris, diſtantia reliquæ non ignorabitur.

TAB. XII. Fig. 2. 7. Colliges jam, diſtantiam centri gravitatis figuræ AN*oo*, quadranti circulari Correlatæ, ab axe CN, eſſe ſeſquitertiam baſis Quadratricis, eidem quadranti per C adſcriptæ; cùm enim debeat dupla eſſe diſtantiæ centri gravitatis quadrantis CAN, quæ æquatur $\frac{2}{3}$ baſeos dictæ Quadratricis, eò quòd ratio compoſita ex diſtantia centri gravitatis quadrantis ad ſemiſſem radii, (diſtantiam centri gravitatis quadrati circumſcripti) & ex ſemiſſe radii ad baſim Quadraticis, ſive ex ſemiſſe arcus CA ad radium, aut ipſius quadrantis CAN ad radii quadratum, debet eſſe ratio ſequialtera, eadem nempe, quæ hæmiſpherii ex quadrante ad cylindrum ex radii quadrato (juxta Archimedis doctrinas breviùs à nobis demonſtratas in Vivianeis ad *Prop.* 37. *Coroll.* 6.) quæ, ex Centro-barica, præſcriptis rationibus componitur. Nota proinde fiet diſtantia centri gravitatis ejusdem figuræ AN*oo* ab AS, & notum ſolidum ex ipſa circa AS deſcriptum, ubi & ex eadem circa CN.

TAB. XIV. Fig. 10. 8. In trilineo Cycloidis A*a*ON patebit, centrum gravitatis diſtare à tangente verticis AN per ſemiſſem radii, figura quippe huic Correlata eſt, ex *cap.* 8. *num.* 7., ſemicirculus N*oo*, cujus centri gravitatis diſtantia eſt utique radius integer: conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum in trilineo Cyclodis ab ejus baſi OD per $\frac{3}{4}$ diametri ON; & ſolidum ex tali trilineo circa OD, triplum erit ſolidi ex ejuſdem converſione circa NA, vel æquale erit ſolido ex aggregato ſemicirculi, & præfati trilinei, videlicet ſpatii AN*o*O*a*A (aut ANO + A*d*D) circa NA; cùmque cylindrus ex parallelogrammo ONAD, ſive circa OD, ſive circa NA, pariter idem ſit; reſiduum, nempe factum ex DA*a*O ſemicycloide circa OD, æquabitur facto ex trilineo O*a*A*dd*D circa NA, atque, ut ipſa ſemicyclois

clois ad dictum trilineum, ita reciprocè erit diſtantia centri gravitatis ejuſdem trilinei ab NA, ad diſtantiam centri gravitatis ſemicycloidis à baſi OD, videlicet in ratione ſeſquialtera, illa autem æquatur $\frac{5}{8}$ diametri AD (ut mox oſtendam); ergo hæc æquatur $\frac{5}{12}$ ejuſdem ſuæ diametri.

9. Quod nuper aſſumpſi ſic oſtendetur: notum eſt, duas ſimul lineas in trilineo Cycloidali O*a*A*d*D à centro æquè remotas, *ad*, *ad*, æquales eſſe baſi OD, ſeu interceptæ *od* inter peripherias ſemicirculorum A*d*D, N*o*O; ipſa igitur *oa*, accepta in trilineo A*a*O*o*N verſùs baſim, æqualis ſemper erit lineæ *ad*, ſumptæ versùs verticem A in altero trilineo A*a*OD*d*A; itaque ipſum trilineum A*a*O*o*N haberi poterit pro eodem O*a*A*d*D inversè poſito, & tanta erit centri gravitatis diſtantia in hoc ab ipſa AN, quanta in illo ſimilis centri diſtantia ab OD. Jam ſic: ſolidum ex ſolo A*a*O*n*N circa OD triplum eſt, ex ſupra oſtenſis, ſolidi ex eodem ſpatio circa NA; & annulus ex ſemicirculo NO*o* circa OD (nam perinde eſt, ac circa AN) eſt ejuſdem duplus; itaque ſolidum ex utriuſque complexo A*a*O*o*N circa OD quintuplus eſt ſolius ſolidi ex O*a*AN*n* circa NA, additoque & hinc annulo ex ſemicirculo eodem circa NA, cujus quantitas ejuſdem ſolidi eſt dupla, habebitur, quòd ſolidum ex integro ſpatio A*a*O*o*N circa OD, ad ſolidum ex eodem circa NA eſt, ut 5 ad 3; diſtantia igitur centri gravitatis talis ſpatii ab OD, ad diſtantiam ejuſdem ab AN eſt, ut 5 ad 3; ideòque prima diſtantia æquatur 5 octantibus diametri NO, vel AD, indeque, ex præmiſſis, diſtantia centri gravitatis trilinei O*a*A*d*D ab AN eadem erit, quam ſupra determinavimus.

10. Cùm igitur & ſpatium Ciſſoidale, juxta dicta *cap.* 8. *num.* 9., figura ſit Cycloidi Correlata, erit diſtantia centri gravitatis ſpatii Ciſſoidalis AN*oo* infinitè longi, à CN, TAB. XII. Fig. 3.

CN, dupla diſtantiæ ſimilis centri cycloidis A*a*CN ab eadem baſi CN; cùmque hæc æqualis ſit $\frac{5}{12}$ diametri, juxta dicta *num.* 8., illa æqualis erit $\frac{10}{12}$ ſeu $\frac{5}{6}$ ejuſdem diametri, ac conſequenter diſtabit idem gravitatis centrum ab aſymptoto AO per ſextantem diametri NA; eritque ſolidum ex Ciſſoide AN*oo* circa AO revoluta, æquale quintæ parti ſolidi ex eodem ſpatio circa CN converſo, aut $\frac{1}{5}$ ſolidi ex Cycloide ACN circa baſim CN (quippe hoc ſolidi ex Ciſſoide circa eumdem axem ſubduplum eſt, utì jam oſtendimus *cap.* 9. *num.* 12.) eſt verò, ut ibidem monuimus, ſolidum ex Ciſſoide circa AO, æquale annulo ſtricto ex ſemicirculo genitore; ſolidum igitur ex ſemicirculo genitore Cycloidis circa tangentem verticis, vel baſim cycloidis revoluto, æquatur $\frac{2}{5}$ fuſi Cycloidalis ex cycloide circa baſim rotata, qui propterea fuſus æquabitur 5. octantibus circumſcripti cylindri ex parallelogrammo DONA (T. XIV. *Fig.* 10) ſemicirculi quadruplo, indeque producente cylindrum quadruplum dicti annuli.

11. De infinitarum parabolarum, atque hyperbolarum, deque Tractoriæ centro non eſt quod addam, Tute ipſe exerce, mi Lector; ego obiter adnoto, in figura N*o*O ad eumdem axem N*b* Logiſticæ Correlatâ, ejus gravitatis centrum ab NA diſtare per duplum ſubtangentis Logiſticæ, quandoquidem centrum Logiſtici ſpatii ex ſuperiori Undecimo Theoremate, diſtat ab ordinata AN per ſimplicem longitudinem ſubtangentis; complexi verò ex figuris Correlatis, ſcilicet ſpatii C*a*AN*o*O centrum gravitatis diſtat ab AN per ſeſquialteram longitudinem ſubtangentis; immò generaliter ſemper in figuris Correlatis, quarum partium diſtantia interioris, (ſcilicet ad quam pertinet tangens *a*B) eſt 2, earum diſtantia complexi ex utroque ſpatio eſt 3, diſtantia verò exterioris (ſcilicet ad quam ordinantur ipſæ *on* æquales ſubtangentibus alterius) eſt 4; utì eſt

TAB. XIII. Fig. 2.

evi-

evidens ex dimenſione ſolidorum ab iis factorum: unde expeditiùs demonſtrabis quæ *num.* 9. dicta ſunt.

Data autem opera, tum hìc, tum *cap. præced.* omiſimus demonſtrationem centri gravitatis in figuris ad modum Spiralium deſcriptis, ut in iis exercere ſe poſſet Lectorum induſtria, comparando videlicet triangula illa, ex quibus conſtant, cum parallelogrammis figurarum Correlatarum, ut ſupra fecimus *cap.* 8. *num.* 11.

12. In Logiſtica igitur A*aa*C, cujus Correlata figura ad ordinatam NA eſt parallelogrammum AGON, ut oſtendimus *d. cap.* 8. *num.* 13, cùm diſtantia centri gravitatis ipſius OGAN dupla eſſe debeat diſtantiæ ſimilis centri Logiſticæ NA*a*C ab eodem axe NB; ſit autem diſtantia illa in parallelogrammo æqualis ſemiſſi ipſius NA, patet, diſtantiam ejuſmodi in ſpatio Logiſtico fore ¼ ejuſdem NA, utì in hoc duodecimo Theoremate ab Hugenio propoſitum fuit; ſed & conſtat methodus comparandi diſtantias centri gravitatis variarum inſuper Logiſticæ partium ab eodem axe; accepto quippe ſpatio quolibet *naan*, ordinatiſque *aro*, *aro*, patet, rectangulum *orro* eſſe figuram Correlatam ipſi *anna*; datur autem diſtantia centri gravitatis parallelogrammi ejuſdem ab NO, ſcilicet media arithmetica inter *r*N, *r*N diſtantias laterum ab NO, itaque & ejus ſubdupla dabitur, ſcilicet diſtantia centri gravitatis figuræ *naan* ab eodem axe, perpetuò æqualis ſemiſſi mediæ arithmeticæ inter extremas ordinatas. Id quod ſuo modo obſervatur & in toto Logiſticæ ſpatio, extremæ ſiquidem ordinatarum ſunt AN, & punctum, media inter hæc arithmetica ſemiſſis NA; hujus dimidio, nempe ¼ NA æqualis prorſus eſt diſtantia centri gravitatis integri ſpatii Logiſticæ. Dabitur ergo in quovis hujuſmodi ſpatio, ſive integro, ſive duabus ordinatis intercepto, punctum ipſum, quod gravitatis ejus centrum determinat, adeòque jam metiri licebit ſolida à

TAB. XII. Fig. 4.

Logiſticæ ſpatiis circa quamlibet lineam revolutis, ex dimenſione tum ipſius Logiſticæ, tum diſtantiæ ejus centri gravitatis à propoſita linea.

CAPUT XII.

Theorema Decimumtertium demonſtratur. Eadem ſemper centri gravitatis in quibuſvis infinitè longis Logiſticæ ſolidis diſtantia; quomodo in ejuſdem ſolidi portionibus indaganda. Prima demonſtratio Decimiquarti Theorematis; ad majorem rigorem quomodo exigenda. Solidorum ab eadem figura circa baſim, & axim rotata diſtantiæ centri gravitatis ſunt, ut diſtantiæ ab axi, & baſi genitricis figuræ. Altera ejusdem Theorematis demonſtratio. Variarum Conoideon centra hinc determinanda; in portionibus ſolidi rotundi, aut cylindricis Logiſticæ truncis, aut figura Logiſticæ Correlata, centra gravitatis dantur. Libræ infinitæ, geometricè decreſcentibus, & æquè diſtantibus ponderibus gravatæ, aut finitæ quidem, ſed per intervalla continuè proportionalia arithmeticè in infinitum creſcentibus quantitatibus oneratæ, centra æquilibrii determinari poſſunt. Secunda demonſtratio à ſcrupulo vindicata. Cautio in his adhibenda; aliorum lapſus notati, ut devitentur. Curvis ſuperficiebus ſolidorum generalis demonſtratio applicatur. Logiſtica curva centro gravitatis caret; circa axem rotata ſuperficiem infinitè longam, finitæ dimenſionis producit: in qua ad determinatam hyperbolam ratione; hæc hyperbola, cujus parabolicæ lineæ in ſemitransverſum ductæ rectangulo æqualis; curva illa ſuperficies, cujus circumferentiæ, & peripheriæ parabolicæ rectangulo æqualis; ut ejus portiones correſpondeant ejuſdem parabolæ partibus. Tractoriæ ſolidum finita ſuperficie gaudet, ejus curva centro pariter caret.

1. Poſt

1. POſt centra gravitatis ſpatiorum Logiſticæ, progreditur Hugenius ad gravitatis centra in ejus ſolidis determinanda: *Reperimus*, inquit Theorem. XIII., *quòd centrum gravitatis primi ex dictis ſolidis infinitis diſtat à ſua baſi per ſemiſſem ſubtangentis.* Primum quippe illud ſolidum ex Logiſtica FBCA circa axem FO revoluta, reſolutum in circulos baſi parallelos, proportionaliter anologum eſt alteri Logiſticæ BNM, ordinatarum in duplicata priorum ratione decreſcentium, qualem ſupra deſcripſimus *cap.* 9. *num.* 4.; eadem igitur erit diſtantia centri gravitatis præfati ſolidi à circulo ſuæ baſis, quæ diſtantia centri gravitatis Logiſticæ BNM à ſua extrema ordinata FB; ſed hæc diſtantia æquatur ſubtangenti ejuſdem Logiſticæ BNM, per undecimum Theorema Hugenii ſuperiori capite demonſtratum, & hæc eadem ſubtangens oſtenſa eſt, *cap.* 9. *num.* 5., æqualis ſemiſſi ſubtangentis FO, pertinentis ad priorem Logiſticam BCA; itaque & illius ſolidi rotundi centrum gravitatis diſtabit ab extremo circulo ſuæ baſis per ſemiſſem ſubtangentis, ſeu Parametri. Quod erat demonſtrandum. TAB. XII. Fig. 6.

2. Eadem itaque ſemper erit diſtantia centri gravitatis à ſua baſi infinitorum quorumvis ſolidorum ab eadem Logiſtica per varias ordinatas reſectâ factorum, ſemper ſcilicet æqualis dimidiæ ſubtangenti ejuſdem Logiſticæ; Quocirca portionum etiam cujuſvis ex dictis ſolidis centra gravitatis aſſignari poterunt: proponatur enim, v.g. quod fit ex portione BAVC circa BC revoluta; ita procedemus, ſimili methodo, ac ſuperiori capite *num.* 3.; eſto BO ſemiſſis ſubtangentis, & conſequenter O centrum gravitatis totius facti ab infinito ſpatio BAVQ. Similiter & CQ ſemiſſis ſubtangentis ejuſdem, ut punctum Q ſit centrum gravitatis ſolidi, quod ex CVFQ; diſtat igitur hoc centrum à puncto O, per QO æqualem altitudini ſolidi propoſiti BC, propter communem TAB. XII. Fig. 7.

addi-

additam, vel detractam CO; fiat igitur, ut ſolidum ex ABCV ad infinitum ex CVFQ, nempe, ut colligitur ex dictis *cap.* 9. *num.* 3. & 10., ut differentia quadratorum AB, & CV, ad quadratum CV, ita QO, vel BC ad aliam OE, erit E centrum gravitatis ſolidi ex ſpatio BAVC circa BC revoluto geniti; quamquam expeditiùs fortè idem obtinere licebit per inventionem diſtantiæ centri gravitatis ab ordinatis in congruo ſpatio Logiſticæ, in duplicata ordinatarum ratione decreſcentis, proportionaliter analogo ad dictum rotundum ſolidum, utì numero præcedenti indicavimus.

3. Difficilior mihi viſa fuit, reque ipſa nonniſi ægrè ſucceſſit (cur enim fateri erubeſcam, qui & in magis obviis moram pati aliquando ſoleo?) Theorematis decimiquarti demonſtratio, ubi Vir Clariſſimus pronunciat, quòd *centrum etiam gravitatis alterius ſolidi diſtat ab ejus infinita baſi per octantem ſui axis.* Hoc ut demonſtrem, figuram reſumo, eumdemque calculandi modum, quo, *cap.* 10. *num.* 6., uſus ſum: ex parallelogrammis itaque FM, QR, PS Logiſticæ circumſcriptis, intelligatur confici, in converſione omnium circa FB, ſeries ſolidorum, quæ pro minori, ac minori latitudine ſingulorum, magis magiſque accedet ad rotundum Logiſticæ ſolidum, de quo in hoc Theoremate ſermo eſt; itaque ubi FQ infinitè parva ſupponatur, tunc cylindrus ab FM deſcriptus, & tubi cylindrici ex reliquis QR, PS, &c. prorſus coincident cum tali Logiſticæ ſolido, quodque de iis demonſtrabimus, de hoc perinde obtinebit; porrò oſtendimus, loco citato, (retentis iiſdem ſymbolis) cylindrum FM eſſe *ddb*, & tubos huic conſequentes per ordinem eſſe $\frac{3ddb}{a}$, $\frac{5ddb}{aa}$, &c.

TAB. XIV. Fig. 7.

Non procedit Grandi Demonstratio. Vide 10. in quo Autor explicat illud ad quod hic non attendit.

ut ſupra *pag.* 250., ſeu (propter infinitè exiguum exceſſum ipſius *a*, ſeu FO ſuper aſſumptam unitatem

tatem QO, qui exceſſus penitus evaneſcit, ubi ſolidorum ſeries in ipſum Logiſticæ ſolidum deficit) acceptâ loco ipſius a, unitate, quæ ad quemlibet gradum elevata non creſcit, nec terminos dividens illos immutat, erit prædicta ſolidorum ſeries æqualis $ddb + 3ddb + 5ddb + 7ddb$; &c.; Suſpenditur autem in libra FB primus terminus ad punctum C, medium ipſius FB, & ſecundus terminus ad punctum x, ubi cadit axi parallela, ducta ex medio puncto A lineæ QN; & tertius terminus ad y punctum, quod determinat parallela yD bifariam ſecans ipſam PV; ſimiliter & quartus terminus pendet ex z per lineam zE biſecantem ipſum TI; ſunt enim puncta C, x, y, z, &c. centra gravitatis per ordinem talium ſolidorum; per puncta verò C, A, D, E, & alia ſimiliter bifariam ſecantia ſingulas Logiſticæ ordinatas, tranſit utique linea pariter Logiſtica EDACg. Producta igitur OF in f, ut Ff æquetur ſemiſſi ipſius FQ, (adeòque à fortiori ſit infinitè parva quantitas, ac penitus evaneſcens) ad parallelam ordinatam fg producantur axi æquidiſtantes Ez, Dy, Ax, in e, d, a, c; poterit ſimiliter fg ſumi pro libra, ex qua pendeat primum ſolidum per lineam Cc, ſecundum per lineam Aa, tertium per Dd, quartum per Ee, &c. & quidem quarum partium Ff, ſeu Cc ponitur 1. talium Aa eſt 3. Dd 5. Ee 7. &c., juxta progreſſionem arithmeticam numerorum imparium, ſecundùm quam ipſa ſolida ex iis pendentia procedunt; perinde igitur onerabitur linea fg, vel FC à talibus ſolidis ex ea pendentibus, ac oneretur fg à lineis Logiſticæ gCADE; ſed ab his ordinata fg ſic oneratur, ut centrum æquilibrii habeat diſtans ab axe FO per quadrantem ipſius fg, vel FC illi proximè æqualis; (talis quippe ex Theoremate duodecimo eſt diſtantia centri gravitatis Logiſtici ſpatii, quod tales lineæ implent) ergo & centrum æquilibrii,

Auctor hic ponit $b = \frac{1}{a}$. $b = \frac{1}{a^2}$ &c quod non dat errorem quamdiu Potestas ipsius a est numerus finitus. De hoc casu hic non agitur.

Non ad latitudinem linearum attendit auctor.

aut gravitatis omnium illorum ſolidorum, ſeu integri ſolidi ex Logiſtica circa ordinatam revoluta, diſtat ſimiliter ab axe per quadrantem ipſius FC, ſeu octantem integræ FB ordinatæ; quod eſt propoſitum.

4. Si quis autem majorem in præſenti demonſtratione rigorem deſideraverit, is poterit apagogico circuitu ſibi penitus ſatisfacere, ſumptis, loco linearum C*c*, A*a*, D*d*, E*e*, parallelogrammulis C*cg*, A*ac*, D*da*, E*ed*, &c. quæ penitus proportionalia deprehendet dictis ſolidis, ſiquidem eorum altitudines BF, QN, PV, &c. proportionantur earumdem ſemiſſibus, & talium ſemiſſium differentiis *g*C, C*a*, *ad*, *de*, &c. baſes verò talium ſolidorum ſunt, ut differentiæ quadratorum ex lineis FQ, FP, FT, &c. arithmeticè creſcentium, ſcilicet ut impares numeri, vel ut lineæ C*c*, A*a*, D*d*, E*e*, &c. Unde cùm accepta fuerint tot ſolida, quæ integrum Logiſticæ ſolidum impleant, & totidem parallelogramma, quæ Logiſticum illud ſpatium adæquent, conſtabit, in eodem puncto, tum Logiſtici illius ſpatii centrum æquilibrii, tum ſolidi illius centrum gravitatis reperiri, adeòque ad quartam ipſius FC, vel octavam totius FB partem ab axe acceptam. Quod, &c.

5. Sed abſit, ut hìc ego ſubſiſtam; tamdiu mihimet ungues corrodam, quò usque clariorem, (& verò generaliſſimam) rei hujus demonſtrationem detur extundere; mihi certè videtur univerſalius quidpiam hinc relucere, quàm ut peculiaribus Logiſticæ proprietatibus adſtringi mereatur. Jam jam aſſequor: an non hoc illud eſt, quod in qualibet figura FBV, cujus baſis FB, axis FQ, quam rationem habet diſtantia centri gravitatis figuræ planæ ab axe, ad ſimilem diſtantiam à baſi, eamdem & proportionem habent ad invicem diſtantiæ centri gravitatis (uniuſcujuſque à ſua baſi) ſoli-

TAB. XIII. Fig. 5.

ſolidorum ex eadem circa baſim, & circa axim revoluta progenitorum? Intelligatur enim tota figura circa punctum F in ſuo plano verticali converti, quouſque axis FQ horizontaliter ſituetur in F*q*, in directum poſitus priori baſi FB, quæ jam perpendiculariter pendeat in in F*b*; ſumptaque axis portione FQ æquali ipſi F*q*, ordinentur QN, *qn*, quæ erunt æquales; imò eædem; & in ſolido quidem, ex figura FB revoluta, cogitetur per punctum Q tranſire cylindrica ſuperficies à linea QN deſcripta in ſui rotatione circa FB, cujus quidem rectangulum per axem duplum erit, ut conſtat, inſcripti rectanguli FQNP; in ſolido autem, ex eadem figura circa axem F*q* revolutâ, concipiamus per punctum *q* tranſire circulum radio *qn* deſcriptum, & biſecta in A ipſa QN, ducatur AX ipſi FQ parallela; pendebit igitur, in priori ſolido, cylindrica ſuperficies à linea QN deſcripta ex puncto X, quod eſt ejus centrum gravitatis; circulus verò radii *qn* pendebit ex ſuo centro *q*; eſt autem diſtantia *q*F ad FX, ut ipſa cylindrica ſuperficies ex QN ad circulum ex *qn* (eſt enim cylindrica ſuperficies quælibet ad datum circulum, ut rectangulum per axem illius, ad quadratum ex radio hujus, per propoſitionem quintam Torricellii de ſolid. ſpher. l. 1. ideſt in propoſito, ut duplum rectangulum PNQ ad quadratum *nq*, ſive ut dupla PN, vel FQ ad ipſam QN, vel ut ſimplex *q*F ad FX ipſius QN dimidiam); æquiponderant igitur ex F, tum ille circulus, tum hæc ſuperficies; & hoc ſemper; quare & utriuſque ſolidi ad libram continuatam BF*q* appenſi æquilibrium habebitur ex puncto F; unde diſtantia centri gravitatis ſolidi ex F*bnv* circa F*q* à ſua baſi tranſeunte per punctum F, erit ad diſtantiam centri gravitatis ſolidi ex figura eadem FBNV circa FB revolutâ à ſua baſi per F tranſeunte, ut reciprocè hoc ſecundum ſolidum eſt ad illud primum; ſed

 quia

quia utrumque gignitur ab eadem figura, nunc circa baſim FB, nunc circa axem Fq, vel FQ revoluta, hæc ſolida ſunt ad invicem, ut diſtantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à lineis, circa quas fit rotatio, nempe ut diſtantia, quam habet centrum gravitatis planæ figuræ FBV à baſi FB, ad diſtantiam ejuſdem ab axe QF; diſtantiæ igitur centri gravitatis ſolidorum ab eadem figura deſcriptorum, nunc factâ circa axem, nunc circa baſim rotatione, ſunt ad invicem, ut diſtantiæ centri gravitatis figuræ genitricis à baſe ad ejuſdem diſtantiam ab axe. Quod eſt propoſitum.

6. Cùm igitur diſtantia centri gravitatis ſpatii Logiſtici à ſua baſi, ad diſtantiam ejuſdem ab axe ſit, per Theoremata undecimum, & duodecimum ſupra demonſtrata in capite præcedenti, ut ſubtangens Logiſticæ ad quadrantem ordinatæ, ſeu baſis, vel ſumendo terminorum ſemiſſes, ut dimidium ſubtangentis ad baſis octantem, etiam diſtantiæ centrorum gravitatis à ſua baſi in ſolidis à Logiſtica circa axem, & circa ordinatam revolutis, in eadem proportione erunt; quare cùm, ex decimotertio Theoremate, centrum gravitatis diſtet à baſi ſolidi ex Logiſtica circa axem per dimidium ſubtangentis, etiam centrum gravitatis ſolidi ex Logiſtica circa ordinatam, diſtabit à ſua baſi per octantem ordinatæ, ut in hoc Theoremate XIV. proponitur. Q. e. d.

7. Interea hinc habes, datâ ratione diſtantiarum centri gravitatis cujuſvis figuræ, tum ab axe, tum à baſi (ſive ab aliis duabus quibuſcumque lineis) dari & rationem diſtantiarum centri gravitatis à baſi in ſolidis circa eaſdem lineas revolutis, atque unâ iſtarum determinatâ, alteram non poſſe ignorari; quocirca omnium fuſorum parabolicorum ex parabolis circa baſes revolutis dabuntur centra gravitatis, quippe dantur & centra omnium Conoidum ab iiſdem circa axes rotatis productorum,

rum,

rum, nec ignoratur proportio, ſecundùm quam gravitatis centrum diſtat ab axe, & baſi infinitarum quarumvis parabolarum; Tu per teipſum, Mi Lector, doctrinam hanc his aliiſque figuris applicare ne graveris, mihi ad finem properanti immorari diutius non vacat, innuiſſe ſuffecerit.

8. Neque difficilius erit partium utriuſque, ex dictis ſolidis, centra eadem arte rimari, quum præmiſſum ratiocinium non minùs in portionibus figurarum, quàm in ipſis integris figuris locum habere poſſit, adeòque & ad partes ſolidorum ab iis deſcriptorum transferri queat; quæque de his rotundis ſolidis determinantur, in truncis pariter cylindricis, ſeu factis ex ductu ſpatii Logiſticæ FBNM in triangula FDG, FEH (quippe quæ illis rotundis proportionaliter analoga exiſtunt) perinde obtinere manifeſtum eſt; ſed & hinc ſponte profluit diſtantia centri gravitatis ab axe N*b* in figura N*o*O Logiſticæ ad axem Correlata, quippe analoga pariter eſt ſolido ex Logiſtica circa ordinatam, cùm oſtenſum ſit, *cap.* 10. *num.* 9., lineas O*n* correſpondere rectangulis N*na* Logiſticæ inſcriptis, ſive cylindricis ſuperficiebus per idem punctum *n* in præfato ſolido tranſeuntibus. TAB. XII. Fig. 9. TAB. XIII. Fig. 2.

9. Animadvertendum etiam, ex his quatuor poſtremis Theorematibus facillimè deduci, quodnam ſit æquilibrii centrum in libra longitudine infinita, in qua paribus intervallis diſſitæ magnitudines appenderentur in eadem ratione geometrica decreſcentes, velut in hac figura ſe habent A, B, C, D, E, F, &c. TAB. XIII. Fig. 3.
in infinitùm, & quomodo, ſi illæ magnitudines jam decreſcerent in duplicata priorum ratione, centrum æquilibrii duplo propiùs accederet termino libræ, unde omium maxima penderet; Hæc enim ex undecimo, & decimotertio Theorematibus conſtare poſſunt, ſi Logiſticæ axem veluti infinitam libram horizontaliter diſpo-

 ſitam

ſitam accipiamus, unde Logiſticæ ſpatia proportionaliter deficientia, æqualium tamen latitudinum, pendeant, idemque fiat in axe ſolidi ex Logiſtica circa axem rotatâ geniti, ſumptis æquè craſſis ejuſdem ſolidi portionibus, &c. Habetur item, diſpoſitis in libra finita magnitudinibus arithmeticè in infinitùm creſcentibus, quales repræſentant lineæ V*u*, D*d*, L*l*, N*n*, &c. axi BG, Logiſticæ AVDLN parallelæ, & ad ordinatæ partes proportionales A *u*, *ud*, *dl*, *ln*, &c. applicatæ, ſed intervallis geometricè decreſcentibus inter ſingulas relictis, ita ut geometricæ progreſſionis terminus libræ extremo reſpondeat, unde infinita magnitudo ſuſpenditur, aſſignari poſſe centrum æquilibrii omnium ipſarum magnitudinum; & quòd ſi jam dictæ magnitudines ex iiſdem punctis ſuſpenſæ creſcerent in duplicata priorum ratione, ſeu procederent, ut numerorum arithmeticè creſcentium quadrata, (ut ſe habent circuli in ſolido ex Logiſtica circa ordinatam rotatâ) centrum æquilibrii duplo propiùs fieret maximæ, & infinitæ magnitudini, ultimum libræ extremum occupanti; id enim ex duodecimo, & decimoquarto Theoremate abundè innoteſcit, & ſua veluti ſponte profluit; Hæc porro ex iis Problematibus, aut Theorematibus ſunt, quæ, ſi nudè & extra hanc materiam proponerentur, mirabilia omnibus, nonnullis quoque determinatu impoſſibilia videri poſſent.

TAB. XIII. Fig. 4.

10. Porro, cùm Viro illuſtri demonſtrationem, *num.* 5., allatam communicaſſem, ſcrupulum injecit, an ſatis tuta eſſet, ab æquiponderantia ſingularum ſuperficierum cylindricarum unius ſolidi, cum ſingulis circulis alterius, ad ipſorummet ſolidorum æquilibrium facta deductio? monebat quippe hinc conſequens fore, ut ipſarummet planarum figurarum illo modo appenſarum æquilibrium fieret ex eodem puncto F, ex quo ſemper, PN ad *nq* eſſet reciprocè (ob æqualitatem homo-

TAB. XIII. Fig. 5.

loga-

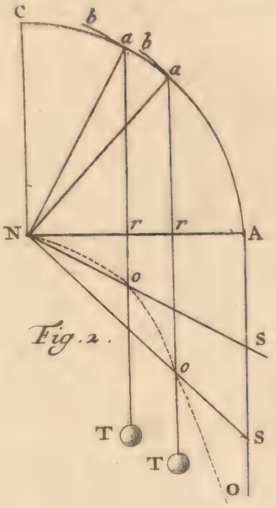


Fig. 2.

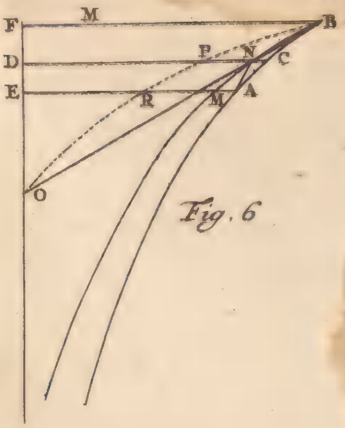
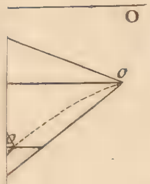


Fig. 6



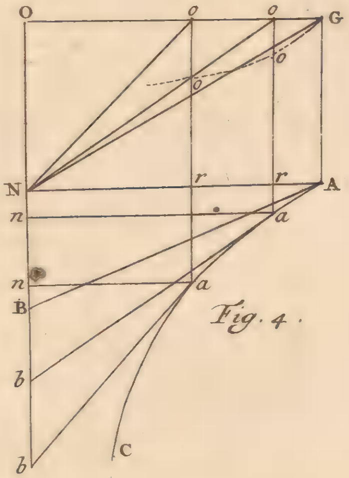


Fig. 4.

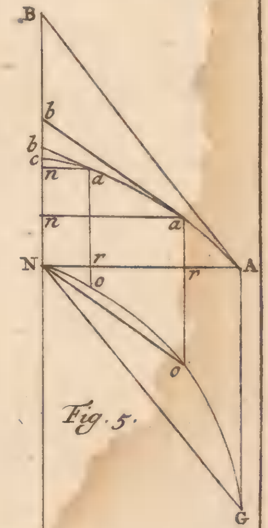


Fig. 5.

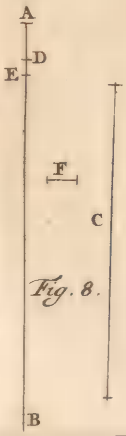


Fig. 8.

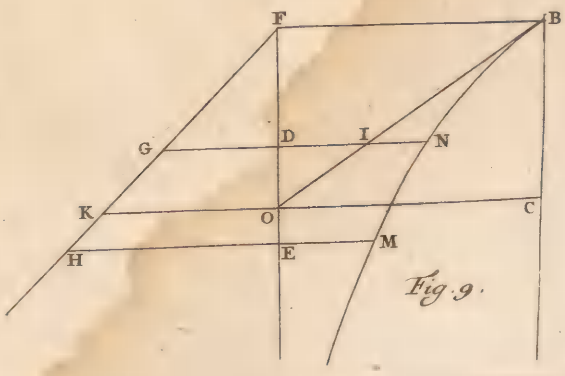


Fig. 9.

logarum linearum) ut diſtantia *q*F ad diſtantiam FP; unde ſolida ex figuris circa axem, æqualia forent ſolidis ex iiſdem circa baſim revolutis, quod eſt abſurdum: repoſui tamen, vetuſtam illam eſſe, ac ſæpius convulſam exceptionem Cavallerianæ methodo dudum oppoſitam; ſive prorſus indiviſibilia non admitteret, eo modo, quo ſub geometricam conſiderationem cadunt, ſive ſaltem reſpueret in Staticæ negotio, pro illis reponeret ſolida quàm minimùm craſſa, ut hinc tubos cylindricos, illinc cylindrulos æqualis craſſitiei, ſive inſcriptos, ſive circumſcriptos præfatis ſolidis, atque ab iis differentes minori differentiâ qualibet datâ, & tum demonſtrationem, (utut minori compendio) pari evidentiâ ſucceſſuram; enimverò ad libram hinc inde appoſitis æquiponderantibus quantitatibus, atque his, aliis rurſus æquiponderantibus additis, modò totidem hinc, totidem inde ſuſpendantur, & utrumque aggregatum æquiponderare. In allato figurarum planarum exemplo conditionem non ſervari, quippe lineæ PN axi parallelæ non totidem ſunt, quot lineæ *qn* parallelæ baſi, ſiquidem illæ ab baſim, hæ ad axem, quibus reſpectivè applicanrur, ſunt computandæ, atque eò plures ex alterutra parte ſunt, quàm ex altera, quantò major eſt linea, ad quam ordinantur, & quantò majori invicem intervallo diſtant; ideo cautum fuiſſe in demonſtratione (quemadmodum & facit Torricellius de dimenſ. parab. propoſ. 20. cujus hæc noſtra imitatio eſt) ut linea F*q* æqualis ſumeretur ipſi QF, ut circulus radii *nq*, qui ad illam applicatur, comparari legitimè poſſet cum cylindrica ſuperficie ex QN rotatâ, & ad punctum Q, diſtantiamque QF ſuo ſolido insertâ; atque utinam id obſervaſſet, qui ſolidum hyperbolicum infinitæ latitudinis metiri aggreſſus eſt, non enim illud (perinde ac infinitè longum Torricelli) finito cylindro æquale tam præproperè concluſiſſet, neque exemplis aliis indiviſibilium

lium uſum in ſuſpicionem adducere tentaſſet. Si methodi certitudo ex illegitimis applicationibus ſit æſtimanda, nec Veterum Inſcriptiones extra diſcrimen futuras, quippe iis abuſus eſt Guarinus in ſuo Euclide methodico, ubi Spheroidis, & Conoidum omnium ſuperficiem ad menſuram vocat, atque ubi generaliter cujusvis Conoidis ſuperficiem ad cylindricam circumſcriptam ſe habere ſtatuit, ut genitrix figura ad rectangulum circumſcriptum: Fermatius quoque analyticæ ſuæ methodi, perquàm pulcherrimæ, ac ſimpliciſſimæ, applicatione ad tangentem Quadratrícis determinandam infœliciter uſus eſt, necnon Wallißius compoſitione motuum ejuſdem Quadratricis perperam conſiderata, aliam quidem, ſed æquè à veritate alienam, ejuſdem tangentis conſtructionem adornavit, utì aliàs monuimus. Item Sturmius, Guarinus, Borellius, Rinaldinus circa Spiralis Archimedeæ longitudinem hallucinati ſunt, quamquam rem ſe demonſtraſſe putaverint, ut in Epiſt. Geometr. ad P. Cevam oſtendo. Quamquam Viris Clariſſimis, ac de Geometria optimè meritis, quorum primus ſuperſtes adhuc hanc ſcientiam novis inventis illuſtrat, nolim quidpiam hoc loco detractum eſſe, quum, ſi quid ipſis fraudi fuerit, humanæ id vitio conditionis, cui omnes obnoxii ſumus, tribuendum ſit, præclariſſimis verò operibus ita ſibi nominis immortalitatem comparaverint, ac poſteros devinxerint, ut nihil his decedere poſſit, ex quò ſublimioribus meditationibus diſtracti, haud ſatìs attentè perpendere curaverint leviora hæc, quæ ad methodi noſtræ defenſionem, Lectorumque, quibus prodeſſe cupimus, cautelam adnotare coacti fuimus, *ne à magnis*, ut ait ille, *nominibus præjudicium fieret Veritati.*

11. Opportunè autem (ut ejuſdem propoſitionis uſus ampliùs pateat) hìc illam applicare juvat curvis ſuperficiebus, quas gignit curva quælibet BNV, tum circa baſim

baſim FB, tum circa axim FQ rotata; utique enim centra gravitatis ejuſmodi curvarum ſuperficierum à circulo ſuæ baſis diſtabunt in iiſdem rationibus, in quibus centrum gravitatis curvæ lineæ genitricis, tum ab axe, tum à baſi diſtabat; idque, facta eadem conſtructione, eodemque ratiocinio manifeſtum eſt, ſumpto puncto N in curva circa baſim, & puncto *n* ſimili, eodemque (ſeu tantumdem ab homologis extremis diſtante) in curva circa axim rotanda; utique cùm ſit linea PN ad *qn*, ut diſtantia *q*F ad diſtantiam FP (propter æqualitatem homologarum linearum), etiam peripheria radio PN in curva ſuperficie deſcripta per rotationem circa baſim, ad peripheriam radio *qn* deſcriptam in altera curva ſuperficie ex rotatione ejuſdem curvæ circa axem, erit, ut diſtantia hujus à termino F ad diſtantiam illius ab eodem termino; æquiponderant igitur ex F dictæ peripheriæ, aliæque omnes per quævis curvæ genitricis puncta in utraque illa converſione transeuntes, totidemque in una ſunt, quot in altera termini æquiponderantes; nam dictæ peripheriæ eamdem curvam, & ad idem prorſus punctum ſtringunt, unde non plures hinc, quàm illinc computantur; quare & ipſæ ſuperficies curvæ ex eodem puncto F æquiponderabunt, eritque reciprocè, ut una ſuperficies ad alteram, ſive ut diſtantia centri gravitatis curvæ à linea, circa quam hinc, & illinc convertitur, ita diſtantia centri gravitatis hujus ad diſtantiam centri gravitatis illius, uniuſcujuſque nimirum à circulo ſuæ baſis per F tranſeuntis. Unde mirùm, quot Conoidum ſuperficies centrum gravitatis ſibi determinent. Quæcumque autem de ſolidis rotundis, deque rotundis ſuperficiebus ex eadem figura, vel linea quadlibet circa axem, & circa baſim rotata dicta ſunt, perinde ſimiliter obtinere in Ungulis ſolidis, aut ſuperficialibus, plano per axem, vel baſim tranſeunte, & ad eumdem angulum utrinque inclinato, abſciſſis ex cylindris ſuper eaſdem TAB. XIII. Fig. 5.

figuras erectis, clariùs eſt, ac inter Geometras magis vulgatum, quàm ut hìc à nobis exponi indigeat, ob proportionalitatem, tum triangulorum ſimilium, quibus Ungulæ ſolidæ ſecantur, cum circulis rotundorum ſolidorum, tum laterum Ungularum ſuperficialium, cum peripheriis circularibus rotundarum ſuperficierum homologarum.

12. Quamquam in noſtro propoſito Logiſticæ, utique tota curva centro gravitatis carere cenſenda eſt, adeòque ad invenienda utriuſque ſuperficiei curvæ, ambarum ejus Conoideon, centra gravitatis, obſervatio noſtra in hoc, & ſimilibus caſibus inutilis manet; Ratio eſt, quia ſi quod haberet gravitatis centrum curva Logiſtica BNM, illud certè in axe non foret, eò quòd curva ſuam convexitatem illi obvertat; ſed neque in ulla ab axe diſtantia; quantilla enim hæc foret, circumferentia à tali centro deſcripta, in converſione curvæ circa axem, determinatæ alicuius longitudinis eſſet, & rectangulum ex ipſa in curvam infinitam Logiſticæ, adeòque & ſuperficies curva, in rotatione circa axem deſcripta, immenſæ magnitudinis foret; cùm tamen finitam eſſe ſic demonſtretur. Ad quamlibet ordinatam DN, aut illi parallelam FAB, applicentur ipſæ tangentes NC, MG; itaut, ductis axi parallelis NAO, MHO, ſecetur AO æqualis tangenti NC, & HO, æqualis tangenti MG; atque ita ſemper, quouſque compleatur figura AOOLF. Dico (non in Logiſtica modò, ſed in quavis curva, facta ſimili conſtructione) ſpatium hujus figuræ eſſe ad curvam ſuperficiem, ex rotatione curvæ MN circa axem DE, ut radius ad circumferentiam alicujus circuli; id quod valet etiam de partibus proportionalibus, putà ſuperficie OAHO, comparata ad portionem curvæ ſuperficiei à curva MN, parallelis MHO, NAO intercepta, progenitam; ſumptâ ſiquidem quantumlibet parvâ tangentis particulâ Nr, aut Mr, ac ductâ parallelâ rs; cùm ſit tota NC,

TAB. XIV. Fig. 8.

ideſt

ideſt OA, ad N*r*, ut DN, vel FA, ad A*s* (eodemque modo GM, ſeu OH ad M*r*, ut EM, vel FH, ad H*s*) erit rectangulum OA*s* æquale rectangulo ex DN in N*r*, & OH*s* æquale rectangulo ex EM in M*r*; atque ita ſemper; itaque Ungula ſuperficialis ex cylindrico ipſi curvæ NM inſiſtente, reſecta plano per axem tranſeunte, & per 45. gradus ad planum baſis inclinato (in qua conſequenter erectæ forent ad ſingula curvæ puncta rectæ lineæ ipſis ordinatis æquales) erit æqualis ſpatio congruenti, à curva OOL terminato, quippe tam benè coincident rectangula DN*r*, EM*r* cum portionibus talis ſuperficiei, ob tangentes infinitè parvas cum curva coincidentes, quàm coincident rectangula OA*s*, OH*s*, cum ſpatio ipſo à curva OO terminato, ob infinitè parvam ſingulorum rectangulorum latitudinem; prædicta verò Ungula eſt ad curvam ſuperficiem, à curva circa axem rotata genitam, ut radius ad circumferentiam circuli, quippe in Ungula ordinantur ipſæ DN, EM, punctis curvæ inſiſtentes, in ſuperficie verò rotunda ordinantur earumdem peripheriæ; itaque ſpatium ſic determinatum à curva OOL erit ad rotundam ſuperficiem ſolidi ex curva circa axem rotata, ut radius alicujus circuli ad ejus circumferentiam; & quoties ſpatium AOOLF finitum erit, etiam illa rotunda ſuperficies pariter determinatæ magnitudinis eſſe convincetur; eſt autem illud ſpatium finitum, quoties AO, HO, ideſt ipſæ tangentes NC, MG, in immenſum non excreſcunt, utì accidit in noſtro caſu, in quo ſemper fiunt minores, utpote æquales potentia eidem quadrato ſubtangentis, ſimul cum quadrato ordinatæ minoris, ac minoris in infinitum; quò conſtat ſpatium AOLF, cujus longitudo determinata AF, latitudines autem ubique AO, HO, & cæteræ, nedum non infinitæ, ſed ſemper minores, uſque ad ultimam FL ſoli ſubtangenti æqualem, infinitum eſſe non poſſe, im-

mò eſſe minus rectangulo FAO illud circumſcribente.

13. Manifeſtum eſt porro, curvam OOL in hoc caſu eſſe hyperbolam æquilateram, axe recto FA, ſemitransverſo FL, ſubtangentis longitudinem æquante, deſcriptam, quippe ultima tangentium, evaneſcente ordinatæ quadrato, erit potentiâ, adeòque & longitudine, æqualis ſoli ſubtangenti; intellecta igitur FD eidem æquali, ut integer axis transverſus ſit DL, atque ordinatis OP, OP; quoniam differentia quadrati tangentium, ſive ejus æqualium HO, vel AO, ideſt FP, FP, à quadrato ſubtangentis FL, eſt quadratum ordinatæ EM, aut DN, ſive ipſarum OP; erit ſemper rectangulum DPL æquale quadrato PO, adeòque hyperbola LOO æquilatera.

14. Eſt autem hyperbolicum ſpatium AOOLF æquale rectangulo ex ſubtangente Logiſticæ in parabolicam curvam illam, quæ Logiſticam perpendiculariter ſecat, juxta determinationem *cap.* 5. *num.* 14. propoſitam, quæque eamdem, ſeu æqualem ſuſcipit ordinatam, aut eiſdem axi parallelis interiicitur; ſit enim ejusmodi parabola F*t*T, cujus ſemiparameter æqualis ſubtangenti Logiſticæ, videlicet FL, tangenti in puncto *t*, ſeu ipſi curvæ perpendicularis *t*X, abſcindens ex axe infra ordinatam *ty* ipſam *y*X æqualem ſemiparametro, ſeu ipſi FL (juxta ibidem dicta); itaque X*t*, æquabitur HO, & ducta quavis axi parallela, erit X*t* ad X*y*, ſeu OH ad LF, ut quævis tangentis portio, lineis infinitè proximis H*t*, *sq* intercepta, ad ordinatæ *yt* portionem, iiſdem lineis interpoſitam; rectangulum itaque ex hac ordinatæ portione in HO ſemper æquale erit rectangulo ex conſtante linea FL in illam tangentis portionem, omniaque rectangula ſpatio hyperbolico adſcripta æquabuntur rectangulo ex FL in curvam parabolicam F*t*T, ac partes partibus correſpondentibus; itaque rectangulum ſub circumferentia, radio FL,

ſeu

ſeu ſubtangentis Logiſticæ deſcripta, in curvam parabolicam F*t*T, æquale erit curvæ ſuperficiei rotundi ſolidi ex Logiſtica NM circa axem voluta progeniti; partes etiam correſpondentibus partibus æquabuntur, & talis curvæ ſuperficiei portiones, planis quibuſcumque DN, EM interceptæ, erunt ut partes parabolicæ curvæ *t*T, inter axi parallelas ab iiſdem curvæ punctis ductas concluſæ.

15. Affine huic eſt, quod in ſolido ex Tractoria circa axem revoluta nuper detexi, nempe applicatis tangentibus ad ſingula ordinatæ puncta, quæ, utpote æquales, conflabunt ſuperficiem parallelogrammam AOPF, tangentis longitudine, & ordinatâ contentam, erit infiniti illius ſolidi ſuperficies æqualis ſuperficiei cylindricæ ex FAOP circa axem revoluto, quippe quæ pariter ad parallelogrammum OF ſit, ut circumferentia ad radium; quapropter etiam curva Tractoria gravitatis centro carere dicenda erit, ſicut Logiſtica, & aliæ quævis interminatæ lineæ, finitam ſuperficiem ſui rotatione deſcribentes.

CAPUT XIII.

Theorema Decimumquintum in quinque partes diviſum aliàs demonſtratum. Figurarum ad eumdem axem compoſitarum, ſi portiones unius proportionentur ordinatis alterius, quomodo tangentes determinandæ. Aliâ demonſtratio primæ, & tertiæ partis hujus Theorematis. Hyperbolicum ſpatium æquale rectangulo ordinatæ in alteram Logiſticæ ſubtangentem. Tangens Expanſæ Ungulæ cylindricæ determinata. Generalis conſtructio tangentium pro omnibus ungulis etiam ex cylindro non circulari abſciſſis. Solidi ex Logiſtica infinitè longi ſuperficiem finitam eſſe rurſus demonſtratur. Hyperbola Ungulæ Logiſticæ correlata; ut paralle-

rallelogrammum Logiſtico trilineo circumſcriptum ad ipſum trilineum, ita cylindricus Logiſticus ad truncum ſuum, ita & Hyperbolicus cylindrus ad truncum ſuum. Rotundum ſolidum ex Hyperbola ad rotundum ex Logiſtica, ut inſcriptum Hyperbolæ parallelogrammum ad Logiſticæ ſubtangentis quadratum. Cæteræ Theorematis partes ex longioribus Logarithmorum tabulis determinandæ. Auctoris verba circa hyperbolæ quadraturam ex Tractatu de evolutione curvarum adducta. Hyperbolæ quadratura per Tractoriam.

I. ULtimum Hugenii Theorema quinque partes complectitur, quas demonſtraturus, & ſimul referam, & ſuis aſteriſcis, ordinis, & claritatis ſervandæ gratia, diſtinguam: ait igitur: *1. *Notum jam eſt, hanc Logiſticam lineam tetragoniſmo hyperbolæ deſervire, poſt demonſtrationes P. Gregorii à S. Vincentio circa hyperbolica ſpatia, duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjecta.* *2. *Quòdque ſi duo fuerint hujuſmodi ſpatia, in quibus ordinatæ unius ſint, ut AD ad HG & ordinatæ alterius, ut BF, ad CE, hæc ſpatia erunt inter ſe, ut lineæ DG, & FE.* *3. *Nondum autem, quod ſciam, notatum fuit, hæc ipſa ſpatia hyperbolica eſſe ad parallelogrammum Hyperbolæ (ſic voco parallelogrammum, cujus latera ſint duæ ad utramque aſymptoton ordinatæ ex eodem puncto ſectionis ductæ) ut unaquæque linearum DG, FE ad ſubtangentem FO.* *4. *Adeò ut, ſi parallelogrammum Hyperbolæ ſupponatur partium 0,4342944819, quodlibet hyperbolicum ſpatium, duabus ad alteram aſymptoton ordinatis interjectum, erit ad hoc parallelogrammum, ut Logarithmus proportionis earumdem ordinatarum, videlicet, ut differentia Logarithmorum numerorum, exprimentium proportionem ordinatarum, ad numerum 0, 4342944819; acceptis ſcilicet Logarithmis decem notarum ultra characteriſticam.*

TAB. XIII. Fig. 6.

ēdm. **5. Hinc porro facilè eſt veritatem oſtendere Tetragoniſmi Hyperbolæ, abs me propoſiti in Tractatu de Evolutione linearum curvarum, quem Horologio meo oſcillatorio inſerui.*

2. Primam, & ſecundam partem jam, *cap. 6. num. 2. 3. & 4*, abundè oſtendimus; tertiam quoque partem, adeòque & reliquas ex his conſequentes, ibidem *num.* 6. & 7., in aperto poſuimus, ut nihil opus ſit ſuperaddere: plenioris tamen ſcientiæ, atque Lectorum utilitatis gratiâ, rurſus eadem demonſtrare aggrediar, generali hoc Lemmate præmiſſo, quod & in præcedentibus quadantenus attigimus: nimirum. Si duo ſpatia quælibet AQRB, SRB ad eumdem axem BR comparata fuerint, itaut ſemper unius portiones, à termino QR computatæ, proportionales ſint ordinatis alterius, putà FNQR ad OTRQ, ut FS ad TP; manifeſtum eſt, quòd conſtans quædam linea K ſe habebit ut parameter comparationis, (eo modo, quo *capite 4. num.* 2. parametrum Logiſticæ expoſuimus) itaut, ſi K in FS adæquet ſpatium FNQR, etiam K in TP adæquet ſpatium TOQR; fiat ergo, ut K ad FN, ita FD ad FS, (ſeu ponatur NFD rectangulum æquale ſpatio NFRQ) dico junctam DS tangere curvam RPS in S. Patet id, tum ex *cap. 6. num.* 8., ubi generaliter monuimus, in curvis præmiſſæ conditionis, eſſe GM ad SF, ideſt, ob triangula ſimilia, FB ad FD, aut rectangulum alteri figuræ adſcriptum BFN ad NFD, ut idem rectangulum ad ſpatium NFRQ, quod propterea æquabitur ipſi NFD rectangulo, eritque, ut K ad FN, ita FD ad FS, quippe cùm tam extremorum, quàm mediorum rectangula eidem NFQR ſpatio ſint æqualia; tum etiam conſtat ex dictis *capite 5. num. 6. & 7.*, ubi ex motuum compoſitione hanc ipſam tangentium conſtructionem, datâ præſcriptâ figurarum conditione demonſtravimus; tum denique hoc argumento; ordinentur

TAB. XIII. Fig. 7.

nentur hinc inde OTV, *otu* ſecantes curvam in P, *p*; rectam verò DS in V, *u*; quoniam ex conſtructione eſt ſpatium NFRQ æquale rectangulo NFD; eſt verò NF*t* minus ſpatio NF*to*, & NFT majus ſpatio NFTO in figura dextra, ubi curvæ RS convexum axem reſpicit, & è contra in figura ſiniſtra majus NF*t*, quàm NF*to*, minus NFT quàm NFTO, ubi curvæ RS concavum axi obverſum eſt, erit reſiduum ex NF in TD, aut aggregatum ex NF in *t*D, minus ſpatio *ot*RQ, majus ſpatio OTRQ in prima figura, & è contra majus ſpatio *ot*RQ, minus OTRQ in ſecunda, ſeu reſpectivè minus, & majus, majus, & minus rectangulo ex K in ordinatam *tp*, TP, quippe quòd juxta conſtructionem tali ſpatio æquatur; habebit ergo NF ad K, ideſt SF ad FD, aut *ut* ad *t*D, VT ad TD, minorem, & reſpectivè majorem in prima figura, ſeu majorem, & reſpectivè minorem rationem in ſecunda, quàm habeat *tp* ad eamdem *t*D, ſeu TP ad eamdem TD; ideòque *tp*, & TP in prima figura majores erunt, quàm *ut*, & VT, minores autem iiſdem reſpectivè ſumptis in ſecunda Lectoris dexteram reſpiciente; & ideo puncta curvæ P, *p*, erunt utrobique extra rectam DS; quæ propterea tangens erit. Quod fuerat demonſtrandum.

* *Animadvertendum in figura ſiniſtra hujus Schematis, in quo duæ figuræ AOQR ſunt decreſcentes ad partes AB, tertiam iiſdem litteris notatam decreſcentem ad partes oppoſitas RQ (quòd attinet ad hoc propoſitum) ſuperfluere, neque ad hoc notatam eſſe, ut huic conſtructioni inſerviat, quum evidens ſit, numquam contingere poſſe, ut, cavitate curvæ RSG ad axem RB converſa, figura ſuperior QRBA ad partes RQ deficiat; eſſet enim rectangulum NFD, non æquale, ſed majus ſpatio NFRQ.*

TAB. XIV. Fig. 1. 3. Cùm igitur, ex dictis *cap. 6. num. 4.*, lineæ in Logiſtica QRS axi BV parallelæ, veluti FS, PR, ſint ad

ad invicem, ut ſpatia hyperbolica NORQF, ORQP (exiſtentibus ABQ aſymptotis, ordinatiſque FN, PO, QR alteri aſymptotorum parallelis) patet ſpatium hyperbolicum ORQP æquari rectangulo OPD, ex ordinata OP in alteram Logiſticæ ſubtangentem PD; unde conſtat, quomodo Logiſtica Hyperbolæ quadraturæ conducat, uti in prima hujus Theorematis parte aſſerebatur; ſecundam partem citra petitionem principii probare hinc nequeo, ſed ſatis evidenter præoſtenſam habes loco citato. Tertiæ partis demonſtratio ſic erit inſtituenda. Rectangulum OPD æquale eſt, ex dictis, ſpatio hyperbolico ORQP; habebit ergo parallelogrammum hyperbolæ inſcriptum KOPB ad ſpatium OPQR eamdem rationem, quam idem habet ad rectangulum OPD; ideſt, quam baſis BP, ſeu TR ad PD; aut, ob triangulorum ſimilitudinem, quam ſubtangens Logiſticæ GT ad axi parallelam RP. Quod erat demonſtrandum.

4. Obiter notare potes in demonſtratione (*num.* 2.) allata, quot curvarum tangentes geometricè determinari queant, præſcriptam nimirum conditionem ſuſcipientes. In Expanſa Sphærica ſuperficie, ſive Ungula quavis cylindrica in planum extenſa (qualem in Demonſtrationibus Vivianeorum Problematum conſideravimus) ſpecimen hìc dumtaxat daturi ſumus. Eſto ejuſmodi ſuperficies Ungularis Expanſa BQSC; cui inversè ad eumdem axem altera ſimilis, & æqualis, ſive eademmet replicata, ANBQ applicata eſſe intelligatur. Conſtat, ex Propoſitione quinta Demonſtrat. Vivian. Probl., fore totam ſuperficiem BAQ ad partem ANFQ reſectam quavis ordinata NF, ſecante alteram curvam in S, ut ordinata BC ad FS, quia ordinata FN tantumdem diſtat à baſi AQ in figura ABQ, quantùm FS à vertice Q figuræ QBC; itaque, ſi fiat rectangulum NFD æquale ſpatio ANFQ, juncta DS TAB. XIII. Fig. 8.

 erit

erit tangens, juxta ea, quæ (*numer.* 2.) generaliter demonſtravimus. Et ſi ſupponatur QBC eſſe Ungula plano ſemiquadrantaliter inclinato abſciſſa, ſeu eadem, ac figura ſinuum inſcripti quadrantis BCI, quem axi parallela SL ſecet in G, tangat verò in eodem puncto GK, erit tum FD æqualis KG; demiſſo enim ſinu GE, ac juncto radio GB, quemadmodum SF æquatur ſinui GE, erit FN æqualis ſinui GL, ſeu EB; eſt autem ſuperficies ANFQ æqualis radio BC, vel BG in ipſam EG, vel BL; (utì conſtat ex eadem Propoſitione quinta, vel ex decimaquinta particulatim acceptis) itaque rectangulum NFD æquatur ipſi BGE; porro hoc æquale eſt EB in KG, propter GB ad EB, ut KG ad GE; itaque NFD æquatur EB in KG, ſuntque NF, EB æquales; ergo & FD æqualis erit tangenti GK; eidemque quantitati æqualis erit, (ideſt ſemper erit DF ad FQ, ut tangens ad arcum lineæ QF congruentem antequàm in planum evolveretur, utì eſt hic arcus GI) etiam ſi Ungula ſemiquadrantalis non ſit; curvarum enim eumdem axem, & ordinatas proportionales habentium eadem eſt, reſpectu ejuſdem à vertice altitudinis, conſtans ſubtangens FD.

5. Quinimo & ſi Ungula non ex circulari cylindro, ſed ex parabolico, hyperbolico, aut alterius generis curvæ inſiſtente reſecta foret, eademque poſterior conſtructio locum obtineret, quippe & in illis hoc ſemper evenit, ut (ſi fuerint ſemiquadrantales, ideſt inclinatione ſemirectâ abſciſſæ) inſcriptâ figurâ genitrice (quæ cylindri baſis erat) BCGI, ductâque axi parallelâ qualibet SGL, erit SL æqualis arcui curvæ GC; nam & tota BQ æqualis eſt curvæ IGC, circa quam in cylindro convolvebatur; & portio QF æqualis portioni IG, utpote ſuſcipiens ordinatam FS æqualem ſinui GE, cui æqualis erigebatur in ſuperficie cylindrica ad punctum G nondum expanſâ, adeòque & reliqua FB, ſeu SL æqua-

æqualis reliquæ portioni G C. His itaque exiſtentibus, ductâque ad punctum G tangente genitricis curvæ G K, atque huic poſitâ æquali F D, oportet, junctam D S tangere curvam Ungulæ ſic expanſæ; etenim hinc inde ductis parallelis V P H *m* R T axi propiori, *hupmrt* remotiori, ſecantibus lineas, ut in figura videre eſt; cùm ſit D F ad H V, vel *hu*, ut F S ad S H, ſeu S *h*, vel K G ad tangentem G *m*, poſitâ jam D F æquali K G, erit prædicta G *m* æqualis H V, ſeu *hu*; verùm propter S L, ſeu H T, vel *ht* æqualem curvæ G C, & P T, vel *pt* æqualem R C, ſeu *r* C, erit H P, vel *hp* æqualis curvæ G R, vel G *r*: eſtque R G minor, ſicut è contra *r* G major tangente *m* G; itaque H V major eſt quàm H P, minor verò *hu*, quàm *hp*; & utrobique puncta V, *u* rectæ D S ultra curvam Q P S *p* C: tangit ergo, utì propoſitum fuerat; eademque F D ſubtangens erit omnium aliarum Ungularum etiam non ſemiquadrantalium, propter ordinatas ad eadem axis puncta F ſemper proportionales.

6. Quanta hinc, Deus bone, Veritatum ſeges enaſcitur! At mihi non in hoc campo ſeritur, metiturve, antequàm aliàs promiſſum Sphærocylindricarum Sectionum tractatum invulgem; Unum hoc non diſſimulabo ad Logiſticam pertinens, quo ſimul uſum doctrinæ quadantenus inſinuabo: nimirum, ſuperficiem ex Logiſtica circa axem revoluta finitam eſſe, utì ſupra (*capite præcedenti*, *num.* 12. & 13.) jam monuimus, ex quò Ungula ſemiquadrantalis ex cylindrico ſuper Logiſticæ curva erecto æqualis foret ſpatio hyperbolico ibidem deſignato, hinc etiam ſponte profluere. Eſto enim TAB. XV. Fig. 2. talis Ungula cylindrica in planum extenſa F B S S, cum inſcripta ſibi Logiſtica genitrice F B N M; ductâ igitur axi parallelâ A N S, erit ubique A S æqualis curvæ B N, & tangens Ungulæ ad punctum S erit S D, itaut D T ſubtangens æqualis ſit tangenti N C Logiſticæ ad punctum N; æqualis eſt ergo potentia D S, tum tangenti

CN, (ideſt ordinatæ AO in ſpatio hyperbolico, quod loco citato determinavimus) tum ipſi TS, ſeu FA; itaque juncta FO erit æqualis ipſi DS, ſed & inter eaſdem parallelas conſiſtunt; æquidiſtat igitur FO tangenti DS; & hoc ſemper; figura igitur FLOO eſt correlata Ungulæ FBSS; illique propterea eſt æqualis integrè, & particulatim, juxta doctrinam *cap.* 8. *num.* 3. Immo & hoc ipſo ratiocinio generaliùs concepto, poſſet è contra eadem de Ungularum tangentibus determinatio in omnibus demonſtrari. Hinc enim habetur, figuram, ex tangentibus CN ad FB applicatis, eſſe Correlatam Ungulæ FBSS, (quæcumque fuerit curva BNM) atque adeò tangentes Ungulæ eſſe parallelas ramis figuræ ex ipſis CN, cui integrè, & particulatim correſpondet, ex dictis *cap. præced. num.* 12., illationem firmantibus iis, quæ *cap.* 8. circa finem *num.* 5. monuimus.

TAB. XIV. Fig. 1. 7. Jam & illud obſervandum volo, quòd ex ſecunda hujus Hugeniani Theorematis parte manifeſtò liquet, ſolidum hyperbolicum ex ſpatio OPQR circa OP rotato, eſſe ad ſolidum ex ſpatio Logiſticæ correſpondente TRQB circa BQ in eadem ſemper ratione, in ea videlicet, in qua parallelogrammum Hyperbolæ inſcriptum KOBP ad quadratum ſubtangentis Logiſticæ TG; quoniam enim ſpatia hyperbolica lineis OP abſciſſa à termino QR proportionalia ſunt axi parallelis PR in trilineo Logiſticæ RQP, ſi cylindricus excitetur ſuper ſpatio OPQR, idemque ſecetur plano per OP tranſeunte, ad baſim ſemiquadrantaliter inclinato, erit cylindricus ejuſmodi ad truncum inferiorem, plano ſecante, & baſi interceptum, ut parallelogrammum RPQ ad trilineum QPR, (id quippe convincit demonſtratio, quâ in Vivianeis uſus ſum ad Propoſit. ſeptimam, *pag.* 52 propoſitam, ubi oſtendi, cylindrum ex ductu quadrati *ac*, in figura loco citato adhibita, in Expanſam ſuperf. ſphericæ IZAC, eſſe ad truncum

cx

TAB. XIII.

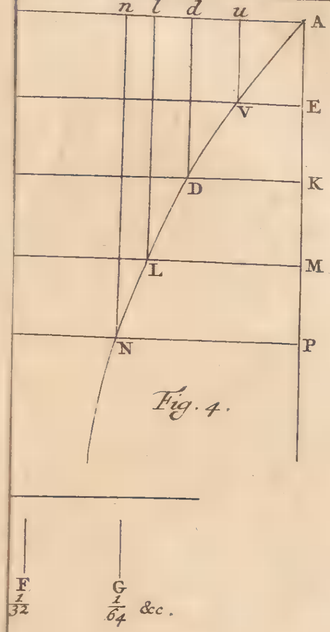


Fig. 4.

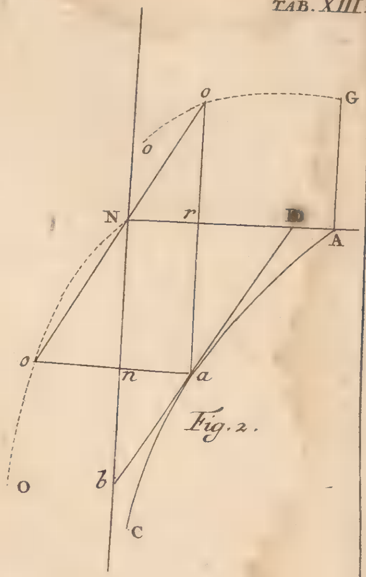


Fig. 2.

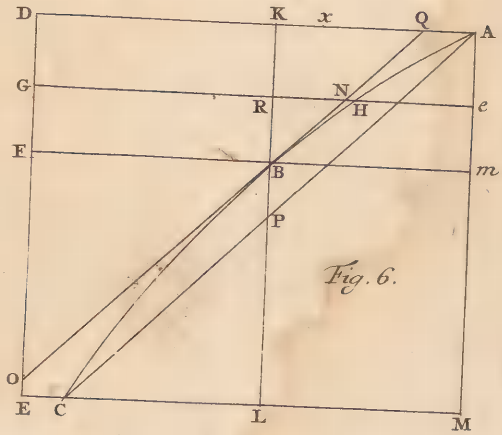


Fig. 6.

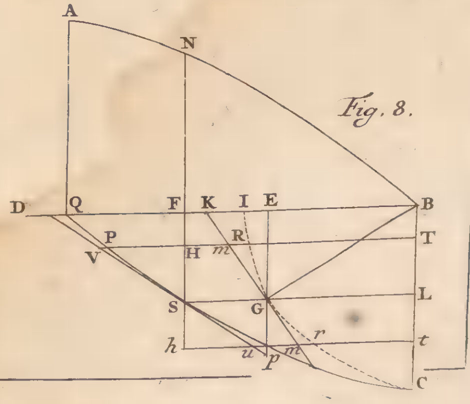


Fig. 8.



ex triangulo I C l in eamdem, ut quadratum, ſeu parallelogrammum *cali*, Expanſæ inversè poſitæ *ida* circumſcriptum, ad talem Expanſam; quippe id ex hac ſola affectione pendebat, quòd eſſet ſemper A Z I C ad partem F Z A C, ut linea *ac*, ſeu R P ad P *d*, prout in aliis bene multis figuris, ac præcipuè in caſu noſtro verificatur) ſimiliter in eadem ratione rectanguli R P Q ad trilineum Q R P, erit etiam cylindricus ſuper baſi Q B T R erectus, ad truncum inferiorem, interceptum eadem baſi, ac plano ſimiliter per B Q inclinato, eò quòd partes etiam ſpatii Logiſtici Q B T R per ordinatas à termino T R abſciſſæ, proportionentur lineis in eodem trilineo Q R P baſi P Q parallelis, uti ex primo Hugenii Theoremate, ac dividendo, conſtat; ſunt enim tales parallelæ differentiæ ordinatarum ad cavam Logiſticam, veluti ſpatia ſic intercepta differentiæ ſpatiorum iis ordinatis proportionalium; eſt igitur cylindricus ſuper O P Q R, cujus altitudo P Q (ob ſemiquadrantalem inclinationem plani ſecantis) ad ſuum truncum inferiorem, ut cylindricus ſuper B T R Q, altitudine B T, ad ſimilem ſui truncum, & ſumptis conſequentium æquè proportionalibus, (eſt enim quivis truncus ad rotundum ſolidum ex baſi circa eamdem lineam, quæ eſt baſis, & plani ſecantis communis ſectio, rotata, ut radius ad circumferentiam, ut *cap.* 10. circa medium *num.* 1., oſtendimus) erit cylindricus hyperbolicus ad rotundum ex O P Q R circa O P, ut cylindricus Logiſticus ad rotundum ex ſua baſi circa B Q; ac permutando, ut ille cylindricus ad iſtum, ita illud rotundum ſolidum ad hoc, quod ultimò expreſſimus. Verùm illi cylindrici in compoſita ſunt ratione altitudinum P Q ad B T, ſeu, ſumptâ communi latitudine T G, P Q in T G ad G T B, & baſium, ſcilicet ſpatii hyperbolici, quod æquatur (ex dictis ſuprà *num.* 3.) rectangulo O P D, ad ſpatium Logiſticum, quod æquale eſt (ex

 ſæpe

ſæpe dictis) rectangulo PQ in TG; itaque & rotunda ſolida ſupra deſcripta, Hyperbolicum ad Logiſticum, in compoſita erunt ratione, rectanguli OPD ad PQ in TG, & hujus ad GTB, ideſt, ut OPD ad GTB; quæ denique cùm componatur ex PD ad BT, ſeu PR, vel dicas ex TR, ſeu BP ad TG, & ex OP ad eamdem TG, dabit rationem rectanguli hyperbolæ inſcripti OPBK ad quadratum ſubtangentis Logiſticæ TG. Quod erat demonſtrandum.

8. Quarta pars demonſtratione non indiget, ſed prolixiorum, quàm apud nos ſint, tabularum Logarithmicarum calculo, quippe aſſignato longitudini ſubtangentis Logiſticæ numero, per quem Hugenius hyperbolæ parallelogrammum deſignat, tunc diſtantia duarum ordinatarum Logiſticæ exhibebit Logarithmum rationis earumdem ordinatarum, (juxta naturam hujus curvæ *cap.* 1. *num.* 3. indicatam) ſeu differentiam Logarithmorum reſpondentium numeris, inter quos eſt ordinatarum Logiſticæ, ac conſequenter & ordinatarum Hyperbolæ, ratio; unde cùm ſit ſubtangens ad intervallum ordinatarum Logiſticæ, ut parallelogrammum Hyperbolæ ad congruum ſpatium hyperbolicum; ideoper Logarithmicas tabulas facilè erit hinc æſtimare, & calculo eruere numerum correſpondentem cuilibet dato hyperbolico ſpatio, datâ ejus extremarum ordinatarum ratione.

6. Quinta ſimiliter Theorematis pars, pertinens ad Tetragoniſmum Hyperbolæ à Clariſſimo Auctore in Tractatu de Evolutione curvarum exhibitum, vel de modo quadrandi Hyperbolam per rectificationem curvæ parabolicæ intelligenda eſt, vel per Logarithmos; utrumque enim in præfato libello inſinuatum video; ſi primùm, jam, ex *cap. præcedenti num.* 14., habes hyperbolicum ſpatium æquale eſſe rectangulo ex Logiſticæ ſubtangente, ſeu generaliùs, ex ſemitransverſo latere Hyperbolæ in curvam parabolicam, dupla parametro deſcri-

deſcriptam, iiſdemque axi parallelis terminatam. At ſi (quòd aptiùs judicarim) de altero modo per Logarithmos accipienda ſit, quemadmodum & præcedens pars, ſolo calculo indiget, ac ingentium Logarithmorum tabulis, quæ etſi mihi in promptu eſſent, vereor, ut otii, & patientiæ ſatis habiturus ſim, ut ejusmodi calculum expenderem, quem idcirco laborem his, qui ſe ejuſmodi ſtudiis exercere voluerint, integrè, & ultro relinquam, ſiquidem tempus admonet, ut receptui canam, ac Philoſophiæ me reſtituam; ipſum tamen locum ab Hugenio hìc citatum, ex ejus Tractatu de Linearum Evolutione *pag.* 106., Jacobi Panzanini Viri Cl. aliàs abs me infra meritum laudati operâ deſcriptum (quippe exemplari carebam) hìc ſubjungere non gravabor, ne quid Lectoribus deſit ad hanc Logiſticæ proprietatum ab Hugenio propoſitarum demonſtrationem illuſtrandam. Inquit igitur Hugenius:

10. *Quæcumque verò Problemata ad alterum è duobus hiſce reducuntur, quamlibet verò proximam ſolutionem per numeros accipiunt, Logarithmorum admirabili invento. Cùm per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quàm proximè explicetur; eſt autem regula hujuſmodi.*

Sit DAB portio hyperbolæ, cujus aſymptoti CS, CV, ductis DE, BV parallelis aſymptoto SC. TAB. XIV. Fig. 2.

Accipiatur differentia Logarithmorum, qui conveniunt numeris, eamdem inter ſe rationem habentibus, quam rectæ DE, BV, ejuſque differentiæ quæratur Logarithmus, cui addatur Logarithmus hic (qui ſemper eſt idem) 0, 36221, 56887. *Summa erit Logarithmus numeri, qui ſpatium DEVBAD deſignabit, tribus rectis, & curvâ DAB comprehenſi, in partibus, qualium parallelogrammum DC eſt* 100000, 00000. *Unde porro facilè quoque habebitur area portionis DAB.*

Sit exempli gratia proportio DE ad BV ea, quæ 36 *ad* 5.

Ab

Ab	1,55630,25008,	*Logarithmo* 36.
Auferatur	0,69897,00043,	*Logarithmus* 5.
Erit	0,85733,24965,	*Differentia Logarithmorum.*
Et	9,93314,92856,	*Logarithmus differentiæ.*
Cui addatur	0,36221,56887,	*Logarithmus ſemper addendus.*
Fit	10,29536,49743,	*Logarithmus ſpatii DEVBAD*

Habebit hujus Logarithmi numerus 11 *caracteres, quum characteriſtica ſit* 10. *quæratur itaque primò numerus proximè minor, conveniens invento Logarithmo, qui numerus eſt* 19740. *Deinde ex differentia Logarithmi ejuſdem, & proximè eum in Tabula ſequentis, reliqui characteres eliciantur* 81026, *ſcribendi poſt priores, ut fiat* 197408, 10260, *addito ad finem zero, ut efficiatur numerus charactꝫerum* 11; *eſt ergo area ſpatii DEVBAD proximè partium* 197408, 10260, *qualium partium parallelogrammum DC eſt* 100000, 00000.

TAB. XIV. Fig. 8. Hæc Clariſſimus Hugenius, cujus inventis circa Hyperbolæ quadraturam, neſcio an opportunum fuerit è meditationibus noſtris aliquam ad idem propoſitum ſubnectere. Ea eſt, quòd, ſi intelligatur curva BNM eſſe Tractoria, cujus prima ordinata FB, axis FG, ſitque B vertex, F centrum hyperbolæ æquilateræ, cujus ſemitransverſus axis FB: ducta ex quovis puncto H axi Tractoriæ parallela HM, erit triangulum, baſi FB, altitudine HM, æquale hyperbolico trilineo, axis portione HB, tangente Hyperbolam ex puncto H, & curvâ interceptâ Hyperbolæ comprehenſo, utì ex noſtra doctrina de Figuris Correlatis deduci poteſt. Atque hìc eſto noſtræ

HUGENIANORUM THEOREMATUM CIRCA LOGISTICAM DEMONSTRATIONIS

FINIS.

L E-

LECTORI
S.

Viſum fuit Appendicis loco hìc ſubnectere Epiſtolam Geometricam, dudum ſcriptam ad Virum Clariſſ. Thomam Cevam, & Poeticis, & Geometricis Opuſculis Celeberrimum, tum quia ſimili, & uniformi cum præcedentibus ſtylo procedit, tum quia pluribus in locis doctrinas à nobis ſuperiùs traditas illuſtrat, & variis exemplis applicat, tum quia num. 19. *non contemnendam animadverſionem continet ad hujus Tractatus argumentum ſpectantem, de* Logiſtica *ſcilicet ex quodam cylindro reſecta; quam æquum fuerat his* Hugenianis *circa* Logiſticam *meditationibus ſubnectere. Vale.*

EPISTOLA
GEOMETRICA
AD VIRUM CLARISSIMUM
THOMAM CEVAM
SOCIETATIS JESU.

Noſtra Doctrina de Conicæ ſuperficiei dimenſione per P. Cevam ex Pappo confirmata. Spiralium diverſi generis origo. Quælibet Conica ſuperficies quomodo in planum explicanda, & quævis plana figura quomodo Cono advolvenda. Quarumvis linearum in Coni ſuperficie deſcriptarum Ichnographias determinare, & datis Ichnographiis, lineas in Coni ſuperficie iis reſpondentes reperire. Curvarum transformatio, ad illas comparandas utilis. Ichnographiarum omnium, linearumque ex Coni ſuperficie in planum explicatarum tangentes duplici methodo inventæ. Nova ejuſdem ſupradictæ noſtræ doctrinæ confirmatio. Ad Cono-cylindricæ Spiralis extenſionem in planum, oſtenditur Spiralis Archimedeæ, & Apollonianæ Parabolæ æqualitas. Quorumdam lapſus notati. Infinitarum Pa-

rabolarum, & Spiralium comparatio. Novus Cycloidem rectificandi modus. Tranſverſa cylindri Cycloidalis ſectio Parabolæ æqualis, Ungula quoque nil niſi Parabola complicata eſſe dignoſcitur. Rotunda ſuperficies ex Cycloide circa baſim, dupla ejus, quæ ab ipſa circa tangentem verticis rotata producitur. Cono-cylindrum invenire, cujus tranſverſa Sectio propoſitæ cuilibet curvæ ſit æqualis, & Ungula in quamlibet figuram datam explicetur. Ex cylindro Tractoriæ ſecanda eſt Logiſtica. Curva Cono-cylindrica Spiralis cuidam Parabolæ, longitudine, non poſitione, æqualis eſt. Dimenſio ſuperficiei cylindricæ, utrique ſpirali, & axi Coni interjectæ. Si Spiralis fuerit Geometrica, explicatâ illâ cylindrico-ſpirali ſuperficie, in rectam expandetur.

PRÆ-

PRÆSTANTISSIMO GEOMETRÆ,

AC VATI ELEGANTISSIMO

P. THOMÆ CEVÆ

E' SOCIETATE JESU

D. Guido Grandus Monachus Camald. S. P.

EX quo me litteris tuis decorare cæpiſti, Vir in paucis Cariſſime, nullas, aut mihi magis jucundas, aut Geometricâ eruditione magis refertas accepi, iis ipſis, quas XVI. Kal. Julii ad me deſtinaſti. In his, pari humanitate, ac ingenio, doctrinam ſecundæ Propoſitionis Appendicis meæ ad Vivianeorum Problematum Demonſtrationem illuſtrare aggrederis, & minimè contemnenda animadverſione confirmare, oſtendens ipſam cum Pappo Alexandrino conſentire, & ad novas rurſus ſpeculationes viam ſternere poſſe. Sic enim habes, totidem penè verbis tuis latinè redditis.

1. *Eſto Conus rectus DBC, cujus triangulum per axem ſit DBC, baſis verò circulus BMC: intelligatur latus DB, puncto D fixo manente, altero extremo B per circumferentiam præfatæ baſis BMC æquabiliter circumferri, eodemque tempore punctum B, æquabili pariter velocitate, ex B per lineam BD aſcendere, deſcribens in Coni ſuperficie Spiralem BSD; adeò ut eodem momento, & latus BD ſe in ſitu BD reſtituat, & punctum B aſcenſus ſui terminum D attingat, ubi & Spiralis BSD terminus erit. Manifeſtum eſt, Coni ſuperficiem, ſi evolvatur, & explicetur, in circuli ſe-* TAB. XV. Fig. 4.

TAB. XV. Fig. 5. *ctorem abituram, qualis eſt RGZ, cujus ſemidiameter RG lateri DB æqualis erit, & arcus GZ circumferentiam BMCB adæquabit. Notum pariter eſt, Spiralem Conicam BSHD in planum extenſam, Spiralis Archimedeæ portionem GVR evaſuram. Conſideretur jam Spiralis Conica BSHD, in qua ſumpto quolibet puncto S, demittatur ad baſim perpendicularis SO: idem ex omnibus ejus punctis factum intelligatur; manifeſtum erit Ichnographiam prædictæ lineæ fore integram Spiralem Archimedeam, ut liquet in triangulo DAC, in quo CD ad DS in eâdem ratione eſt, in qua ſemidiameter CA ad AO; idemque in quovis alio per axem triangulo dicendum erit, quare incrementa, & decrementa ipſius AO erunt in ratione temporum, &c.*

2\. *Hoc poſito, (per Coroll. 2. Appendic. tuæ Vivian. Probl.) erit, ut DB ad ſemidiametrum BA, ideſt, ut tota ſuperficies Conica BCD, vel extenſa RGZ, ad circulum BMC, ita ſpatium ſuperficiei Conicæ BSHDB, ideſt Spirale ſegmentum GVR, ad ſpatium, integrâ Archimedis Spirali contentum, BOAB, & permutando, erit ſector RGZ ad ſegmentum GVR, ut circulus BMC ad integrum Spirale ſpatium BOAB; proptereaque ſector RGZ triplus erit ſegmenti Spiralis GVR; id quod veriſſimum eſt, per prop. 21. lib. 4. Pappi. Unde hâc Geometricâ confirmatione doctrinæ tuæ novum robur accedit.*

3\. *Ponamus jam, lineam GVR eſſe circuli ſemicircumferentiam, ſectorem verò RGZ circularem quadrantem, qui duplus erit ſemicirculi RVG. Convolvatur prædictus ſector, ita ut in ſuperficiem Conicam abeat DBC, & peripheria BMCB æqualis ſit arcui quadrantis GZ; manifeſtum eſt, quòd ſemiperipheria GVR circa conum convolvetur, veluti BSHD, & in D terminabit; notum pariter eſt, Ichnographiam ejuſdem lineæ fore Spiralem, ab Archimedea ſpecie diſtinctam, quæ (ex*

(ex Coroll. citat.) ſpatium comprehendet, quod ad circulum ſit, ut 1. ad 2. Quoniam verò loco ſemicirculi GVR ſubſtitui poteſt quælibet portio, parabolica, hyperbolica, &c. habebimus in earumdem Ichnographiis infinitas Spirales lineas, genere longè diverſas, &c. Quæ quidem omnia tibi ſat nota conıicio, ex ejuſdem Propoſ. Coroll. 6., nec difficilis tibi erit modus ejuſmodi Ichnographias omnes determinandi, quarum tamen conſtructiones, ſi quæ ex omnibus magis ſimplices, & expeditæ videantur, utì & generalem methodum ad ipſarum tangentes ducendas, ſi communicaveris, rem oppidò gratam, & acceptiſſimam facturum te ſcias, &c.

4. Quid igitur mihi, & olim hoc argumentum, & nunc maximè, tuis excitantibus litteris, rurſus ſpeculanti in mentem venerit, candidè aperiam; ut verò etiam geometricâ ſupellectile non ultra mediocritatem inſtructis, in quorum manus Epiſtola hæc mea incidere aliquando poterit, manifeſta eſſe poſſint quæcumque hìc inſerere placuerit, ea ipſa etiam demonſtrabo, quæ apud te demonſtratione non indigent, quale eſt illud, quod tanquam notiſſimum, & vulgò obvium videris ipſe ſupponere (à quo & initium auſpicabor) nempe quomodo Coni recti ſuperficies intelligi poſſit in planum evolvi, & explicari, aut contra, plana quælibet ſuperficies in Coni cucullum detorqueri. Eſto Coni recti ſuperficies (integra, an dimidia, aut duobus per axem planis intercepta, perinde eſt) DGC in planum explicanda. Centro D, intervallo DC lateris coni, deſcribatur plani circuli portio DCH; ſitque, ut DC ad CA radium baſis coni, ita reciprocè angulus GAC inclinationis planorum, ſuperficiem conicam, quæ explicanda occurrit, intercipientium (vel ita 4. anguli recti in ſuperficie integra, ſeu duo tantùm in dimidia) ad angulum CDH: Dico ſectorem CDH eſſe ipſammet ſuperficiem conicam DGC in planum evolutam; quia

TAB. XIV. Fig. 3.

quia enim arcus eidem angulo ſubtenſi ſunt, ut radii, & qui ab eodem radio deſcribuntur, ſunt, ut anguli, ideo duorum quorumlibet arcuum proportio erit ex rationibus radiorum, & angulorum compoſita, quæ ſi reciprocæ fuerint, ut in caſu noſtro, rationem dabunt æqualitatis; æqualis eſt igitur arcus CH ipſi CG; ductis verò ex eodem puncto S radii, ſeu lateris DC, arcu SI ipſi CH concentrico, & SF in coni ſuperficie, ubi per planum baſi parallelum FES ſecatur, conſtat, arcum GC ad FS in ea ratione eſſe, in qua radius AC ad ES (ob communem angulum inclinationis planorum, quibus uterque intercipitur) ſcilicet, ut CD ad DS, vel, ut arcus CH ad SI; ſunt autem antecedentes, nempe arcus GC, CH æquales; ergo & conſequentes FS, SI æquales erunt; atque ita ſemper: cùm igitur omnes arcus ſectoris CDH æquales ſint omnibus, & ſingulis arcubus ſuperficiei conicæ DCG, illos comparando, qui per idem lateris coni punctum tranſeunt, iiſdem applicati omninò congruent; quare ſi ſector complicari circa conum intelligatur, arcus CH congruet arcui CG; & puncto H in G poſito, non poterit non congruere radius DH lateri æquali DG, unde punctum I ſuperponetur ipſi F, & arcus SI congruet eidem SF ſibi æquali, totuſque ſector toti ſuperficiei conicæ reſpondebit, & circa ipſam convolvetur, ſive in ipſam abibit; unde viceverſa, conica ſuperficies DGC evoluta, in eumdem ſectorem CDH explicabitur.

5. Quòd ſi linea, conicam ſuperficiem terminans, fuerit, non alterum coni latus, ſed curva quælibet GMD, non admodum diverſa conſtructione intentum obtinebimus, quippe invento, ut priùs, arcu ſectoris CH æquali extremo arcui CG datæ ſuperficiei conicæ, ad quodlibet lateris coni punctum S ducto arcu SM in plano baſi parallelo, ponatur arcus SV ipſi CH concen-

cen-

centricus in eodem plano, æqualis autem arcui SM, facto ſcilicet angulo SDV in eadem ratione ad MES, in qua radius SE ad SD (quæ ratio eadem ubique eſt, nimirum radii baſis AC ad latus coni DC) atque ita porro fiat, quouſque compleatur figura DVH, quæ apta nata erit datæ conicæ ſuperficiei DMG congruere, eodemque argumento probabitur eſſe ejuſdem in planum evolutæ figura.

6. Hinc colligitur (deſcriptâ curvæ GMD Ichnographiâ GKA, extenſoque latere DML, juncto radio AL, radio DVO, & arcu KN) fore ſemper angulum GAC ad CDH, ut MES, aut KAN ad SDV, & permutando, GAC ad KAN, ſeu LAC, ut CDH ad SDV, vel CDO, aut arcum GC ad CL, ut HC ad CO; unde evoluta conicæ ſuperficiei ſic etiam haberi poſſet, nimirum, invento priùs ſectore CDH, congruente conicæ ſuperficiei CDG, tum arcubus GC, CH ſimiliter diviſis in L, & O, junctiſque radiis AL, DO, ita hunc ſecando in V, ut ille ab Ichnographia ſecatur in K, quouſque per puncta DVH tranſeat linea, determinans ſuperficiem quæſitam DVHC, eſt quippe, ut LA ad AK, CA ad AN, ſeu CD ad DS, OD ad DV, exiſtentibus arcubus HC, CO ipſis GC, CL proportionalibus, ut oſtendimus ex puncto curvæ V per ſuperiorem modum quæſito.

7. Unde è contrario data figura DVHC circa conum DCB complicanda, ut evadat DMGC, facilè habebimus ejus Ichnographiam, facto priùs angulo GAC ad datum CDH ſectoris, datæ figuræ adſcripti, ut CD ad CA, ſectiſque ſimiliter in L, & O arcubus GC, CH, nec non radio AL in K, ut OD dividitur à datæ figuræ perimetro in V: tunc enim punctum K erit in figuræ GKAC, Ichnographiam quæſitam determinantis, perimetro. Quæ autem de ſuperficie conicâ GMDC, ſeu de ejus evolutâ CDVH, reſpectu Ichnographiæ

AKGC dicta ſunt, eadem, ut conſtat, valent de reſiduâ coni ſuperficie GMD, ejuſve evolutâ DVH, reſpectu ejus Ichnographiæ GKA, quas propterea ex præmiſſis modis alterutro facilè determinabis, qualeſcumque fuerint curvæ propoſitæ; & ſi linea VH, vel *u* H recta fuerit, conſtructionem habebis, ducendi in conicâ ſuperficie lineam GM, ſeu G*m*, omnium data puncta G, M (non in eodem latere, nec in plano baſi parallelo poſita) conjungentium *Breviſſimam*, ejuſque Ichnographiam deſcribendi.

TAB. XV. Fig. 4. 5. Quomodo utcumque ſatisfactum puto quæſtioni, quam moves, determinandi ſcilicet Ichnographiam figuræ tuæ GVR circa conum DCB convolutæ, ſive illa ſit ſemicirculus, ſive parabola, ſive hyperbola, aut alterius cujuslibet generis curva extiterit, unde dabuntur infinitæ illæ Spiralium ſpecies in his Ichnographiis, quas mente jam comprehendiſti. Verùm neſcio an operæ pretium ſit elegantiorem, quam mox ſubdo, conſtructionem illarum attendere.

TAB. XIV. Fig. 6. 8. Eſto figura quælibet in Conum convolvenda, aut ex ipſo in planum explicata CVD, & ſector illi circumſcriptus (inſcriptuſve ſi cava fuerit) DGC; oportet determinare lineam, quæ ejus convolutæ Ichnographiam clauderet in baſi coni dati radii DA, qui minor ſit radio ſectoris DC. Fiat ſuper DA figura AOD ſimilis, & ſimiliter poſita ipſi datæ CVD (ſecto nimirum quovis ramo DV in O proportionaliter, ac ſecatur CD in A, & per puncta AOD ductâ lineâ) & centro D ducto quovis arcu NOH, fiat ſemper HN ad NO in conſtanti ratione lateris coni CD ad radium baſis DA; ajo, puncta H ad Ichnographiam AHD, propoſitæ curvæ CVD reſpondentem, pertinere; erit enim angulus LDA ad RDC, ut radius CD ad DA, unde arcus CR æqualis erit arcui AL; quando igitur ſector CGD, cum inſcripta figura CVD, convolvetur circa conum baſis

ADT,

ADT, arcu CG congruente ejuſdem baſis arcui ſibi æquali AT, portio CR congruet ipſi AL, & latus DR, cum puncto V curvæ CVD, per quod tranſit, erit ſuperimpendens radio DL, in quo propterea erit punctum Ichnographicè ſubjectum puncto V dictæ curvæ; debet autem in eadem ratione diſtare punctum ichnographiæ à centro baſis D, reſpectu radii DL, in quo reperitur, ac diſtet punctum V in latere coni DR à vertice D (ob ſimilia triangula effecta à perpendiculo, ex punctis curvæ in ſuperficie conica exiſtentis ad baſis Ichnographiam demiſſo, qua ratione in figura eſt CA ad AO, ut CD ad DS); itaque cùm ſit, ut latus DC ad radium baſis DA, ſeu DL, ita VD, diſtantia puncti V in ſuperficie conica à vertice D, ad DO, ſeu DH, diſtantiam puncti H à centro baſis, erit punctum H, & alia omnia ſimili modo determinata, ad curvam ichnographiæ, quæ quærebatur. TAB. XV. Fig. 4.

9. E converſo, datâ ichnographiâ, lineam ipſi in cono reſpondentem in plano determinabimus; ſit enim talis Ichnographia AHD, & radio DA extenſo in C, ut DC æqualis fiat lateri coni propoſiti, ſuper ipſa fiat figura CKD ſimilis, ac ſimiliter poſita datæ AHD; & ducto ex centro D quolibet arcu SK, ita dividatur in V, ut ſit KS ad SV, ut latus coni CD ad radium baſis DA; erit punctum V in linea CVD quæſita, quæ in ſuperficie conica impendet datæ ichnographiæ AHD; nam recalcatis præcedentis demonſtrationis veſtigiis, oſtendentur arcus CR, LA æquales, unde applicati congruent, & punctum V ſuperimpendebit ipſi H, quippe tantumdem in latere DR proportionaliter à vertice diſtans, quantùm H in radio à centro D; Vnde facillima habetur conſtructio, nedum Ichnographiæ in tua figura, ubi GVR convolvenda ſupponatur ſemicirculus (alio enim ſemicirculo ſuper radio baſis facto, & in arcus concentricos baſi reſoluta, oportet ſingulorum arcuum TAB. XV. Fig. 5.

 cuum

cuum dicto ſemicirculo comprehenſorum quadruplos determinare, & per eorum extrema curvam ducere; erit enim coni latus radii baſis quadruplum, uti quatuor anguli recti quadrupli ſunt unius ſubtenſi à quadrante GRZ), ſed & ubi ſupponatur parabola, aut hyperbola (factâ nimirum ſimili conſtructione, & ex concentricis peripheriis tali parte determinatâ, quæ ad arcum, radio, & ſimili parabolâ, aut hyperbolâ ſuper ipſum deſcriptâ concluſum, ſit ſemper in data ratione lateris coni ad radium baſis); At è contra ſi cupias Ichnographiam circularem, parabolicam, alteriuſve figuræ habere, manifeſta erit conſtructio figuræ, quæ cono advoluta ejuſmodi Ichnographiam dare nata eſſet, per ſectionem arcuum concentricorum, peripheria ſimilis figuræ ſuper latere coni deſcriptæ, ipſoque coni latere comprehenſorum, in eadem ratione data, lateris coni ad radium baſis. En quanta curvarum ſeges, quas geometricè determinare poſſumus, quotieſcumque data ratio, lateris coni ad radium baſis, poteſt geometricè angulis applicari, vel per multiplicationem, vel per diviſionem arcuum propoſitorum.

TAB. XIV. Fig. 3. 10. Hinc in meo Sphærocylindricarum, & Conocylindricarum ſectionum Tractatu oſtendi, quòd, ſi conus BDC ſecari intelligatur ſemicylindro, cujus baſis ſemicirculus GKA ſuper radio baſis AG deſcriptus, ſitque latus coni duplum verbi cauſa radii baſis, ſeu in quavis alia ad ipſum ratione, facto ſuper DH, æquali lateri coni, ſemicirculo pariter DVH, omnibuſque arcubus VI, centro D deſcriptis, bifariam, ſeu in data ratione ſectis ad puncta *u*, ita ut ſit VI ad *u*I, ut DC ad CA, linea D*u*H, per puncta *u* ſic inventa tranſiens, erit æqualis cono cylindricæ ſectioni; id quod etiam ſuccedet, ſi loco ſemicirculorum GKA, HVD, ponantur quævis aliæ ſimiles figuræ, ſemper enim communis conicæ, & cy-

cylindricæ ſuperficiei ſectio in lineam planam illi æqualem commutabitur; cùmque in Vivianeis, *pag.* 122. paulò ante *num.* 37., oſtenderim, lineam quoque Sphærocylindricam, ſeu perimetrum Veli Florentini, eſſe communem conicæ, & cylindricæ ſuperficiei ſectionem, quam etiam *num.* 41. *p.* 136. oſtendi, æqualem perimetro cujuſdam ellipſis, ideo etiam curva D*u*H, modo præſcripto efformata, cuidam ellipſis circumferentiæ æqualis oſtendetur. Vides autem, opinor, quàm utile ſit eamdem lineam ex variis ſuperficiebus in alias transferre, diverſiſque conſtructionibus in plano determinare, prout eadem linea elliptica, tum modo ſuperiùs deſcripto, tum per modum ungulæ ex cylindro expanſæ, tum vulgari modo, prout Apollonianam coni ſectionem terminat, aliiſque modis in plano jacere poteſt, ſemperque diverſas tangentium determinationes ſuſcipit, pro vario ſuarum partium ſitu; contingere ſiquidem poteſt, ut in uno rectificationem reſpuens, in altero illam admittat, vel ſaltem cum alia nota linea comparationem ſuſcipiat. Sic, ſi proponatur linea LOO, cujus hæc proprietas, ut ducto radio FO ex determinato puncto F, ſecante arcum LG, ejuſque tangentem LE in punctis G, E, ſit ſemper poſt FG radium, & ſecantem FE, tertia proportionalis FO, facilè erit curvam LOO cum linea Geometris jam ſatis notâ comparare, videlicet cum parabola notæ parametri; ſiquidem illa ipſa non alia eſt, quàm parabola evoluta ex ſuperficie coni, cujus triangulum per axem ſit æquilaterum; id quod extra hanc methodum, neſcio an ſatìs promptum eſſet conjecturâ aſſequi, nedum facili geometricâ conſtructione determinare. TAB. XV. Fig. 1.

11. Jam, quando ita provocas, operæ pretium eſt, ut curvarum, eo, quem præmiſi, modo deſcriptarum, tangentes univerſali methodo determinare aggrediar, pro quo: aſſumatur quælibet figura ALLB, ductiſque TAB. XIV. Fig. 4.

que ex centro A quibuſvis concentricis arcubus EL, EL, ſimiliter augeantur producti in M, aut minuantur diviſi in I, quouſque per puncta AMMB tranſeat curva, qualem *num.* 8. determinavimus, aut per puncta AIIB tranſeat curva, qualem *num.* 9. deſcripſimus; quæraturque ad datum punctum M, vel I curvarum ejuſmodi tangens. Ducto arcu quolibet, verbi gratia extremo BCD, occurrente junctæ chordæ, ſeu radio AM, AI in D, H, ductoque arcu ML, ſeu IL, & junctâ chordâ AL, ſecante priorem arcum in C, ducantur tangentes arcus DB ad puncta D, H, C, quæ ſint DG, HF, CK; huic ultimæ occurrat in K tangens LK ducta ex puncto L datæ figuræ ALB; in ea autem ratione, in qua ſunt arcus LE ad EM, aut EI, ponatur eſſe data portio tangentis CK ad DG, vel HF. Dico, junctam GM, aut FI eſſe tangentem ejuſmodi curvarum in M, I. Si enim hæ curvæ gigni intelligantur ex æquabili motu lineæ AB circa A circulariter converſæ, & motu accelerato, vel retardato, prout opus fuerit, puncti B per BA aſcendentis, aut A per AB deſcendentis, (ad modum, quo Spirales generari ſolent) manifeſtum eſt, æquabilem illam velocitatem motus circularis in curva BMA tantò majorem, & in BIA tantò minorem fore, quàm ſit in curva BLA, quantò major eſt arcus ME, & minor EI, quàm EL, id eſt ex conſtructione, quantò major eſt GD, & minor HF, quàm CK, eodem exiſtente impetu puncti difformiter fluentis, ſive in M, ſive I, ſive in L, propter æqualitatem ipſarum AM, AI, AL, vel reſiduarum DM, HI, CL, quas mobile punctum A, vel B interea peregit, dum linea circulariter mota reſpectivè arcum DB, HB, vel CB emenſa eſt. Si igitur velocitas difformis in puncto L curvæ BLA exprimatur per LC, etiam eadem velocitas in punctis M, I aliarum curvarum exprimetur per MD, IH illi æquales, & ſi velocitas æqua-

æquabilis circularis motus exprimatur per CK ad curvam ALB (exprimenda verò eſt prorſus per ipſam, quoniam in ea eſt motus circularis directio, quippe tangens arcus CB, & aliunde intercipitur à tangente LK, angulo recto KCL oppoſita, in qua utriuſque motus compoſita directio reperiri debet, ex 8. Prop. l. 2. Geometriæ motus Joannis Cevæ, qui non cognatione tantùm, ſed & geometrico acumine, & inveniendi fœlicitate Tibi verè Germanus exiſtit) ſimilis æquabilis velocitas ad curvam AMB exprimetur per DG, & ad curvam AIB per HF; propterea juncta GM, & FI tangens erit, ſive ex eadem propoſitione, ſive ex his, quæ *cap.* 5. *num.* 3. demonſtravi in Hugenianis, & antequàm Fratris tui Geometriam legerem, ex Torricellii loco ibidem citato deduxeram. Atque hinc eſt, quòd ſi ordinatæ ad axem non ſint arcus concentrici, ſed rectæ lineæ, velut LE, FE in eadem ſemper ratione, ductis LC, FQ axi parallelis, datâque figuræ BL tangente L*r*, occurrente baſi in *r*; ſumpta Q*t*, quæ ſit ad C*r* in eadem ordinatarum ratione, juncta *t*F tanget curvam FB; tum enim illæ ordinatæ LE, FE, quemadmodum & baſis recta CQ*e*, habendæ ſunt pro arcubus concentricis, à centro infinitè diſtante deſcriptis, cujus radii propterea ſint ipſæ axi parallelæ LC, QF, ipſæque *r*C, *t*Q pro tangentibus extremi circuli CQ*e*, ob infinitam ejus radii magnitudinem, in unam eamdemque rectam cum ſuis tangentibus abeuntis; cujus conſtructionis veritas jam aliunde innotuit, ſiquidem *r*L, *t*F hoc modo deſignatæ in unum & idem axis BE punctum collimabunt, utì ex proprietate triangulorum conſtat. TAB. XIV. Fig. 5.

12. Quòd ſi quis malit, independenter à motuum compoſitione eaſdem tangentes evidentiori methodo inquirere, per me licet. Eſto enim primùm duplex figura, altera ex rectis LE, *le* ad axem ordinatis, al-

altera ex arcubus EM, *em* ad eumdem axem applicatis, & reſpectivè æqualibus ipſis LE, *le* ſibi correſpondentibus; datâ tangente LK prioris figuræ, occurrente ipſi BK, ex vertice ductæ æquidiſtanter ad ordinatas, in puncto K, tangens figuræ poſterioris ad punctum M ſic determinabitur; juncto radio BM, atque huic ex B perpendiculari BG, æquali ipſi BK, jungatur GM: dico hanc eſſe tangentem; occurrat enim in S cuilibet alteri ex arcubus concentricis *em*, ſecanti radium in O; ſitque OP radio BM ex O perpendicularis, ac juncta chorda BL, ordinetur per idem axis punctum *e*, applicata prioris curvæ *e*T, ſecans tangentem in R, chordam in N; erit utique arcus *e*O æqualis *e*N, eò quòd ſector ſit triangulo analogus; ſed & *em* æqualis *el*; itaque & O*m* æqualis N*l*; ipſa verò NR æqualis OP, quia ad BK, æqualem ipſi BG, eſt in eadem ratione, LN ad LB, ſeu E*e* ad EB, aut OM ad MB; quæ omnia valent etiam de homologis lineis per minuſculas litteras deſignatis, & infra punctum E ductis; hoc ſolo diſcrimine, quòd ſi *e* ſit ſupra E, erit NR major, quàm N*l*; unde & OP major, quàm O*m*; multò igitur magis arcus OS (qui eſt major ipſa OP, à fortiori quàm major ſit ſuo ſinu) erit major, quàm O*m*; unde punctum S erit extra curvam; ſi verò *e* acceptum fuerit infra E, erit *nr* minor, quàm *nl*; unde & *op* minor, quàm *om*; arcus autem *so* minor eſt tangente *op*, à fortiori, quàm ſua tangente minor ſit arcus, quem ex centro B, juncta B*p* interciperet: multò ergo minor eſt arcu *om*; & ideo etiam punctum *s* extra curvam erit; recta igitur GM tangit. Jam verò concipiatur alia curva BF priori analoga, ita ut ejus ordinatæ FE ad ordinatas prioris LE perpetuò ſint in eadem ratione, utique facta DB ad BK, ut FE ad EL, juncta DF hanc curvam tanget; ſiquidem ſi occurrat alteri ordinatæ in puncto T, erit etiam T*e* ad *e*R, ut FE ad EL, nempe ut *fe* ad *el*; qua-

quare cùm eR major ſit ipſâ el, etiam eT major erit, quàm ef; ſi igitur intelligatur figura BiI ex arcubus EI æqualibus ordinatis hujus poſtremæ figuræ EF, juncto radio BI, atque huic perpendiculari BH, æquali ipſi BD, juncta HI tanget; eritque HB ad BG, ut IE ad ME. Duarum igitur figurarum, ex concentricis arcubus in eadem conſtanti ratione poſitis deſcriptarum, tangentes intercipiunt rectas ad radium perpendiculariter ductas, ipſis arcubus proportionales: Quod coincidit cum præmiſſa conſtructione.

13. Antequam autem hinc aliò digrediar, adnotare juvabit, ex harum pariter curvarum deſcriptione, doctrinam illam meam ſecundæ Appendicis ad Vivianea Problemata iterum demonſtrari, ſeu denuò confirmari poſſe. Hinc ſiquidem deducitur, Ichnographiam cujuſvis portionis ex conica ſuperficie abſumptæ, qualis eſſet AHD, eſſe mediam proportionalem inter ipſam figuram conicæ ſuperficiei in planum expanſam, veluti DVC, & aliam ipſi ſimilem, ſimiliterque poſitam DOA, ſuper radio baſis coni deſcriptam; nam propter ſingulos arcus HN, ſe habentes ad NO in conſtanti ratione lateris coni CD ad radium baſis AD, erit tota figura AHD ad AOD, ut CD ad DA; ſed CVD ad AOD ſibi ſimilem eſt, ut quadratum CD ad quadratum DA; itaque CVD ad AOD eſt in duplicatâ ratione AHD ad AOD, propterea & conica ſuperficies CVD ad Ichnographiam ſuam AHD eſt, ut AHD ad AOD, ſive, ut latus coni CD ad radium baſis DA. Quod &c. TAB. XIV. Fig. 6.

14. Tu verò non hìc ſubſiſtis, & alias rurſus novarum ſpeculationum fodinas eruere aggreſſus, Epiſtolis Tuis, pridie kal. Julii ad me datis, novâ iterum ratione lineas in conica ſuperficie deſcriptas in planum ſternerē niteris. Ais enim:

Speculationem inſtituere placuit circa Spiralem illam conicam, de qua ſuperioris hebdomadæ Tabellario ad Te

 ſcriptas

ſcriptas Epiſtolas tradidi, cujus Ichnographia integra eſt Spiralis Archimedea; conſiderabam ſcilicet cylindricam ſuperficiem, quam illæ perpendiculares efformant, quibus ſuffulta, ut ita dicam, diſtenditur prædicta Spiralis conica; ſcire autem optabam, in quam lineam evaderet, explicatâ in rectam lineam Spirali Archimedeâ, unà cum ipſa ſuperficie cylindrica, ad conicam ſpiralem lineam terminante. Si enim hæc curvam aliquam è lineis aliàs notis referret, verbi gratia parabolam, id egregiarum certè Speculationum fodinam aperiret, &c.

15. Id ego primo ſtatim intuitu ad hyperbolæ quadraturam pertinere opinatus ſum, nec me fefellit opinio, ſiquidem ad illam referri jam tum videbatur parabolicæ curvæ rectificatio, utì ex Hugenianis *cap.* 12. *num.* 14. conſtat; parabolæ autem rectificationem cum Spiralis Archimedeæ diſtenſione conjunctam eſſe, tum ab aliis animadverteram oſtenſum eſſe, tum ipſe poſtmodum docuiſti ab Joanne Ceva fratre tuo, Geometr. mot. l. 2. prop. 14., idem demonſtrari. Antea verò id mihi innotuerat hoc ratiocinio. Eſto Spiralis Archimedea C *a* A primæ circulationis, & poſito in altera figura Parabolæ Apollonianæ axe CN æquali dimidio circumferentiæ ADA, ordinata autem NA æquali radio CA, deſcribatur parabola C *a* A. Dico hanc Spirali æqualem eſſe; ſumpto enim quolibet in parabola puncto *a*, & ordinata *an*; & in ſpirali puncto *a*, cujus radius *ac* ſit æqualis ordinatæ *an*, ducatur arcus *a*I; ducanturque tam in parabola, quàm in ſpirali tangentes *ab*, occurrentes ipſi C*b* (perpendiculari hinc ad radium C*a*, illinc ad ordinatam *an*) in punctis *b*, *b*. Jam, cùm ſit C*b* in ſpirali æqualis arcui *a*I, (ut docuimus in Hugenianis *cap.* 5. *num.* 9.) ſit autem peripheria ADA ad arcum I*a* in duplicata ratione AC ad C*a*, ſeu (in parabola) AN ad *na*, videlicet, ut NC ad C*n*; ſitque CN æqualis ſemiſſi peripheriæ ADA, erit & C*n* æqualis ſemiſſi arcu

TAB. XV. Fig. 3. 6.

cus *a*I, vel ſubtangentis C*b* ſpiralis; ſed & ſubtangentis *nb* parabolæ ſubdupla eſt eadem C*n*; æquales igitur ſunt, tum in ſpirali, tum in parabola ſubtangentes *nb*, C*b*; æquales autem & ordinata *an*, & radius C*a*; tota igitur tangens parabolæ *ab*, quæ his potentia æquatur, æqualis erit tangenti *ab* ſpiralis ſibi correſpondenti; ſumptaque infinitè exigua utrobique tangentis particula *ad*, ac dimiſſa in ordinatam, & radium ſubtangentis parallela *dm*, erunt triangula *dma*, *dma* utrobique ſimiliter æqualia, applicatiſque alterius ad alteram homologis triangulorum *amd* lateribus, tangentes *ad*, ſeu curvarum partes his reſpondentes congruent, certè eò res deducetur, ut alterius ad alteram proportio ſit propior æqualitati, quàm quælibet data majoris, aut minoris inæqualitatis ratio; æquales igitur ſunt, tum Archimedea Spiralis, tum parabola quadratica nuper deſignata.

16. Hinc patet, quàm juſtò minorem Spiralem fecerint, qui ſemicircumferentiæ ADA æqualem eſſe aſſeruerunt, utì Sturmius, Math. Enucl. l. 2. cap. 4. conſect. 2. propoſit. 17. Guarinus, tract. 18. Eucl. Adaucti prop. 13. Rinaldinus, de reſol. & compoſ. pag. 299. aliique; videlicet tantò minorem, quantò axis NC parabolæ C*a*A minor eſt ipſa curva C*a*A; conſtat item à ſcopo non leviter aberraſſe Virum Clariſſimum Borellium, ubi de motu animal. p. 2. prop. 41. duas ejuſdem Spiralis revolutiones comparans, ait illas ad invicem eſſe, ut peripheriæ mediæ arithmeticæ inter extremas cujuslibet Spiralis, ſive eſſe ad invicem, ut ſunt circulares zonæ, quibus inſcribuntur; hoc enim perinde eſt, ac ſi diceret, curvam parabolicam *tz* eſſe ad *tz* (lineis æquali intervallo diſtantibus, axi parallelis interceptas) ductâ rectâ FO ſecante præfatas parallelas in *q*, Q, ut trapezium Q*s*HO ad OH*sq*, quod eſt abſurdum; Sumptis quippe hyperbolicis ſpatiis O*os*H, TAB. XIV. Fig. 8.

OHso (iiſdem curvæ portionibus correſpondentibus per *cap.* 12. *num.* 14. Hugenianorum) & permutando, eſſet QsHO ad inſcriptum OosH, ut OHsq ad circumſcriptum OHso, ideſt ratio majoris inæqualitatis æqualis foret rationi inæqualitatis minoris.

Cæterùm eo modo, quo parabolam quadraticam, atque Archimedeam Spiralem comparavi, ſimiliter alias ſpiralium ſpecies cum aliis parabolarum ſpeciebus poſſe conferri manifeſtum eſt, utì aliàs, ſi ſatìs memini, indicabam; nempe ſi radiorum cujuſcumque helicis poteſtates denominatæ ab exponente x ſint inter ſe, ut angulorum, ſeu arcuum à radiis interceptorum poteſtates denominatæ ab exponente y, facta parabola talis naturæ, ut abſciſſarum quarumvis poteſtates denominatæ ab exponente y ſint, ut poteſtates ſuarum ordinatarum denominatæ ab aggregato exponentium $y+x$, ſpirali propoſitæ, ita reſpondebit, ut, ſi ultima ejus ordinatarum æquetur radio dictæ ſpiralis, axis autem ſit $\frac{x}{y+x}$ totius circumferentiæ, illa Curva Parabolica, & ejuſmodi Spiralis æquales erunt, ut ex methodo tangentium, tam parabolarum, quàm ſpiralium, *cap.* 5. *num.* 4. & 8. Hugenianorum, traditâ facilè conſtat.

17. Sed curvarum dimenſionem tractantes quid vetat aliò paulatim digredi, quouſque modum Cycloidem rectificandi tibi communicem, quem tibi acceptiſſimum fore video, quippe his geometricis venuſtatibus delectaris? En illum: eſto Cyclois AaO, ordinatæ ar, ar, ſecantes ſemicirculum genitorem in d, d; extendantur chordæ Ad, Ad in f, f uſque ad baſim, applicenturque rg, rg his ipſis Af, Af æquales, ut oriatur hinc curva Ggg, quæ erit Hyperbola ſecundi gradus, ſive (ut Cl. Viviano aliquando appellare placuit.) *Meſolabica*, propter fA ad Ad, ſeu DA ad Ar, ut

TAB. XIV. Fig. 9.

ut quadratum A*f* ad quadratum AD, ſive quadratum *rg* ad DG. Jam ſic: ducta *ab* Cycloidis tangens quantumvis parva, & duabus prædictis ordinatis quantumvis proximis intercepta, erit utique parallela ipſi A*f*; (ex dictis in Hugenianis *cap.* 8. *num.* 7.) erit ergo *ab* ad intervallum ordinatarum *rr*, ut A*f*, ſeu *rg* ad diametrum AD; & hoc ſemper; rectangulum igitur *grr* æquale erit rectangulo ex AD in *ab*; & omnia rectangula *grr*, exhaurientia ſpatium infinitum *g*GDA*h*, æqualia rectangulo ex AD in curvam ſemi-cycloidis A*a*O, quam innumeræ tangentes *ab* perinde exhauriunt; ergo AD in A*a*O ad quadr. ejuſdem AD, ſcilicet curva ipſa A*a*O ad diametrum AD, eſt ut ſpatium *g*GDA*h* ad inſcriptum diametri quadratum GDAH; hæc autem eſt proportio dupla, ut ipſe *cap.* 8. *numer.* 11. Hugenianorum generaliter docui, atque ipſemet frater tuus, ſupra laudatus, in Geometr. mot. l. 1. prop. 12. pridem oſtendit; itaque curva ſemi-cycloidis A*a*O dupla erit diametri, & tota Cyclois ejuſdem quadrupla, quin & partes ſingulæ A*a* duplæ chordarum ſibi correſpondentium *ad*, uti aliis Geometris per alias vias pridem innotuit, Hugenio præſertim, ex præclara Evolutarum Curvarum inventione. Eſt verò generalis hæc methodus, ſi rem propiùs aſpicias, atque ad omnes prorſus illas curvas exporrigitur, quas, *cap.* 8. *num.* 5. Hugenianorum, *Correlatas* voco, ex quibus ſcilicet, per ſimpliciſſimam Euclidis elem. l. 1. propoſit. 43. innumerarum figurarum dimenſionem derivavi.

18. Duo hìc interea adnotare non pigeat. Alterum, quòd ſi cylindricus erectus ſuper ſemi-cycloide O*a*AD ſecari intelligatur plano quomodolibet inclinato, tranſeunte per baſim OD, ſemper abſciſſa ſuperficies ungularis in planum explicata in parabolam notam abibit; ſiquidem chordæ circuli A*d*, ad reſpectiva puncta *r* diametri AD applicatæ, parabolam efficiunt; ergo & ea- TAB. XIV. Fig. 16.

earum duplæ, nempe portiones curvæ cycloidalis *a* A, ad eadem diametri puncta, vel ad proportionales partes altitudinis illius ungulæ, applicatæ, parabolam item conficient; ſed omnis ſuperficies ungularis conflatur ex ſimilibus curvæ portionibus applicatis ad partes altitudinis, proportionales partibus diametri baſis, utì conſtat ex hac figura, ubi AQSEIMGO ſit cylindricus ſuper quavis curvà IOGM, ſectus plano AZMI, per baſim MI tranſeunte, manifeſtum eſt, ſuperficiem ungularem AZMGO conflari ex portionibus curvæ BZ (æqualibus abſciſſis à vertice OG) applicatis ad puncta B dividentia altitudinem ungulæ AO in eadem ratione, in qua axis curvæ OI ſecatur in F per applicatam GF: Unde ſi fingamus OGM eſſe Cycloidem, cujus portiones OG duplæ ſunt chordarum ſemicirculi ſibi reſpondentis, ideſt quarum quadrata ſunt, ut axis abſciſſæ OF, manifeſtum erit, Ungulam Cycloidalem AZMO eſſe parabolam, quia quadratum curvæ OGM erit ad quadratum curvæ BZ æqualis ipſi OG, ut OI ad OF, ſeu BN, ideſt, ut altitudo OA ad AB, ac perimeter AZM erit æqualis curvæ parabolicæ, immò in parabolam etiam poſitione talem abibit, rectificatis curvis OM, BZ per explicationem ungulæ in planam ſuperficiem, &, è contra, reliqua ſuperficies AZMS in trilineum parabolicum extendetur; quo ſtatim conſtat (ob proportionalitatem Ungularum, tum ſuperficialium, tum ſolidarum, cum ſuperficiebus, aut molibus rotundorum corporum ab eadem figura) ſuperficiem rotundam ex Cycloide circa baſim, duplam eſſe rotundæ ſuperficiei ab eadem circa tangentem verticis converſâ; necnon diſtantiam centri gravitatis curvæ cycloidalis à baſi duplam eſſe diſtantiæ ejuſdem à vertice, &c. facilèque hinc habetur dimenſio utriuſque ex illis rotundis ſuperficiebus, ob notam curvæ longitudinem, & centri gravitatis diſtantiam, juxta regulam celeberrimam Guldini Veſtri circa geneſim rotundorum.

TAB. XV. Fig. 1.

19. Al-

19. Alterum, quod notari attentiùs velim, inde nullo negotio conſequitur, nempe, datâ qualibet planâ ſuperficie, quæ à curva qualibet linea definiatur, poſſe nos ejuſmodi ſuperficiem ita curvare, ſeu tali cylindrico circumvolvere, ut eadem curva linea nihilominus in uno plano jaceat, (quemadmodum in caſu prædicto, curva parabolica AZM ita advolvitur cylindro cycloidali, ut nihilominus in uno, eodemque plano AIM, cylindrum ſecante, jaceat) ſeu cylindrum invenire, ex cujus ſectione, eadem curva in ſuperficiem ungularem convoluta efformetur. Propoſitum ſiquidem obtinebimus, alteram ſuperficiem IOGM ita efformando, ut, quæ fuerat in data figura relatio ordinatarum ad axem, eadem ſit curvæ portionum OM, OG pariter ad axem ſuum (ut in exemplo noſtro, quæ eſt in cycloide portionum curvæ à vertice abſciſſarum ad axis ſui partes ordinatis abſciſſas) enimverò ſuper ejuſmodi curva ſic inventa erecto cylindrico, ipſi advolvetur data figura, & ſuæ perimetri partes in eodem plano, ad datæ figuræ altitudinem ipſummet cylindrum tranſverſim ſecante, diſpoſitas habebit, ſemper autem tangens figuræ quæſitæ OGM ad punctum G, intercepta eodem puncto, & ordinata per verticem O, erit = ſubtangenti datæ figuræ AZM, ideſt interceptæ inter punctum Q, & occurſum tangentis puncti Z, (explicato parallelogrammo ASMO cum ſua curva AZM) ut in exemplo cycloidis, ejus tangens ſubdupla eſt curvæ OG, quemadmodum ipſius AQ ſubdupla foret ſubtangens parabolæ explicatæ; id quod aliàs generaliter monuimus (*cap.* 5. *num.* 2.) & facillimè demonſtratur ex dictis *cap.* 13. *num.* 5.

Exemplum aliud ſe ſe obvium præbet in ipſa Logiſtica, ſeu Logarithmica, quam ſi velis ex aliquo cylindro ſecare, aut cylindrum invenire, cui advolvatur, ita ut curva nihilominus in uno plano jaceat, id elegan-

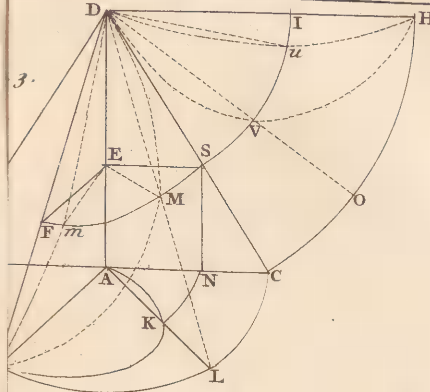
tiſſimè

tiſſimè obtinebis per cylindrum ſuper Tractoria erectum, quandoquidem relatio ordinatarum Logiſticæ ad axem mutatur in relationem earumdem ad curvam in Tractoria, utì oſtendimus *cap.* 5. *cit. num.* 2. Concipiatur, verbi gratià, in plano horizontali DFB erecta ad punctum B haſta quædam ſolidiori baſi marmoreæ B infixa; mox alligata baſi catenula aliqua FB, longitudine æquali parametro, ſeu ſubtangenti datæ Logiſticæ, ejus extremum F trahatur per rectam FD; utique baſis catenulam ſequens deſcribet Tractoriam curvam BNM, & haſta baſi infixa curvam quamdam ſuperficiem cylindricam ſuper ipſa Tractoria erectam; hæc igitur ſecari intelligatur plano aliquo per axem Tractoriæ FD tranſeunte, ad altitudinem extremæ ordinatæ in Logiſtica propoſita, dico, ſuperficiem ungularem inde abſciſſam fore nil aliud, quàm ipſammet Logiſticam tali cylindro advolutam; quippe ſi plani inclinatio fuerit per 45. gradus, itaut Logiſticæ ordinata æquetur ſubtangenti ejuſdem, ſeu erecta in ungula illa cylindrica ad punctum B adæquet catenulam BF, conſtat, omnes erectas ad puncta N, æquales fore ordinatis Tractoriæ NP, unde qualis eſt relatio ipſarum ad curvam BN, talis erit relatio applicatarum illius ungulæ ad ſuum axem, qui illi curvæ BN congruere intelligitur, & explicata illa ſuperficie in planum BSS, utriuſque ordinatis BF, & axe FD coincidentibus, erit quælibet axi Logiſticæ parallela AS æqualis curvæ BN Tractoriæ, per dicta *cap.* 13. Hugenianorum *num.* 5. Poſſem & modum inſerere, quo figura quælibet ita complicari in cylindrum poſſet, ut ejus curva ad conicam ſuperficiem terminaret; ſed ne longiùs digrediar,

TAB. XV. Fig. 2.

TAB. XV. Fig. 4. 6.

20. Jam ad inſtitutum redeo; & cylindricam illam ſuperficiem ſuper ſpirali erectam, ac cono intercluſam contemplor; utique perpendiculares OS ſuper helicis punctis erectæ, & ad coni ſuperficiem terminatæ, pro-



3.

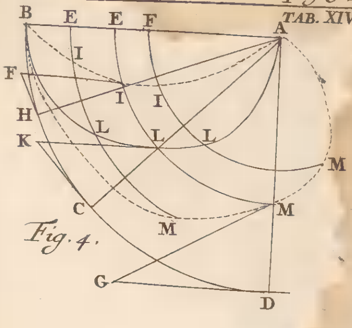


Fig. 4.

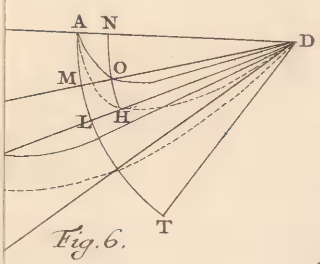


Fig. 6.

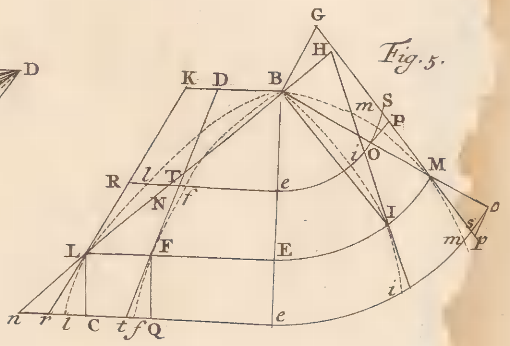


Fig. 5.

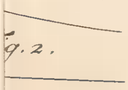


Fig. 2.

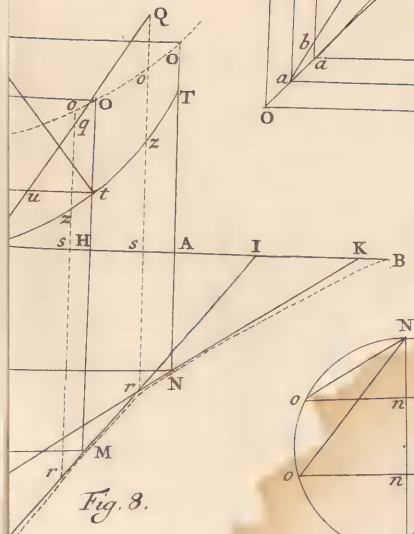


Fig. 8.

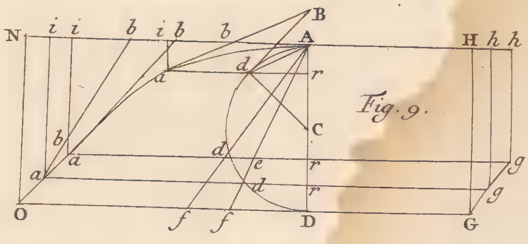


Fig. 9.

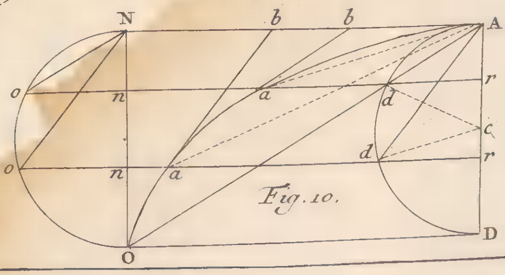


Fig. 10.

proportionantur differentiis radiorum, eſt enim DA ad OS, ut CA, ſeu AB ad CO; itaque expoſitâ parabolâ C*a*A hanc ſpiralem BOA æquante, ſi ad ſingula puncta *a* peripheriæ parabolicæ erigi intelligantur æquales differentiis ordinatarum, (ubi angulus DCA, trianguli per axem coni ſemirectus fuerit); iiſve proportionales in ratione axis coni DA ad baſis radium AC, (ubi ille angulus major, aut minor fuerit ſemirecto); ſeu ſi cylindrica ſuperficies ſuper C*a*A perimetro parabolæ erecta ſecari intelligatur plano per AΦ tranſeunte, ac tantumdem baſi inclinato, ac latus coni radio baſis inclinetur, ſcilicet per angulum DCA, quomodo erectæ manebunt in ſuperficie cylindrica quæſitæ ordinatarum differentiis (adeòque & differentiis æqualium radiorum circuli AC) proportionales, quippe correſpondentes applicatis trilinei parabolici C*a*AΦ, erit ungula ex tali ſuperficie cylindrica, baſi, & plano ſecante, interjecta eadem prorſus, quæ ſuper ſpirali AOB priùs erigebatur, & cono concluſa manebat; Perimeter autem ungulæ cylindri parabolici eſt parabolæ æqualis, utì conſtare poteſt ex propoſ. 3. Append. noſtræ Vivian. Probl.; itaque explicatâ in rectam ſpirali BOA, curva BSHD, non quidem in parabolam, quæ talis poſitione ſit, ſed in ungulæ parabolicæ perimetrum abitura eſt, æqualem longitudine cuidam parabolæ, cujus rectum latus ſit ad latus rectum prioris C*a*A, ut lateris coni DC quadratum ad quadratum radii AC, axis longitudine ipſi CN æquali remanente; id quod etiam immediatiùs, & abſque tot ambagibus colligitur, ex quò ipſe demonſtraveris curvam BSHD eſſe ſpiralem conicam, quæ evoluta in Archimedeam ſpiralem abeat, per ſuperiùs dicta *num.* 15., utique ejuſmodi parabolæ æqualem.

21. Dimenſio autem ipſius ſuperficiei cylindricæ

DHSBOA habebitur, ex rectangulo axis AD in ipſam ſpiralem AOB, vel huic æqualem parabolam CaA, ſubtrahendo tale ſpatium, quod ad portionem ejuſdem parabolæ, duabus ad axem ordinatis interceptam, quarum altera ex foco, altera tantò infra ipſum, quantus eſt totus axis, ſit in ratione axis DA ad radium AC; reſiduum quippe erit ſpatium ungulæ ſupra determinatæ; id quod analyticè ſic deſcribi poteſt. Radius AC ſit $= r$, & $\frac{1}{4}$ baſis quadraticis inſcribendæ quadranti circulari radii AC (vel ſemiſſis lateris recti parabolæ CaN, ideſt tertiæ proportionalis poſt ſemiperipheriam, & radium) ſit $= c$; quæ verò utriuſque poteſt quadratum (quæ ſcilicet foret parabolæ perpendicularis in A) eſto $= u$; axis coni AD eſto $= a$; ſuperficies hyperbolæ æquilateræ interceptæ ſemitranſverſo æquali ipſi c, & ordinata ad rectæ diametri portionem æqualem ipſi r, eſto bh. Erit cylindrica ſuperficies ſpirali imminens, & cono concluſa ADHSBOA $= \frac{abh}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r}$; nam linea ſpiralis, ſeu parabolica, utpote cum c continens rectangulum $= bh$, erit $\frac{bh}{c}$; tota igitur cylindrica ſuperficies ſpirali imminens, & uſque ad apicem coni completa, erit $\frac{abh}{c}$. Verùm inde ſubtrahenda eſt Ungula ſuperior, cujus ſpatium, ad portionem parabolæ interceptam ordinatis, c ex foco, & u tantò longiùs ab ipſo, quanta eſt ſemiſſis circumferentiæ, ſeu axis datæ parabolæ, ſit in ratione a ad r; cùm verò integræ portiones parabolæ, abſciſſæ à vertice per ordinatas u, & c ſint, ut u^3 ad c^3; dividendo, portio truncata intercepta ordinatis, u, c, erit ad portionem interjectam vertici, & minori ordinatâ c, ut $u^3 - c^3$ ad c^3; eſtque portio interjecta vertici, & foci ordinata $c = \frac{1}{3} cc$; igitur truncata illa portio ordinatis c, & u intercepta erit $\frac{u^3}{3c} - \frac{cc}{3}$;

&

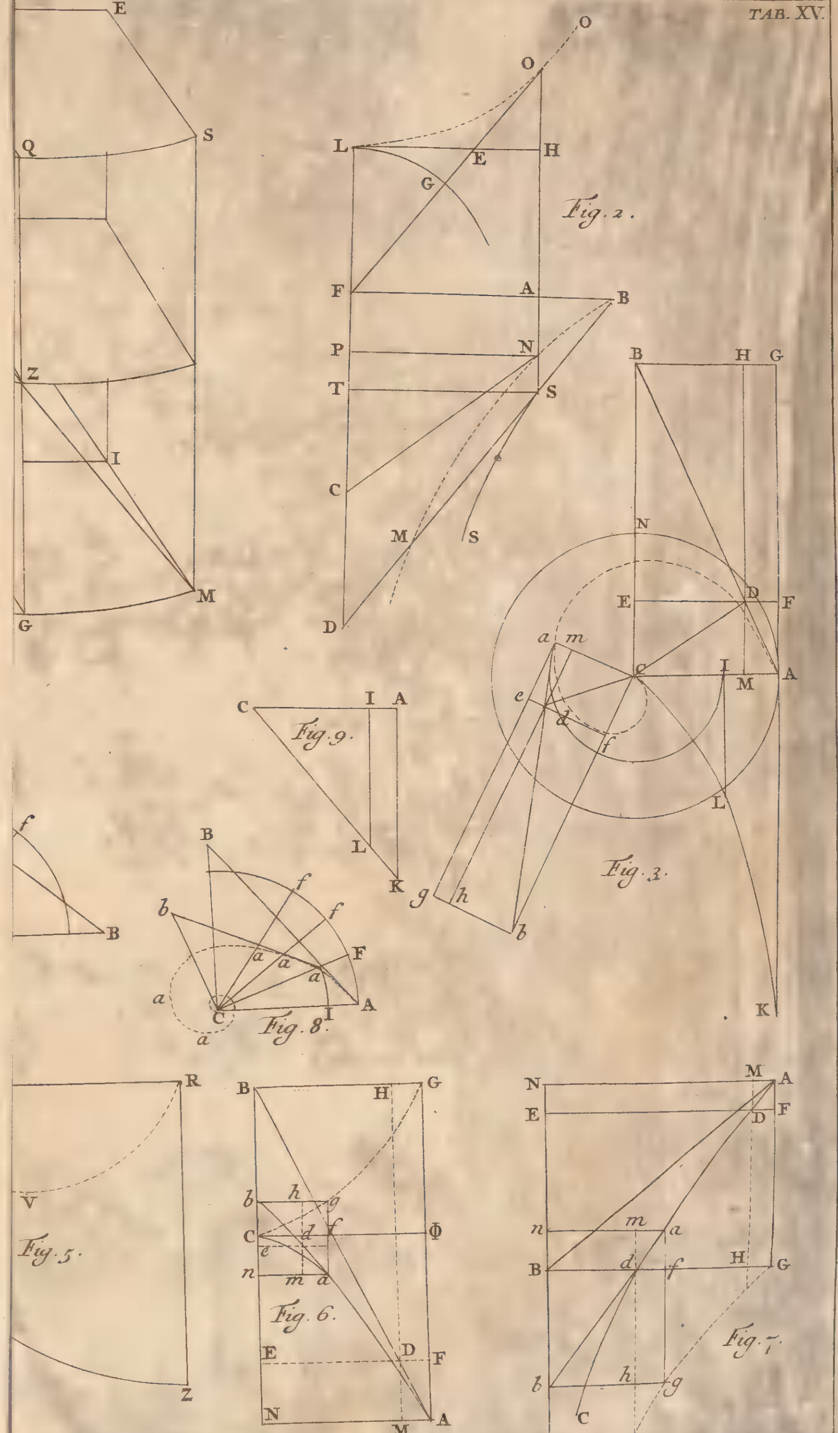
& quæ ad hanc eſt in ratione u ad r erit $\frac{au^3}{3rc} - \frac{acc}{3r}$; quâ ſubtractâ ex $\frac{ahh}{c}$ fit $\frac{ahh}{c} - \frac{au^3}{3rc} + \frac{acc}{3r} =$ cylindricæ illi portionis ſpiraceæ BSHDAOB cono incluſæ.

22. Nihil, ut arbitror, attinet contemplationem ulteriùs extendere, quum omnia ipſe mentis excurſu jam præoccupaveris; ſed ſi optaris ejuſmodi ſpiraceæ cylindricæ ſuperficiei portionem, quâ explicatâ in planum, rectificata perimetro BOA, etiam BSHD in rectam abeat, ſume ſpiralem Geometricam A*a*C; nam & in coni ſuperficie ſimilem ſpiralem habebis (utì eodem tuo ratiocinio conſtat), quæ potentia æqualis erit ipſi C*a*A, & axi coni ſuper illa perpendiculariter erecti, propter radios AC, *a*C proportionales curvæ portionibus C*a*A, C*aa* ab ipſo centro abſciſſis, ut colligitur ex dictis *cap.* 5. Hugenianorum *num.* 10., adeòque & differentias radiorum F*a*, *fa* curvæ portionibus A*a* reſpondentes. TAB. XV. Fig. 8.

Hæc habui, quæ raptim ad Te ſcriberem, Vir Clariſſ., & quæ Tuis elegantiſſimis ſpeculationibus reponerem; de controverſia autem Mechanica, quæ hactenus nos commiſit, erit aliàs differendi locus, eſto enim utilior ſit Statica illa diſſertatio, jucundior tamen, minùſque in lubrico poſita, Geometricarum rerum ſedula meditatio. Vale, meque, ut facis, amare perge; quamquam non eſt cur de hoc ſim ſollicitus, inſitæ enim Humanitatis tuæ ſtimulos habes, quibus in id incitaris. Dabam Kal. Aug. &c.

F I N I S.

TAB. XV.





CHRISTIANI HUGENII
ZUILICHEMII,
Dum viveret Zelhemii Toparchae,

OPUSCULA
POSTHUMA.
TOMUS PRIMUS,
QUI CONTINET
DIOPTRICAM,
ET
COMMENTARIOS
DE VITRIS FIGURANDIS.

AMSTELODAMI,
Apud JANSSONIO-WAESBERGIOS.
M. DCC. XXVIII.

Generoſiſſimis atque Illuſtriſſimis Viris

ACADEMIÆ LUGD. BATAVÆ

CURATORIBUS.

D. JACOBO BARONI WASSENARIO, Dynaſtæ in Waſſenaer, Obdam, Heusbroek, Wochmeer, Spierdijk, Zuydwyk, Kernchem, Twickeloo, Lage &c. Illuſtris in Hollandia Nobilium Ordinis Primo, Aggerum Rhenolandicæ Præfecturæ Aſſeſſori, &c. Supremo Equitum Fœd. Belgicæ Magiſtro, Oppidorum, Arciumque variarum Gubernatori &c. ad Potentiſſimos Poloniæ & Boruſſiæ Reges, ac Sereniſſimum Electorem Hanoverienſem, & alios Germaniæ Principes, Legato nuper Extraordinario, &c. &c.

D. HUBERTO ROSENBOOM, Toparchæ in 's Grevelsrecht &c. JCto, Supremae Batavorum Curiæ Præſidi, &c. &c.

D. HENRICO à BLEYSWYK, JCto, Conſulari apud Delphenſes Viro, Præpotentium Foederatæ Belgicæ Ordinum, ut & Societatis Indicæ Orientalis Aſſeſſori &c. &c.

EORUMQUE COLLEGIS,

Nobiliſſimis & Ampliſſimis

CIVITATIS LUGDUNENSIS

CONSULIBUS,

D. JOHANNi vanden BERG, JCto, Conſulum Præſidi.

D. CONRADO RUYSCH, JCto, nuper ad Collegium Illuſtr. & Præpot. Hollandiæ Ordinum Deputatorum Delegato.

D. ABRAHAMO van ALPHEN, JCto, Societatis Indicæ Orientalis apud Amſtelodamenſes Aſſeſſori.

D. PETRO van DORP.

VIRIS NOBILISS. AMPLISS.

S. P. D.

BURCHERUS de VOLDER,

ET

BERNHARDUS FULLENIUS.

QUOD a nobis ultima voluntate ſua deſideravit Nobiliſſ. *Hugenius*, & quod ſecundum eam in nos receperamus, id præſtamus hodie, edendo hæc opuſcula, quæ, poſt magno labore luſtrata ejus ſcripta, publicæ luci idonea aut offendere, aut reddere potuimus. Quod ut lubentiſſime pio erga magnum hunc Virum officio ducti præſtitimus, ita nulli dubitavimus, quin hæc, quæ noſtro quidem conſilio, ſed quod Vos Auctoritate veſtra probare dedignati non eſtis, jam prodeunt, Illuſtr. veſtris Nominibus inſcribenda forent. Id enim, præterquam quod ſuadebat toti orbi literario notiſſimus favor, quo literas, literarumque cultores proſequimini, flagitabat inſuper teſtata Auctoris voluntas, a qua in omnibus his quam minimum recedere nobis religio fuit. Nam cum illi placuerit ſua ſcripta legare Academiæ Lugduno-Batavæ, cui Vos tanta cum ſollicitudine & ſucceſſu præſide-

tis, ſimul & ſuam erga vos reverentiam teſtatam voluiſſe, & nobis legem hanc fixiſſe viſus eſt, ut quidquid ex illius ſcriptis in publicum prodiret, Vobis, VIRI NOBILISS. AMPLISS. optimo jure deberetur. Ipſius quoque Auctoris celebritas, & quam maximo ſuo merito habuit, & habebit ſemper inter omnes doctos exiſtimatio ſumma, facit, ut ſperare audeamus, hoc quod & ipſius & noſtro nomine ea, qua decet, reverentia vobis offerimus, non omnino ingratum fore. Quod ſi obtinuerimus, erit profecto, quod nobis gratulemur admodum; Deum porro precantes, ut Vos difficillimis hiſce temporibus Reipublicæ, cujus magnam partem tam Bello, quam Pace Vobis commiſſam gaudemus, & Academiæ, cujus in Vobis ſita eſt ſalus, diu ſoſpites & incolumes ſervare velit. a. d. XVII Calend. Febru. CIƆ IƆ CCIII.

PRÆ-

PRÆFATIO PRIMÆ EDITIONIS.

BURCHERUS de VOLDER,

ET

BERNH. FULLENIUS

LECTORIBUS S.

Q*Vanto damno Reip. literariæ diem ante paucos annos obierit ſuum Vir illuſtris* Chriſtianus Hugenius *norunt omnes, qui res Phyſicas aut Mathematicas vel a limine ſalutarunt. Tantum quippe in eo eluxit ingenii acumen, tanta ſubtilium floruit inventorum copia, tantaque harum artium effulſit peritia, ut paucos admodum, qui cum ipſo comparari poſſint, ſuperiorem certe hæc ætas tulerit neminem. Quæ res cum ſummorum virorum ſuffragiis ſatis ſuperque ſtabilita ſit, noſtram, ut opinamur, commendationem non exigit. Quare & majoribus ingeniis, & majori facundia præditis relinquentes deprædicationem ſummarum dotium, quæ magnum hunc Virum illuſtrarunt, hoc unum, quod rem, quæ præ manibus eſt, propius ſpectat, monendum duximus; Viſum eſſe Illuſtri Viro teſtamenti ſui tabulis Academiæ Lugduno-Batavæ legare ſcripta quædam Mathematica, ſimulque nos rogare, ut ea perſpiceremus, & quae praelo aptari poſſent, edi curaremus, & nominatim quidem,* Dioptricam, Tractatum de Motu Corporum ex percuſſione, item de Formandis Poliendiſque Vitris. *Cui operi cum nos accingeremus, plus in eo laboris offendimus, quam in principio nobis perſuaſeramus. Etſi enim pleraque haec, quae*

hic

hic exhibemus jam a multis annis conſcripta ſint, vix quidquam tamen invenimus plane ad umbilicum deductum, ſed multa, nec ſatis integra, nec couvenienti ordine diſpoſita, utpote, quibus Auctor aliis, & aliis, ut fit, ſupervenientibus meditationibus diſtractus, ultimam manum imponere diſtulerat. Exiſtimavimus tamen, nos nec ab Auctoris mente aberraturos, nec in commoda Reipublicæ litterariæ peccaturos, ſi prioribus illis nominatim nobis præſcriptis, adjungeremus, Dioptricæ *quidem, & Tractatui* de Vitris figurandis, poliendiſque, *Diſſertationem* de Parheliis: *Tractatui de* Motu ex percuſſione, *alterum de* Vi centrifuga, *denique* Deſcriptionem Automati Planetarii, *quo Auctor noſter in plano imitatus eſt Planetarum cœleſtium motus. Præter quæ invenimus quidem nonnulla alia ab Auctore inchoata, ſed nequaquam eo perducta, ut noſtro judicio publicam lucem videre poſſint. Quod autem hæc tardius evulgentur, factum eſt, partim quod ſerius hæc ſcripta ad manus noſtras devenerint, partim quod locorum, quibus vivimus, diſtantia non parum moræ attulerit, dum neceſſe fuit, ut ſinguli ſeorſim ea pervolverimus; nec licuerit, ſi quæ res deliberationem requireret, coram inter nos conferre, & certi quid conſtituere, verum omnia per litteras conficere; quæ multis de cauſis, quas unuſquiſque facile perſpiciet, laboris plurimum, & permagnam temporis jacturam ſecum trahunt. Quibus denique accedunt privata noſtra negotia, quæ nos ſæpius ab his peragendis abſtraxerunt.*

Primo ergo loco videre eſt Dioptricam, *jam, ut cætera fere omnia, a multis annis conſcriptam. Ex iis quæ hinc inde annotaverat* Ill. Hugenius *nobis quidem apparuit, in animo eum habuiſſe addere huic* Dioptricæ, Speculare teleſcopium Newtoni, & ea quæ concernunt ejus aperturam; Parheliorum doctrinam, Libellæ deſcriptionem & demonſtrationem, Aſtroſcopiam compendiariam; *quorum tamen nihil hic addidimus praeter Tractatum de* Parheliis; *cum* Libellæ *deſcriptio & demonſtratio* Diario

rio Gallico 29 *Januarii* & 26 *Februarii anni* 1680 *inſerta*, Aſtroſcopia *vero ab ipſo Auctore publice edita ſit*; *de* Speculari *vero* Teleſcopio Newtoni *nihil ad manus noſtras devenerit. Utitur autem hac in Dioptrica ſæpenumero prolixis admodum demonſtrationibus per rationes compoſitas; Qua de cauſa diu hæſimus, an non præſtaret ſubjungere breves quaſdam demonſtrationes calculo fundatas, quibus proculdubio uſus eſt* Hugenius *in inveniendis concluſionibus. Verum quoniam per rationum compoſitionem demonſtrandi methodum tantum non in omnibus aliis operibus ſuis alteri prætulerit, conſilium hoc abjecimus, exiſtimantes teneri nos obſequi voluntati Auctoris, quantum eam probabili conjectura aſſequi poſſemus. Annotaſſe quidem noſtrum invenimus, multa contrahenda, mutandaque eſſe. Verum cum incertum eſſet, an in mutationibus faciendis recte mentem ejus aſſequeremur, optimum reputavimus, quantum fieri poſſet, ipſum textum ſequi. Veruntamen cum Propoſitiones multis in locis non ſatis concinne diſpoſitas animadverteremus, nec quidquam certi de eo conſtituiſſe videretur Auctor, eas ita diſpoſuimus, ut rerum, de quibus agebatur, ſeriei, & demonſtrationum apto ordini convenientius videbatur.*

In Dioptrica autem noſter incipit a primis fundamentis, ipſa ſcilicet refractionis menſura, ſecundum quam radii ex aëre, ſive in aquam, ſive in vitrum tranſeuntes refringantur. Dein regulas tradit, per quas inveniantur puncta vel collectionis vel diſperſionis radiorum, per diverſorum mediorum ſive planam, ſive ſphæricam ſuperficiem, ut & per quaſlibet lentes tranſeuntium. Nec ea tantum quæ in ipſo axe ſunt, verum etiam illa, quæ extra axim verſus latera reperiuntur. Verum enim vero cum in lentibus ex figura utrinque ſphærica, aut ex ſphærica & plana conſtantibus, hæc puncta non accurate, ſed præterpropter tantum radios colligant, inquirendum porro ſibi exiſtimavit, quanta in ſingulis foret aberratio.

Hinc oculi fabricam conſiderat, & qui vitia oculorum in ſenibus Myopibuſque emendari perſpicillis queant, exponit. Poſt effecta lentium contemplatur, qua ſcilicet magnitudine apparente reſpectu veræ, & quo ſitu objecta repræſententur, ſive per unam, ſive per plures lentes fiat viſio. Aggreditur dein Teleſcopia, ex duobus, tribus, quatuorve lentibus, ſive convexis, ſive partim convexis, partim concavis conſtantia, & amplificationis rationem, & ſitum objectorum, & anguli viſorii amplitudinem in ſingulis determinat. Qua occaſione ſimul explicuerat, qui aberrationis ex figura vitium, quod in Teleſcopiis, quæ lentes tantum convexas continent, inemendabile eſt, in iis tamen, quæ ex convexa & concava lente componuntur, tolli queat; hoc ſcilicet artificio.

Data exterioris lentis foci diſtantia, dataque ratione, ſecundum quam objecta ſecundum diametrum amplificari volumus, quæ ſit, ut b *ad* c, *dataque ex his quoque ratione aberrationis radii extremi ad lentis craſſitudinem, quæ ſit, ut* f *ad* g, *inter lentem exteriorem & focum ejus, ita ſcilicet, ut focus utriuſque lentis ſit idem punctum, collocat lentem concavam, cujus aberratio radii axi paralleli a parte foci communis venientis æquetur craſſitudini lentis ductæ in numerum* $\frac{bf}{cg}$. *Quæ craſſitudo, ſi vocetur* q *erit aberratio* $\frac{bf}{cg}q$, *quæ ſi æqualis ponatur ſecundum Regulam* Prop. 27. Dioptr. *datam* $\frac{27aaq+24adq+7ddq}{6aa}$, *in qua* a *deſignat ſemidiametrum ſuperficiei convexæ, &* d, *diſtantiam puncti diſperſus, facile erit invenire ſemidiametrum ſuperficiei convexæ, & ea cognita ſemidiametrum quoque concavæ, cum ea ſit æqualis* $\frac{ad}{2a+d}$ *ex eadem illa Propoſitione. Quod inventum licet magni primum videatur feciſſe, ita ut ad quamvis foci diſtantiam lentis convexoplanæ integram etiam ex eo Tabulam confecerit, repoſuit tamen poſtmodum inter ea, quæ ex Dioptricis*

tricis ſuis rejecerat; proculdubio quia poſt detectam ab V. Cl. Newtono *radiorum, quæ in refractione locum habet, diſſipationem, hanc ex figura aberrationem, quæ ab altera, quæ ex diſſipatione eſt, multum deficit, tanti momenti in Teleſcopiis eſſe non judicavit. Qua de cauſa & nos, qui ſummo ſtudio nobis cavendum duximus, ne quid fieret quod Auctorem ipſum facturum non fuiſſe ſuſpicaremur, inventum hoc rejecimus, cujus tamen obiter hic mentionem faciendam exiſtimavimus, ut vel ex eo pateret, qua ſollicitudine noſter reſpexerit ad omnia, quæ vel tantillulum ad Teleſcopiorum perfectionem facere poſſe videbantur.*

Noſter equidem perfectiſſimum ſibi proponens Teleſcopium, quod in maxima claritatis ac diſtinctionis perfectione objecta ad lubitum amplificaret, tali conatui obſtare deprehendit, quod juſto major apertura diſtinctionem, minor vero claritatem impediret. Hinc perſuaſus modum in eo a Natura eſſe poſitum, ultra quem progredi non licet, hoc præſtitit, ut dato optimo quodam Teleſcopio exhibuerit aliud objecta magis amplificans, ſed tamen æque clare ac diſtincte omnia repræſentans. Ergo cum radiorum diſſipatio ad Teleſcopiorum aperturas plurimum faciat, hinc ejus rationem explanat, & aſſumendo Teleſcopium rite ordinatum, ita ut nec majorem aperturam in lente exteriori ferre poſſit, nec acutiorem lentem ocularem, in quo tamen hæc diſſipatio non noceat, quaſlibet in aliis Teleſcopiis, data diſtantia foci lentis exterioris, & aperturas, & lentis ocularis focum & ex his amplificationem objecti ſecundum Diametrum definit, horumque omnium quantitatem, aſſumto ſcilicet Teleſcopio 30 *pedum pro norma reliquorum, juxta diverſas foci lentis exterioris diſtantias, Tabula exponit. Qua de re monendum duximus Tabulam, quam hic dedimus, in amplificatione paululum deviare ab Auctoris tabula. In hac enim poſuerat in Teleſcopio* 30 *pedum amplificationem*

eſſe, ut 120 *ad* 1, *cum tamen ea, poſita diſtantia foci vitri ocularis* $3\frac{3}{10}$ *pollicum, ut facit Auctor, ſit ſolummodo, ut* 109 *ad* 1, *ſecundum quam rationem reliquum tabulæ, amplificationem quod ſpectat, conſtruximus.*

Denique Microſcopia aggreditur, primum ſimplicia, dein compoſita, & in ſingulis objecti amplificationem determinat; & aſſumto, ut in Teleſcopiis fecerat, Microſcopio rite ordinato, conſiderataque utraque aberratione, tam quæ ex figura, quam quæ ex diſſipatione radiorum eſt, ex hujus ad reliqua comparatione, invenit aliud quodlibet, ex data lentis ocularis foci diſtantia, & data amplificatione objecti, in quo neutra aberratio noceat.

Noſter autem dum conſiderat diſſipationem radiorum Newtonianam, *ita loquitur, ac ſi ea, quæ in axe lentis eſt diſtantia, inter duo puncta, verſus quorum alterum radii rubri tendunt, verſus alterum vero violacei, foret* $\frac{1}{50}$ *diſtantiæ ejus, quæ eſt inter punctum ad quod pertinent radii rubri & ipſam lentem. Quod ne ſecus ac oportet accipiatur, conſiderandum eſt* V. Cl. Newtonum *primum cum orbe litterato communicaſſe, radium Lucis in ſuperficiem denſioris diaphani oblique incidentem, poſt refractionem, velut in plures radios ſpargi exiguis angulis diſſidentes coloribuſque infectos, & ea quidem lege, ut ſi ſinus communis anguli incidentiæ ponatur eſſe* 44 *partium, ſinus refractionis radii rubri, qui minime omnium refringitur, ſit earundem partium* 68, *ſinus vero refractionis radii violacei, qui maximam refractionem patitur,* TAB.I. Fig. 1. *ſit partium* 69. *Ex quibus facile eſt concludere, ſi radius* LB *ope refractionis diſpergatur colore rubro in* BD, *colore vero violaceo in* BE *fore* ND *ad* DB, *ſive ad* DC, *ut* 68 *ad* 44, *ut &* NE *ad* EB *vel* EC *ut* 69 *ad* 44. *Qualium ergo partium* NC *eſt* 24, *talium* CD *erit* 44, *& qualium* NC *eſt* 25, *talium* CE *erit quoque* 44. *Erit ergo linea* CD *ad* CE, *ut* 25 *ad* 24, *adeoque* DE *erit* $\frac{1}{25}$ CD *&* FG *ipſius*

AB.

AB. *Verum ſi perpendamus multo maximam radiorum conſtipationem eſſe in* PRQ, *non vero in* FDG, *liquebit ſimul focum lentis eſſe in* PRQ, *ita ut* RE *ſit* $\frac{1}{50}$ RC *vel* RH, *&* PR $\frac{1}{50}$ BH, *ut & angulus* REP *ſit* $\frac{1}{50}$ *anguli* BRH. *Quod illud ipſum eſt, quod Auctor intendit.*

Nec poſſumus quin hac occaſione referamus V. Cl. Newtonum *nobiſcum communicaſſe*, Recentioribus ſe experimentis accuratius didiciſſe, quod FQ ſit $\frac{1}{55}$ ipſius AB, & DE $\frac{1}{28}$ ipſius EH circiter. *Quo ipſo angulus aberrationis tantillulo ſit minor, utpote quæ in microſcopio non major futura eſt,* 15′: 36″ *cum Prop.* 63 *Dioptr. inveniatur* 17′: 12″. *nec in Teleſcopio major* 28′, 24″ *cum in eadem Prop. inveniatur* 31′: 20″. *Unde perſpicuum eſt, ſi illa major in Teleſcopiis Microſcopiiſve non noceat, nec hanc minorem nocituram. Facile quoque liquet, ſi hanc aberrationis rationem accuratiorem ſequi velimus, in regula priore, quam tradit ultima Dioptrices Propoſitione, in locum* 50 *ponendum eſſe* 55.

Figuras quæ ad Dioptricam pertinent, ligno inciſas ipſi Textui adjecimus; earum enim nonnullas jam confectas Auctor reliquerat, quas Hæredes cum Bibliopola ad hunc uſum communicarunt humaniſſime; verum cum longe major pars adhucdum conficienda eſſet, non, qualem optaremus, invenire potuimus artificem; quæ & ratio fuit, cur in reliquis opuſculis mutato conſilio figuras æri inciſas adhibuerimus, ad finem libri compingendas, ita tamen ut extra libri molem evolvi commode poſſint.

Huic Dioptricæ ſubjuximus Tractatum de Vitris figurandis, poliendiſque ad Teleſcopia efformanda. *Qui cum Belgico ſermone conſcriptus eſſet, nec concinnum videretur Latinis hiſce Belgica miſcere, de eo in Latinam linguam vertendo cogitandum fuit. Quam operam, licet propter plures machinarum denominationes non ita facile Latine explicandas magnam ſedulitatem re-*

 quireret;

quireret, in ſe tamen ſuſcepit & feliciter ad exitum deduxit V. Cl. Hermannus Boerhaven, Philoſophiæ & Medicinæ Doctor, *quique in Illuſtr. Academia Lugduno-Batava Medicinam ſumma cum laude publice docet.*

Sequitur tertio loco Diſſertatio de Coronis & Parheliis, *partim Latine, partim Belgice ab Auctore conſripta, quam Latio donavit Solertiſſimus & maximæ ſpei Juvenis* M. P. Daumeſnil. *In hac autem diſſertatione, ex guttulis aqueis nucleum nivalem in ſe continentibus, ingenioſiſſime deducit; primo Coronarum varii generis, dein & ex ſimilibus Cylindrulis, Parhelicrum, tum lateralium, tum poſticorum cauſas; primario ſibi exemplorum inſtar proponens duas obſervationes* Coronarum & Parheliorum *anno* 1629 & 1630 *Romæ factas a* Cl. Scheinero, *ut & quaſdam* Hevelii, *quas idcirco diſſertationi ſubjunximus. Jam a multis annis varias ſimilium Phænomenum obſervationes variis locis factas noſter collegerat, eo animo, ut quæ in ſingulis peculiaria reperiret, poſt exhibitas horum Phænomenum generales cauſas, hoc in libello ſimul explicata traderet, iiſdemque ex fundamentis deduceret. Harum quoque obſervationum nonnullas offendimus, quas tamen addere reliquis omiſimus, tum quia earum in ipſa diſſertatione nulla facta erat mentio, tum quia eas omni cauſarum expoſitione privatas invenimus. Tantum quippe abeſt, ut hoc ſuum propoſitum ad exitum deduxerit, ut ne illa quidem omnia, quæ in prioribus illis* Scheineri, Heveliique *obſervationibus locum habent, plene abſolverit. Licet enim moneat ſe de* Anthelio *ad finem diſſertationis acturum, fruſtra tamen, tum hoc, tum quæ de circulis in cælo apparentibus & ſe invicem oblique ſecantibus meditatus erat, quæſivimus. Quare, ut, quantum pote, huic defectui mederemur, adjecimus ab eodem illo ingenioſiſſimo juvene ex Gallica in Latinam verſam* Hiſtoriam Coronae

Pa-

Pariſiis obſervatæ 12 Maii, anni 1667, *quæque circa id tempus jam publicam lucem aſpexerat. Iu ea enim hæc fundamenta, quæ latius in hac diſſertatione de* Parheliis *tractantur & demonſtrantur, ſtrictius referuntur, ſimulque &* Antheliorum *& arcuum ſe invicem ſecantium, mentio fit. Ex quibus cum fundamentis hic ab Auctore poſitis propius collatis, qui omiſſa hæc explanari debeant, facile erit colligere.*

Multum vero magis nos ſollicitos habuit, quod in hoc tractatu trium meminiſſet tabularum, quarum demonſtrationem ad finem diſſertationis rejicit, cum tamen nec tabularum, nec demonſtrationis earundem veſtigium ullum appareret, quamquam eæ tanti nobis viderentur momenti, ut abſque iis res intelligi non poſſit. Harum ergo tabularum conficiendarum rationem ex fundamentis ab Hugenio *poſitis eruere neceſſum fuit; quod & fecimus, eamque ſimul cum demonſtratione libello huic ſubjecimus. Poſtmodum autem forte fortuna in manus noſtras incidit chartula a reliquis omnibus ſejuncta ſolas has tres tabellas in ſe complectens, ut partim ex inſcriptione tabellis appoſita; partim ex eo, quod harum tabellarum numeri exacte illis numeris reſponderent, quorum tanquam ex tabellis hauſtorum in hoc tractatu meminit; partim denique ex eo quod reliqui numeri noſtro calculo reſponderent, promtum erat colligere. In demonſtratione autem ejus Tabellæ, quæ Parhelia poſtica reſpicit, noluimus uti curva, quæ fit ex collectione radiorum refractorum, quanquam per eam rem multo facilius confici poſſe perſpectum habebamus; tum quia harum curvarum inventio longe ſerius, quam libellus hic ab Auctore conſcriptus eſt, divulgata fuit; tum quia ea uſum non fuiſſe Auctorem, haud vane, ut exiſtimamus, conjecimus.*

In hac autem de Parheliis *diſſertatione, diametrum Coronæ, quæ frequentiſſime apparet, tantum non ubi-*

que

que ſtatuit 45 *graduum circiter, in Gallico vero illo tractatu de Corona anni* 1667, *quæ poſt hanc diſſertationem conſcripta videtur, licet longe ante eam edita ſit, ubique meminit diametri gr.* 44. *utpote quæ magnitudo, ut veriſmile eſt, ipſi ex accuratioribus obſervationibus magis probaretur. Quare & in tabulis illis, quas in chartula nos reperiſſe diximus, calculus reſpiciebat diametrum coronæ* 44 *gr. non vero* 45 *graduum. Ne tamen cuipiam hac de cauſa deeſſe quidpiam tabulis videretur, addidimus quartam, quæ locum habet in corona* 45 *graduum. Potuiſſet quidem Tabula extendi ad quamvis nuclei nivei craſſitudinem, ut apparentibus pluribus Coronis vel Parheliis lateralibus diverſæ diſtantiæ, quanta nuclei ad Globum vel Cylindrum aqueum proportio occaſionem illis præbeat confeſtim e Tabula confici poſſet; qualem Tabulam ad omnes nucleorum diverſitates extenſam jam confeceramus, verum quoniam Auctor primario tantum ad certos nucleos reſpexerat, eam his addere neglexit.*

Huic ſuccedit Tractatus de Motu, in quo Regulæ Motus demonſtrantur, quas jam ante 30, *& quod excurrit, annos in* Diario Gallico 18 Martii anni 1669 *cum orbe litterario communicavit Auctor.*

Hunc autem propter materiæ affinitatem ſequitur libellus de Vi centrifuga, *quem in ſcedis Auctoris, ſed nequaquam convenienti ordine diſpoſitum invenimus. Quare factu optimum & Auctoris menti convenientiſſimum exiſtimavimus, ſi, quantum pote, ſequeremur ordinem* Theorematum de Vi centrifuga, *quæ ad finem* Horologii Oſcillatorii *divulgavit jam ante multos annos; licet ad id ipſum neceſſarium fuerit, quædam ex iis Theoremata, utputa* VII, IX, X, XI, *prout hic numerantur, ex fundamentis ab* Ill. Hugenio *poſitis deducere. Sed ne ſic quidem præciſe licuit eundem numerum Propoſitionum obtinere, ne quidpiam,*

piam, quod de his conſcripſerat Auctor, publico invideremus.

Quæ dum ſcribimus incidit forte fortunâ in manus noſtras Diarium Gallicum anni 1701, *quod dum obiter pervolvimus, animadvertimus* 23. *Maii* 1701 *adduci demonſtrationes horum* 13 *Theorematum; & ſimul in iis erroris accuſari Auctoren noſtrum, in eo, quòd tempus duarum oſcillationum minimarum alicujus penduli æquale ponit circuitui minimo ejuſdem penduli motu conico lati, idque ea de cauſa,* quod tempus duarum talium oſcillationum eſt æquale quadruplo temporis caſûs perpendicularis ex altitudine fili dupla. *Quod verum eſſe non poteſt: Tempus enim quadruplum caſûs perpendicularis ex altitudine fili dupla ad tempus caſûs per dimidium fili rationem habet, ut* 8. *ad* 1, *quæ nullam involvit rationem circumferentiæ circuli ad Diametrum; quam tamen ex demonſtratis ab* Hugenio Prop. 25 part. 2 Horologii oſcillatorii *exigit tempus oſcillationis lateralis penduli ad tempus caſûs perpendicularis ex dimidia fili altitudine. Recte autem* Hugenium *tempori circuitûs minimi æquaſſe duas oſcillationes laterales minimas ejuſdem fili, ex iis, quæ in hoc libello demonſtrata ſunt, patet abunde.*

Clariſſ. quoque iſtarum Demonſtrationum, quæ in Diario *exhibentur, Auctor, demonſtrationi Prop.* VI. *hæc ſubjungit.* In hac propoſitione Auctoris (*Hugenii ſcilicet*) duæ deficiunt conditiones: prima, ut filum ſemper ſit ſuperficiei Conoidis perpendiculare; altera, ut ſemper fiat gyratio ad perpendicularem altitudinem dimidii lateris recti; ſine quibus nihil determinatum eſt. *Verùm hanc propoſitionem* Hugenii *univerſalem eſſe, nec ullis conditionibus reſtringendam, patet ex demonſtratione, quam hic libellus exhibet quæque non ex motu conico, qui vi centrifuga minùs ſimplex, ſed ex vi centrifuga ſola, & ex proprietate ſuperficiei Parabolicæ generaliter deducitur. Deinde hæc ipſa, quæ in* Diario Gallico *habetur demonſtratio, non*

recte concludet, niſi filum, quod motu conico circumfertur, iiſdem viribus circuitus ſuos faciat, quibus in libero aëre faceret abſque ulla ſuperficie Parabolica; quod ſane fieri non poſſet, niſi globus ex filo ſuſpenſus ſupeficiei Parabolicæ perpendiculariter inhæreret. Altera verò conditio, ut manifeſtum eſt ex natura Paraboles, in priore continetur.

Ultimo denique loco videre eſt deſcriptionem Automati Planetarii, *quod, ut ex ipſo Automato liquet, confici curavit anno* 1682, *quanquam ne nunc quidem ejus deſcriptionem invenerimus integram, de qua idcirco paucula quædam notanda erunt.*

Primum eſt, illa verba P. 164. *quibus indicat, quantum in viginti annis Planetæ ſinguli promovendi ſint, ut vero cæli ſtatui congruant, deleviſſe Auctorem, & in illorum locum hæc ſubſtituiſſe,* ut in annis viginti error nullus, qui quidem viſibilis ſit, exiſtere queat. Poſt plures verò ætates, ubi opus fuerit, facilè corrigetur ea ratione quam ſuo loco docebimus. *Nos tamen verba illa, utut ab Auctore expuncta, exprimi curavimus, quoniam eandem illam abberrationis machinæ a Cælo intra* 20 *annos quantitatem tanti noſter fecit, ut eam ipſi machinæ incidi voluerit.*

Secundo notandum eſt, Aliter deſcribi conſtitutionem Terræ cum Luna, quam revera in Automato obtinet, ut ex ejus interiori inſpectione patuit. In ipſo enim Automato annulus AB, *non in interiori, ut deſcribitur, verùm in exteriori circumferentia habet dentes* 137, *nec major eſt orbita Terræ annua, ſed minor, nec defixus inter Martis & Telluris, ſed inter Telluris & Veneris orbitas. Circa hunc annulum rotatur orbita Telluris* CD, *cui perpendiculariter inhærent tres axiculi retinaculo detenti, quod tamen, ut axiculi eo manifeſtiùs apparerent, depingi noluimus.* Vide Tab. 3. Fig. 6. *Prior axiculus duas rotulas utroque capite affixas habet,* E, F, *quarum inferior duodenos dentes habet commiſſos dentibus annuli* AB, *ſuperior tredecim. Superioris den-*

dentes committuntur dentibus duodecim rotulæ H, *& dentes hujus duodecim dentibus rotulæ* G, *quæ in axe ſuo cavitatem habet in partem anteriorem tabulæ Planetariæ patentem, in qua cavitate defigitur ſtylus exiguus Telluris corpori ac Lunari circello conjunctus. Ita ſe res in ipſo Automato habet; ex qua deſcriptione manifeſtum eſt, revoluto annulo terreſtri ſecundùm ordinem ſignorum, priorem axiculum duabus rotulis* E, F, *inſtructum in eaſdem partes volvi, verùm rotulam* H *in contrarias, & hanc rurſus rotulam* G *ſimul cum Lunari circello in eaſdem ſecundùm ordinem ſignorum partes rotare. Hanc autem Telluris Lunæque conſtitutionem, licèt ita res ſe in Automato habeat, non deſcripſiſſe videtur Auctor, quia eam, quam deſcripſit, quæ, ut veriſimile eſt, ei demum poſt confectam machinam in mentem venit, huic prætulit; tum quia plus ſpatii eſt inter Tellurum & Martem, quam inter eandem & Venerem, tam quia annulus dentatus hac ratione major fit & idcirco dentes majores admittit, & denique, quia duobus rotulis idem efficit hoc modo, quod in Automato fit tribus.*

De Mercurio in hac deſcriptione altum offendimus ſilentium, Quare ejus conſtitutionem ex inſpectione ipſius Automati, & ex ſchedis quibuſdam diſperſis Auctoris hauſtam ut adjungeremus, neceſſum fuit. Idem autem præſtitum eſt circa cauſam inæqualitatis motûs, ut & circa definiendam quantitatem aberrationis, qua hæc machina a vera proportione motuum cæleſtium aliquàntulum deflectit.

Hæc ea ſunt, de quibus Vos breviter monendos eſſe duximus. Cæterùm nulli dubitamus, ſi licuiſſet Auctori ipſi his opuſculis ultimam limam adhibere, quin omnia multis partibus exactiora perfectioraque futura eſſent. Nos id præſtitimus quod potuimus. Studuimus equidem nos accommodare ad Auctoris ſenſum. Quod ſi obtinuimus, eſt quod nobis gratulemur; Sin verò humani quidpiam paſſi ſumus, ab æquo Lectore, præſertim ſi perpenderit, quantum laboris

& tædii ſit alienos ſenſus perſcrutari, *veniam ſperamus. Valete.*

CORRIGENDA.

TOM. I.

Pag. 83. *lin.* 5. *in marg. adde* TAB. XI. fig. 1. *Pag.* 103. *dele* TAB. XI. fig. 9. *Pag.* 138. fig. 24. *lege* fig. 4. *Pag.* 160. *lin.* 29. *in marg. adde* TAB. XVIII. fig. 3. *ibid. lin.* 30. *aa lege* aa.

TOM. II.

Pag. 27. *lin.* 14. *in marg.* VI. *lege* V. *Pag.* 35. *lin.* 14. fig. 20. *lege* fig. 21. *ibid. lin.* 24. *in marg. adde* vide fig. 20.

OPUSCULORUM INDEX

quæ in his Operibus Poſthumis continentur

In Tomo primo.

DIOPTRICA. pag. 1.
COMMENTARII *de formandis poliendisq; vitris ad Teleſcopia.* 203.

In Tomo ſecundo.

DISSERTATIO *de Coronis & Parheliis.* pag. 1.
DE MOTU *Corporum percuſſione.* 73.
DE VI *Centrifuga.* 105.
DESCRIPTIO *Automati Planetarii.* 155.

DIOPTRICA.

De refractione radiorum.

RADIOS lucis in aquam aut alia pellucida corpora incidentes inflecti, cum ſuperficiem eorum attigerint, & a via recta detorqueri, jam antiquis temporibus animadverſum fuit. Eſt enim inter Ariſtotelis Problemata, in quo de remorum apparenti curvitate quæritur. Itemque Archimedis libellus exſtitiſſe fertur de annulo ſub aquis viſo, in quo procul dubio de flexu iſto radiorum agebatur, nataque inde viſus fallacia. Leges vero, quas ita affecti radii ſequuntur, ſerius, ac noſtro demum ævo repertæ ſunt: quas hoc modo ſeſe habere experientia docuit.

Sit liquidi vel ſolidi diaphani corporis verſus FK exiſtentis ſuperficies plana, quæ ab alio plano, in quo figura hæc deſcripta intelligitur, ſecetur ſecundum rectam AB. In hanc incidat radius obliquus DC, qui ad rectam ECK, ſuperficiei propoſitæ perpendicularem, faciat angulum DCE; is in aqua vitrove perget ſecundum CF minori angulo ad CK inclinatam, quam ſit angulus DCE; atque ea lege, ut ſinus utriuſque anguli, hoc eſt, perpendiculares eorum DE, FK ex circumferentia circuli centro C deſcripti in rectam EK demiſſæ certam, eandemque ſemper inter ſe rationem ſervent. TAB. I. Fig. 2.

Hæc autem refractionum menſura, non ſinuum, ſed angulorum ipſorum proportione ab Alhaſeno Arabe & Vitellione olim definita fuerat, & experimentis quibuſdam utcunque confirmata. Sed cum in majoribus radiorum inclinationibus a vero diſcrepare proportio illa reperiretur, diligentius ſibi Recentiores inveſtigandam exiſtimarunt. In quibus Keplerus, plurimis fruſtra tentatis *, ipſam quidem rei veritatem non eſt aſſecutus; conjecturis tamen ſuis, variiſque molitionibus non parum ſequentium ſtudia adjuvit. Poſt eum vero Willebrordus Snellius, cum jam majus operæ pretium appareret, quippe exorto teleſcopii invento, multo labore multiſque experimentis eo pervenit, ut veras quidem refractionum menſuras teneret, nec tamen, quod invenerat, ſatis intelligeret. Nam poſitâ, ex. gratia, aquæ ſuperficie AB, viſibili vero ſub aqua in D, quod oculo in F poſito appareat quaſi in recta FC, continuabat hanc FC, donec in C puncto occurreret rectæ DA, ad ſuperficiem aquæ perpendiculari; hiſque ita deſcriptis ſtatuebat imaginem rei viſæ apparere in G, rectæque CD ad CG certam eſſe rationem, veluti in aqua ſeſquitertiam. Quæ rectarum inter ſe ratio vera eſt, ac convenit prorſus cum ea, quam paulo ante explicuimus, refractionis lege; quia CD eſt ad CG, ex doctrina triangulorum, ut ſinus anguli DGC, vel AGC, ſeu HCF, ad ſinum ang. CDG, ſive DCE. Verum ad hanc ſinuum proportionem nequaquam attendit Snellius, & uſque adeo ab apparente imagine rem omnem pendere exiſtimavit, ut etiam in radio perpendiculari, qualis HC, effectum refractionis, ſeu, ut falſo opinatur, decurtationem radii viſorii agnoſcat, deceptus eo, quod etiam rectà deſuper in vas aqua plenum inſpicienti fundus omni parte attolli videtur. Cujus rei vera cauſa ex radiis ad utrumque oculum tendentibus petenda eſt. Hæc autem omnia, quæ de refractionis inquiſitione volumine integro Snellius expoſuerat, inedita manſere; quæ

* Vide Paralip. ad Vitellionem.

Tab. I. Fig. 3.

quæ & nos vidimus aliquando, & Carteſium quoque vidiſſe accepimus, ut hinc fortaſſe menſuram illam, quæ in ſinibus conſiſtit, elicuerit; quâ in explicanda iride & vitrorum figuris inveſtigandis feliciſſimè eſt uſus. Cujuſmodi vero ſit illa Refractionis in ſinubus proportio, cum radius ex aere in aquam, vitrumve, aut alia corpora diaphana defertur, id vel priſmate, ut Carteſius præcipit, inquiri poteſt, vel aliis modis; quos, qui præcedentia intellexerit, non difficulter inveniet. Nobis hi, quos jam docebo, cæteris faciliores viſi ſunt; nam ſi liquida diaphani materia data ſit, ea vitreum vas impleatur, quod vel cylindri formam habeat, vel ejuſmodi ſolum, quæ circa axem rotunda ſit; quo autem capacius erit, quoque tenuiori vitro, eo melius. *Eſto* illud ABDC, atque ita collocetur, ut axem habeat ſolaribus radiis, vel ab lumine longinquo venientibus, directe oppoſitum. Hi igitur radii ſi cadant in latus DC, concurrent ex parte altera vaſis, poſtquam & vitrum & aquam eo contentam tranſierunt, &, ſi cylindraceum vas fuerit, lineam quandam lucidam ſignabunt, ut KL in plana ſuperficie vaſis lateri parallela. Ea ubi perfectiſſima contigerit linea minimæque latitudinis, circino capiatur diſtantia GF qua planum a vaſe abeſt, eaque diſtantia in charta annotetur: atque apponatur deinde ſemidiameter vaſis FE a centro ad extimam ſuperficiem, quæ bifariam ſecetur in H. Jam proportio refractionis aquæ, vel quicunque liquor fuerit, habebitur ea quæ eſt EG ad GH, quæ nempe eadem ſemper in ſinibus exiſtet, ut ſuperius expoſui. Accuratius autem radii poſt vitrum colligentur, ſi tantum eos tranſire ſinamus, qui circa medium cylindrum penetrant, lateribus utrinque aliquouſque contectis. Ac demonſtratio quidem hujus in ſequentibus invenietur, propoſ. 13. nec refractiones quæ in vitro hic accidunt quicquam obeſſe, quo minus Cylindrus ABCD velut totus aqueus cenſeatur, patebit ex iis, quæ dicentur propoſ. 16. & 20. vel ex prop 22.

TAB. I. Fig. 4.

Quod ſi vitri aut Cryſtalli refractiones ſimili compendio inquirere libeat, lentem ex ea materia formatam accipe, ſuperficie altera plana, altera convexa, qualis hic eſt lens ABC. Superficiem planam Soli oppone vel lucernæ procul poſitæ, ut radii incidant ad rectos angulos: poſt lentem vero adhibe planum aliquod, ac tantum remove, ut in eo radii coëuntes imaginem Solis aut flammæ quam nitidiſſimam depingant: Eſto in E. Tum diſtantiam hujus imaginis ab lentis convexa ſuperficie metire EB, & quam rationem habet ſemidiameter convexitatis ABC puta DB unà cum inventa longitudine BE, hoc eſt, tota DE ad hanc ipſam BE, eandem ſcito eſſe refractionis vitri, vel cryſtalli propoſitæ. hoc enim demonſtrabitur prop. 9. Lentem vero circa latera aliquatenus texiſſe proderit, ut imaginem lucidi eo nitidiorem referat. Alios modos adjungere his poſſem operoſiores, quibus proportio eadem refractionis ſubtilius colligatur; Sed cum non multum interſit, tam ſcrupuloſe eam definiri, & in diverſi generis vitris aquiſve, ut jam dixi, diverſa aliquantum deprehendatur, operæ pretium non videtur plura de his præcipere. Aquæ tamen pluviæ refractio, ut hoc addam, accurate dimenſa reperta eſt ut 250 ad 187, paulo ſcilicet major ſeſquitertia; idque ex Iridis amplitudine Carteſius ſubtiliter ſane collegit. Similique ratione, adhibita ſphærula vitrea ſolida, inventaque ex obſervatione ſemidiametro iridis in pluvia vitrea, ſi qua talis caderet, grad. 21: 45.; proportionem refractionis vitri inde calculo ſubduximus, cujus ratio in iis, quæ de Pareliis, explicabitur, comperimuſque majorem quam 114 ad 76, ſive quam 3 ad 2; minorem vero quam 115 ad 76, ut ſeſquialteram uſurpare abſque errore liceat. Cæterum non ad hanc magis quam ad aliam quamlibet in ſequentibus theorematis reſpeximus, quæque iis definiemus omnia eo modo ſe habitura ſciendum eſt, quæcunque demum fuerit refractionis proportio.

Tab. I. Fig. 8.

Porro

Porro ex lege refractionum modo explicata tria hæc Theoremata facile deducuntur, quorum in cæteris frequens uſus erit.

Propositio I.

Si fuerit ſuperficies quælibet AB, *terminans diaphanum verſus* C *exiſtens*, *ſitque radii* DA *extrinſecus in illam incidentis refractio* AC, *& producatur* DA *verſus* F, *&* CA *verſus* E. *Et intelligatur deinde diaphanum ita tranſponi, ut eadem ſuperficie* AB *terminetur, ſed exiſtat ad partem ejus contrariam, ubi nempe eſt* E. *Dico jam radii* FA *refractionem fore* AE. Tab. I, Fig. 5.

Sit enim recta HAG, quæ penetret ſuperficiem AB ad angulos rectos in A; ſunt ergo in eodem plano per HG ducto tum DA, tum refractio ejus AC. Quia vero radius DA ad perpendicularem HG exiſtente diaphano verſus G, eodem angulo inclinatur, quo radius FA, exiſtente diaphano verſus H, eſt enim DAF, ex hypotheſi, linea recta, etiam refractiones utriuſque cum ipſa HG angulos æquales conſtituent. Radii autem DA refractio AC facit angulum CAG, ergo huic æqualem angulum efficiet refractio radii FA cum ipſa HA, hoc eſt, æqualem angulo HAE, eſt enim CAE linea recta. Sed & in eodem plano per rectam HG ducto ſunt FA & AE, quum ſint in directum ipſis DA, CA. Ergo patet radii FA refractionem fore ipſam AE, quando diaphanum eſt a parte H. Quod erat dem.

Propositio II.

Tab. I. Fig. 6. *Si fuerit diaphani ſuperficies quælibet* AB, *in quam extrinſecus cadat obliquus radius* DC, *qui refringatur ſecundum* CG; *ſitque recta* ECP *ſecans diaphani ſuperficiem ad angulos rectos, & ſumatur in ea intra diaphanum punctum quodvis* F, *unde ducatur* FG *parallela radio* DC. *Dico hanc occurrere refractioni* CG, *& habere* CG, *ad* GF *rationem eam, quæ eſt refractionis.*

Quia enim propter refractionem angulus FCG minor eſt quam DCE, idem quoque minor erit, quam PFG, ideoque CG, FG neceſſario concurrent. Porro, quia ſecundum refractionum legem ſuperius expoſitam, ſinus anguli DCE ad ſinum anguli FCG rationem habet eam, quæ eſt refractionis. Sinus autem anguli DCE idem eſt qui anguli DCF ſeu CFG. Ergo in triangulo CFG, habebit ſinus anguli CFG ad ſinum anguli FCG rationem refractionis. Quare eandem quoque habebit latus CG ad latus GF. Quia nempe in omni triangulo, latera inter ſe eandem proportionem ſervant, quam ſinus angulorum, quibus illa ſubtenduntur.

Patet autem & converſæ hujus veritas. Nempe FG parallela exiſtente radio DC, rectæque CG occurrente, ſi fuerit CG ad GF ratio eadem, quæ eſt refractionis, tunc CG fore refractionem radii DC.

Propositio III.

Tab. I. Fig. 7. *Si fuerit diaphani ſuperficies quæcunque* AB, *terminans diaphanum verſus* L *exiſtens; radius autem intra diaphanum ſit* DC, *qui in* C *egrediens refringatur in* CH. *Et ducta* ECP, *quæ ſuperficiem ſecet ad angulos*

gulos rectos, ſumatur in ea punctum quodvis L, *unde ducatur* L H *parallela radio* D C. *Dico hanc occurrere refractioni* C H, *atque eſſe* L H *ad* H C *rationem eam, quæ eſt refractionis.*

Quia enim radius D C refractus exit a diaphano, erit angulus P C H major angulo L C D, hoc eſt, angulo C L H. Unde manifeſtum eſt rectas C H, L H concurrere.

Porro autem, quia ſecundum legem refractionis, ſinus anguli P C H ad ſinum anguli L C D ſive C L H proportionem refractionis habet. Sinus autem anguli P C H idem eſt qui ſinus anguli L C H, habebit itaque in triangulo L H C, ſinus anguli L C H ad ſinum anguli C L H proportionem refractionis. Quare eandem quoque habebit latus L H ad latus H C. Quod erat probandum.

Rurſus autem & converſa propoſitionis hujus manifeſta eſt. Nempe ſi L H parallela exiſtente radio D C, rectæque C H occurrente, fuerit L H ad H C ratio ea quæ refractionis, etiam C H fore refractionem radii D C.

Nunc quomodo puncta ea inveniantur, ad quæ radii, poſtquam in ſuperficie aliqua plana, convexa, aut cava refracti fuerint, colliguntur, vel ad quæ diſperſi reſpiciunt, deinceps exponemus; quæ quidem puncta concurſus vel diſperſus vocabimus. Quoniam vero hoc nomine etiam illa puncta deſignabimus, ad quæ tamen radios omnes refractos non accurate pertinere oſtenſum fuerit, id quomodo tunc intelligendum ſit paucis declarandum. Ergo ſi radios parallelos in lentem A B C incidentes omnes poſt refractionem convenire oſtendatur cum axe D B E citra punctum quoddam E, vel omnes ultra idem punctum, verum hoc pacto, ut quo quiſque radius axi propinquior fertur, eo refractus concurrat propius ad punctum E, idque ad diſtantiam tandem quavis data minorem, tum quoque punctum E concurſus punctum dicetur. Similiter- Tab. I. Fig. 8.

Tab. I. Fig. 9. militerque in lente cava KFG, ſi parallelos radios a parte H venientes poſt refractionem ita ſpargi oſtenderimus, ut retrorſum producti conveniant cum axe PH omnes citra punctum quoddam H, vel omnes ultra, iiſdemque etiam conditionibus quas in convexa poſuimus, tum punctum H dicetur punctum diſperſus. Quin etiam hæc puncta plerumque ſic accipiemus, tanquam concurſum aut diſperſum radiorum exacte determinarent; medias videlicet lentium aut ſuperficierum partes reſpicientes, quarum ſatis exigua ſit proportio ad convexitatis vel cavitatis diametros, ut quantum ad ſenſum oculorum attinet, perfectum videatur, quod geometrica ratione eſt imperfectum. Ita enim ſeſe habere lentium latitudines certum eſt, tum earum, quibus in tenebris picturam repræſentari videmus rerum, quæ foris a Sole illuminantur, tum quibus perſpicilla ſeu teleſcopia conſtant; neque enim alioqui tam inſignes earum effectus cernerentur.

Propositio IV.

Problema 1.

Data diaphani ſuperficie plana, & puncto, ad quod radii tendentes in ſuperficiem extrinſecus impingant; Invenire punctum concurſus refractorum.

Tab. I. Fig. 10. Sit diaphani ſuperficies plana AE, hoc eſt, in qua eſt linea recta AE, ſitque datum punctum D, ad quod tendentes radii ut LF, OE, ſuperficiei dictæ extrinſecus occurrant. Sit autem DA eidem ad angulos rectos, omneſque lineæ, quæ in ſchemate apparent, intelligantur in plano per AD ducto. Producatur AD & habeat TA ad AD rationem eam quæ eſt refractionis. Dico T fore punctum concurſus quæſitum. Et primo quidem oſtendam nullius radii refractionem concurrere cum AD citra

citra punctum T. Sit enim F C refractio radii L F & perficiatur parallelogrammum C D F P. Erit igitur F P ſuperficiei A E ad angulos rectos, & P C parallela radio LF, ejuſque refractioni occurrens in C. Quare F C ad C P habebit proportionem quæ eſt refractionis *. Eſt autem F D æqualis C P. Ergo etiam C F ad F D proportionem refractionis habebit, hoc eſt, eam, quam T A ad A D. Ergo & quadratum C F ad quadr. D F, ut quadr. T A ad quadr. A D. Ergo ratio quadrati C F ad quadr. D F eſt majoris ad minus. Quare auferendo utrinque quadratum A F, erit ratio quadrati C A ad quadr. A D major quam quadrati C F ad quadr. C F, hoc eſt, quam quadrati T A ad quadr. A D. Itaque quadratum C A majus erit quadrato T A, & C A linea major quam T A : unde apparet refractionem F C convenire cum axe A D ultra punctum T.

* Prop. II.

Secundo loco oſtendendum eſt radiorum rectæ A D propinquiorum refractiones propius concurrere ad punctum T quam remotiorum. Sit enim radius O E remotior radio L F, & refractio ejus ſit E G, & jungatur E C. Quadratum igitur C E excedit quadr. E D, quantum C F quadratum excedit quadr. D F, quia utrorumque differentia eſt æqualis quadrato C D & duplo rectangulo C D A †. Eſt autem quadratum C E majus quadrato C F. Ergo minor eſt ratio quadrati C E ad quadr. E D, quam quadrati C F ad quadratum F D. Quare & lineæ C E ad E D minor ratio quam C F ad F D. Ut autem C F ad F D, ita eſt G E ad E D. Nam ſicut de lineis, C F, F D oſtenſum fuit, oſtendi etiam poteſt de lineis G E, E D, habere eas rationem quæ eſt refractionis, quia ſcilicet E G ſtatuitur eſſe refractio radii O E tendentis ad D. Igitur minor erit ratio C E ad E D quam G E ad E D: ac proinde G E major quam C E. Unde facile perſpicitur A G quoque majorem eſſe quam C A ; adeoque concurſum refracti radii O E longius abeſſe a puncto T quam radii L F.

† Prop. XII. l. 2. Eucl.

Denique oſtendere oportet aliquos radios refractos convenire cum A D producta in puncto quod dato quolibet intervallo minus diſtet a puncto T. Sumatur punctum C, dato intervallo propius ſitum puncto T & ulterius diſtans ab A, quam ipſum T; & ſicut differentia quadratorum T A, A D ad quadr. A D, ita ſit differentia quadratorum C A, A D ad quadr. D S. Ergo quia differentia prior minor eſt poſteriore, erit & quadratum A D minus quam quadratum D S: Et linea D A minor quam D S. Ideoque ſi centro D intervallo D S, circumferentia deſcribatur, ea ſecabit rectam A F. Secet in F, & jungatur C F, itemque D F, quæ producatur verſus L. Quoniam igitur differentia quadratorum T A, A D eſt ad quadr. A D ut differentia quadratorum C A, A D ad quadratum D S vel D F; erit, componendo, quadratum T A ad quadr. A D ut differentia quadratorum C A, A D una cum quadrato D F ad quadratum D F. Eſt autem differentia quadratorum C A, A D, hoc eſt, quadr. C D cum duplo rectangulo C D A, addita quadrato D F æqualis quadrato C F. Ergo ſicut quadr. T A ad quadr. A D, ita quadr. C F ad quadr. D F. Et linea C F ad D F ut T A ad A D. Eſt autem ratio T A ad A D ea quæ refractionis. Ergo in triangulo C F D habet latus C F ad F D proportionem refractionis; ac proinde eandem quoque habebit ſinus anguli C D F vel A D F, ad ſinum anguli F C D. Eſt autem angulus A D F, quo radius incidens L F inclinatur ad perpendicularem, & angulus F C D, quo ad eandem perpendicularem inclinatur linea F C. Ergo conſtat radii L F refractionem eſſe F C. Atque ita oſtenſum eſt alicujus radii refractionem quolibet intervallo propius concurrere ad punctum T cum axe A D. Erit igitur propter hæc T punctum concurſus quæſitum.

P r o-

Propositio V.

Problema 2.

Data diaphani ſuperficie plana, & puncto, a quo venientes radii in illam extrinſecus incidant, invenire punctum diſperſus refractorum.

Diaphani ſuperficies plana ſit AE & punctum datum D, ex quo radii in diaphanum procedant ut DF. Sit linea DA ſuperficiei AE ad rectos angulos, & producatur, habeatque TA ad AD proportionem refractionis. Dico T fore punctum diſperſus quæſitum: Hoc eſt radiorum ex D procedentium refractiones, ſicut FN eſt radii DF, intra diaphanum ita ferri, quaſi venirent ex puncto T. Tab. I. Fig. 11.

Producatur enim DF verſus L, & jungatur FT. Igitur ſi ſuperficiem AE, contra quam hîc poſitum eſt, terminare imaginemur diaphanum verſus D exiſtens, manifeſtum eſt per præced. prop. radiorum ad D tendentium refractiones concurrere ad punctum T: ita ut radii LF refractio futura ſit FT. Eſt autem FD in directum ipſi LF, & FN in directum ipſi TF. Ergo & FN erit hic refractio radii DF *. Itaque radius DF refractus ita fertur quaſi ex puncto T manaret, ideoque erit T punctum diſperſus quæſitum. Patet autem ejuſmodi eſſe, ut radiorum refractiones retro productæ ultra ipſum T, cum recta AD conveniant. *Prop. 1.

Propositio VI.

Problema 3.

Data diaphani plana ſuperficie & puncto ex quo manantes radii intrinſecus in eam deferantur; invenire punctum diſperſus refractorum.

Sit plana ſuperficies diaphani AE & punctum T datum, ex quo radii ad ſuperficiem AE ferantur ut TF. Tab. I. Fig. 12.

Sit TA recta ad ſuperficiem AE perpendicularis, eaque dividatur in D, ita ut TA ad DA habeat proportionem refractionis. Dico D fore punctum diſperſus quæſitum: ut nempe FL refractio radii TF feratur quaſi ex puncto D procederet. Jungatur enim FD. Si igitur LF eſſet radius incidens in ſuperficiem AE, tendenſque ad punctum D, ejus refractio foret FT, ut ex prop. 4. eſt manifeſtum; quia nimirum TA ad DA eſt proportio refractionis. Igitur viciſſim radii TF refractio erit FL; hæc enim refractionum lex eſt, ut ſupra fuit expoſitum. Igitur D eſt punctum diſperſus quæſitum. Erit autem ejuſmodi ut radiorum refractiones omnes citra D concurrant, hoc eſt, ut concurſus earum minus diſtet a ſuperficie A quam punctum D. Quod facile probari poteſt ex iis quæ habentur prop. IV.

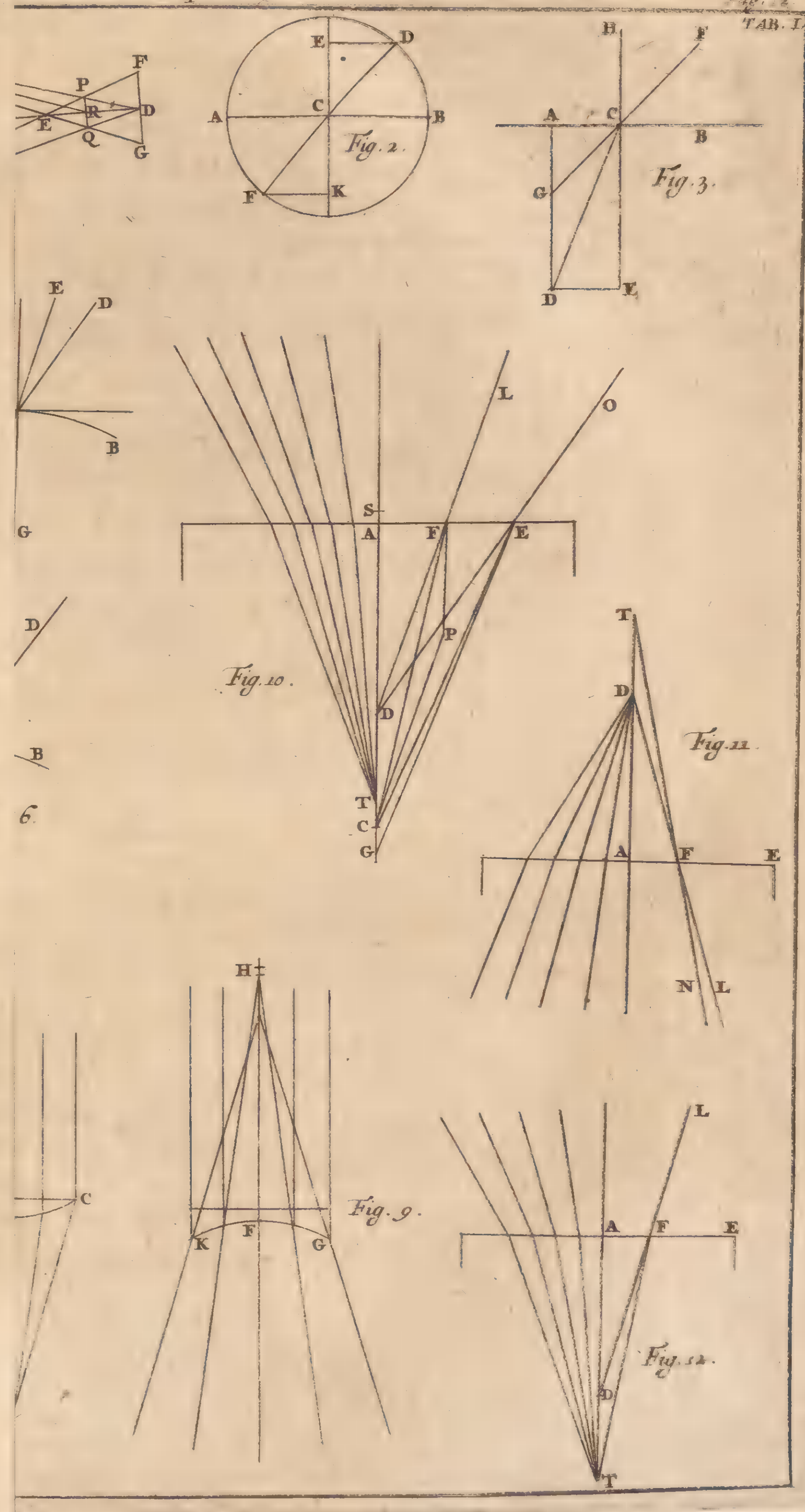
Propositio VII.

Problema 4.

Data diaphani ſuperficie plana, & puncto extra diaphanum ad quod tendentes radii intrinſecus in ſuperficiem ejus incidant, invenire punctum concurſus refractorum.

Tab. II. Fig. I. Superficies diaphani plana ſit AE & punctum extra datum T, quo tendentes radii ut LF, occurrant ſuperficiei AE intrinſecus. Sit TA ſuperficiei ad angulos rectos, eaque ſecetur in D, ut TA ad AD ſit proportio refractionis. Dico D eſſe punctum concurſus quæſitum. Conſtat enim ex prop. V. Si DF ſit radius incidens, ejus refractionem fore FL, quoniam FL eſt in directum ipſi TF, ratio autem TA ad AD eadem quæ refractionis. Igitur viciſſim hic erit FD refractio radii LF: ac proinde D punctum concurſus radiorum tendentium ad T. Nullus autem radius concurret ultra D.

Lemma


TAB. I.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 9.
Fig. 12.
6.

Lemma 1.

Sit triangulum BAC angulum A obtuſum habens, & ducatur recta ex B quæ occurrat AC, verſus C productæ in D. Dico minorem eſſe rationem BD ad DA quam BC ad CA. Sit enim ducta CE parallela DB. Quoniam ergo angulus A obtuſus eſt; angulus autem BEC æqualis utriſque ſimul, angulo A & ECA: Erit & BEC angulus obtuſus, ideoque in triangulo BEC latus BC majus latere EC. Quare minor ratio erit EC ad CA quam BC ad CA. ut autem EC ad CA ita BD ad DA. Ergo minor quoque ratio BD ad DA quam BC ad CA. Quod erat propoſitum. Tab. II. Fig. 2.

Lemma 2.

Contra autem, poſito, ut ante, triangulo BAC, angulum A obtuſum habente, ſi ducatur BD eidem obtuſo angulo ſubtenſa, occurrenſque rectæ per AC, ita ut minor ſit ratio BD ad DA, quam BC ad CA. Dico DA majorem eſſe quam CA. Si enim DA minor dicatur quam CA, erit per præced. lemma major ratio BD ad DA quam BC ad CA. Ponitur autem minor eſſe. Ergo DA non erit minor quam CA, ſed nec æqualis poteſt eſſe. Ergo ſupereſt, ut DA ſit major quam CA. quod erat propoſitum.

Lemma 3.

Sit triangulum ABC angulum B obtuſum habens, & ducatur BD ex B quæ productæ AC verſus C occurrat in D. Dico minorem fore rationem AD ad DB quam AC ad CB. Sit enim CE parallela DB. Quoniam ergo trianguli CBE obtuſus eſt angulus B, Erit latus CE majus latere CB: ac proinde minor ratio AC ad CE quam AC ad CB. Ut autem AC ad CE ita eſt AD ad DB. Ergo minor quoque ratio AD ad DB quam AC ad CB. quod erat propoſitum. Tab. II. Fig. 3.

Lemma 4.

Sit denuo triangulum ABC angulo B obtuſo, & ducatur BD occurrens rectæ per AC in D, ita ut & angulus ABD exiſtat obtuſus, ſitque ratio AD ad DB minor ratione AC ad CB. Dico AD majorem eſſe quam AC. Si enim AD minor dicatur quam AC, ſequetur ex lemmate præcedenti, rationem AC ad CB minorem eſſe quam AD ad DB, hic autem ratio AD ad DB minor ponitur quam AC ad CB. Non eſt igitur AD minor quam AC. Sed nec æqualis, cum BC, BD diverſæ ponantur. Ergo major eſt AD quam AC, quod erat propoſitum.

Lemma 5.

Tab II. Fig. 4. Eſto linea recta AB diviſa in C, ut AC ſit major quam CB. Et producatur verſus B, habeatque AD ad DB rationem eandem quam AC ad CB: Et deſcribatur circa CD diametrum circulus CED. Si ad quodvis circumferentiæ punctum ut E ducantur rectæ AE, BE. Dico eſſe AE ad EB ut AC ad CB. Demonſtratum hoc eſt ab *Eutocio in comm. ad Conica Apoll.* Et melius a *Clariſſ. Viro Fr. Schoenio, in locis planis Apollonii ab ipſo reſtitutis.* Quod ſi vero extra deſcriptum circulum ſumatur punctum ut H, ad quod rectæ inflectantur a punctis A, B; Dico AH ad HB minorem rationem habere quam AC ad CB. Ducatur enim AK ad interſectionem circumferentiæ & rectæ BH. Eſt igitur AK ad KB, ut AC ad CB: ideoque AK major quam KB. Quare addita utrique KH, erit AKH ad HB minor ratio quam AK ad KB. Sed HA minor eſt quam HKA vel ipſi æqualis, ſi H ſumtum fuerit in linea CD verſus D prolongata. Ergo & AH ad HB minorem rationem habebit, quam AK ad KB, hoc eſt, quam AC ad CB. quod erat propoſitum.

Rurſus ſi intra circulum ſumatur punctum ut L, ad quod rectæ inflectantur ex punctis A & B. Dico AL ad LB rationem majorem eſſe quam AC ad CB. Producta enim

enim B L occurrat circumferentiæ in M. & jungatur A M. Eſt ergo A M ad M B ut A C ad C B, ideoque A M major quam M B. Sed A L M major eſt quam A M, vel eidem æqualis, ſi punctum L ſumtum fuerit in linea B D. Ergo A L M quoque major erit quam M B. Quare ſi utrimque auferatur L M, fiet major ratio reliquæ A L ad reliquam L B quam A L M ad M B. Ratio autem A L M ad M B major eſt, vel eadem cum ratione A M ad M B. Ergo ratio A L ad L B major utique erit quam A M ad M B. quare conſtat propoſitum.

Patet autem & converſum utriuſque horum. Nempe ſi A H ad H B minorem rationem habeat quam A C ad C B, punctum H cadere extra circulum C E D dicto modo deſcriptum. Si autem A L ad L B majorem habeat rationem quam A C ad C B, punctum L intra eundem circulum cadere.

Propositio VIII.

Problema 5.

Data Diaphani ſuperficie ſphærica convexa, in quam radii paralleli extrinſecus incidant, invenire punctum concurſus refractorum.

Esto ſuperficies convexa diaphani A B P cujus centrum C, in quam incidant radii ut O B, N P paralleli rectæ A C, quæ per centrum ducta eſt. Producatur A C uſque in Q, ut A Q ad Q C habeat rationem eam quæ eſt refractionis. Dico Q fore punctum concurſus quæſitum. Tab. II. Fig. 5.

Ac primo quidem demonſtrabitur nullius radii refractionem cum producta A C occurrere ultra punctum Q. Sit enim radii O B refractio B L (quæ neceſſario conveniet cum A C ultra punctum C) & jungatur C B. Quia igitur

C B

CB in ſuperficiem AB perpendicularis eſt, BL autem refractio radii OB, cui radio parallela eſt CL, habebit BL ad LC rationem eam quæ eſt refractionis *, hoc eſt eam, quam AQ ad QC. Sed AL major eſt quam BL, quoniam illa per centrum circuli AB ducta eſt. Itaque major ratio AL ad LC quam BL ad LC, hoc eſt, quam AQ ad QC. Et dividendo, major proinde ratio AC ad CL quam AC ad CQ: ideoque CL minor quam CQ. Ergo refractio radii OB non concurrit cum AC ultra punctum Q.

* Prop. 11.

Secundo loco oſtendetur radiorum axi AC propiorum refractiones propius accedere ad punctum Q quam remotiorum. Sit enim radius OB dictæ AC propior quam radius NP, atque hujus refractio ſit PK. Et jungantur KP, KB Eâdem igitur ratione qua modò, & BL ad LC & PK ad KC habebit proportionem refractionis †. Eſt autem BK major quam PK. Ergo major ratio BK ad KC quam PK ad KC, hoc eſt, quam BL ad LC. Angulus autem BCL neceſſario eſt obtuſus, cui utraque linearum BL, BK ſubtenditur. Ergo major erit CL quam CK ‡. Atque ita apparet, refractionem radii OB propius concurrere ad punctum Q quam refractionem radii NP.

† Prop. 11.

‡ Lem. 2.

Denique oſtendemus aliquos radios refractos convenire cum AC ad punctum quolibet dato intervallo minus diſtans a puncto Q. Sit enim primò quilibet radius parallelus incidens NP, & refractio ejus PK, & ſumatur inter K & Q, punctum L dato intervallo propinquius puncto Q. quam autem rationem habet CQ ad QA, eam habeat CL ad LT, & jungatur PL. Quoniam igitur angulus PCL obtuſus eſt, & CL major quam CK, erit minor ratio PL ad LC quam PK ad KC *. Eſt autem ratio PK ad KC eadem quæ refractionis, quia PK ponitur eſſe refractio radii NP. Ergo cum ratio PL ad LC ſit minor quam PK ad KC, eadem quoque minor erit ratione TL ad LC, nam per conſtr. eſt TL ad LC ut

* Lem. 1.

AQ

AQ ad QC, hoc eſt, ut PK ad KC. Igitur PL minor quam TL. Sed TL minor eſt quam AL; eſt enim CT minor quam CA, quia CL minor quam CQ. Ergo circumferentia deſcripta centro L radio LT neceſſe eſt ut ſecet circumferentiam AP inter A & P. Secet ergo in B & ducatur BO parallela AC, & jungantur BL, CB. Quia igitur CB ad ſuperficiem AB perpendicularis eſt, habetque BL, hoc eſt TL, ad LC proportionem refractionis, erit BL refractio radii OB, rectæ AC paralleli. Itaque patet & hujus radii, & omnium qui ab axe AC minus diſtabunt refractiones concurrere ad puncta dato intervallo minus remota a puncto Q. Et ob hæc quidem erit Q punctum concurſus radiorum refractorum, quod invenire oportebat.

Propositio IX.

Problema 6.

Data diaphani ſuperficie ſphærica convexa cui paralleli radii intrinſecus occurrant, invenire punctum concurſus refractorum.

Sit ſuperficies convexa AB, centro C, per quod ducta ſit CA radiis incidentibus parallela. Producatur ea ad R, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Dico R eſſe punctum concurſus quæſitum. Tab. II. Fig. 6.

Primum ergo demonſtrabimus nullius refractionem radii convenire cum producta CA ultra punctum R. Sit enim radii OB ipſi CA paralleli refractio BL, & jungatur BC. Ergo cum CB ad ſuperficiem AB perpendicularis ſit, & CL parallela radio OB, habebit CL ad LB proportionem refractionis*, hoc eſt, eam quam CR ad RA. Sed LA minor eſt quam LB. Igitur CL ad LA majorem habebit rationem quam ad LB, hoc eſt, quam

* Prop. III.

C R ad R A: Et dividendo C A ad A L majorem quam C A ad A R. Ergo A L minor quam A R. patetque radii O B refractionem concurrere citra punctum R.

Porro oſtendendum eſt radiorum rectæ C A propinquiorum refractiones propius pervenire ad punctum R. Sit itaque radius O B quam N P propior C A, & refractio radii N P ſit P K; & jungantur B K, C P. Habebit igitur

Prop. III. C K ad K P refractionis proportionem, æque ac C L ad L B quia autem K B minor eſt quam K P, erit major ratio C K ad K B quam C K ad K P, hoc eſt, quam C L ad L B. Suntque anguli C B L, C B K uterque neceſſario obtuſi. † Ergo major erit C L quam C K, ex quo propoſitum patet.

†Lem. 4.

Denique eſt oſtendendum, alicujus radii refractionem occurrere C A productæ in puncto, quod dato quolibet propius ſit puncto R. Sit aliquis e parallelis radiis N P, cujus refractio P K: Et ſumatur punctum L inter K & R, dato intervallo propius puncto R, & habeat C L ad L T rationem refractionis, eandem nempe quam C R ad R A. Quia ergo A L minor eſt quam A R, erit C A ad A L ratio major quam C A ad A R. Et componendo major ratio C L ad L A quam C R ad R A, hoc eſt quam C L ad L T; quare L T major erit quam L A. Jungatur L P. Itaque quia angulus C P K eſt obtuſus, & ponitur C L major quam C K, erit quoque obtuſus angulus C P L: ac proinde major ratio C K ad K P quam C L ad L P‡. Ut autem C K ad K P, ita eſt C L ad L T, nam utraque eſt ratio eadem quæ refractionis. Ergo major ratio C L ad L T quam C L ad L P, ac proinde L T minor quam L P. Sed eadem L T major eſt oſtenſa quam L A. Ergo ſi centro L, ſemidiametro L T circumferentia deſcribatur, ea ſecabit circumferentiam A P inter A & P. Secet in B puncto, & ſit B O parallela A C, & jungantur L B, B C. Quia ergo C L ad L T, hoc eſt ad L B, habet proportionem refractionis, eſtque C B ad ſuper-

‡Lem. 3.

ſuperficiem A B perpendicularis, erit B L refractio radii O B*. Quare oſtenſum eſt alicujus radii rectæ C A paralleli refractionem concurrere cum eadem A C producta, in puncto quod dato quolibet intervallo minus abſit a puncto R. Atque ob hæc erit R punctum concurſus quæſitum. *Prop. III.

Propositio X.

Data diaphani ſuperficie ſphærica cava in quam radii paralleli extrinſecus incidant, invenire punctum diſperſus refractorum.

SIt ſuperficies cava A B ex ſphæra cujus centrum C, incidantque in eam radii rectæ C A paralleli ut O B. Producatur A C, & habeat A Q ad Q C proportionem eam quæ eſt refractionis. Dico Q eſſe punctum diſperſus quæſitum: hoc eſt, radios ita refractione inflecti, ut pergant tanquam ex puncto Q promanantes. Tab. II. Fig. 7.

Jungatur enim Q B & producatur verſus L, & radius O B verſus N. Itaque ſicut ſuperficie A B convexa exiſtente, id eſt, diaphano ad partem ubi eſt C collocato, radii N B refractio eſt B Q*: ita hîc ubi diaphanum ad contrariam partem ſitum eſt, erit radii O B refractio B L†, quia B O eſt in directum ipſi N B, & B L ipſi B Q. Sciendum tamen refractionem B L atque omnes alias retro productas non ad ipſum punctum Q concurrere, ſed paulo citra, quoniam etiam radii N B in convexam ſuperficiem incidentis refractio citra punctum Q cum axe concurrit‡. Verum exiguum diſcrimen pro nullo hîc habemus, ſicut ſupra jam admonui; quia videlicet illos radios præcipuè reſpicimus qui proximi ſunt axi A C. *Prop. VIII. †Prop. I. ‡Prop. VIII.

Manifeſtum autem eſt ex propoſitione hac, radios tendentes ad punctum Q, ut L B, incidenteſque intrinſecus in ſuperficiem cavam A B, refractione facta, evadere parallelos axi A C. Nam ſi radii O B refractio eſt B L, erit & radii L B refractio B O.

PROPOSITIO XI.

Data diaphani ſuperficie ſphærica cava, in quam radii paralleli intrinſecus incidant, invenire punctum diſperſus refractorum.

Tab. II. Fig. 8. AD ſuperficiem cavam A B cujus centrum C, accidant radii paralleli rectæ A C, ut O B. Producatur C A, & habeat C R ad R A proportionem refractionis. Dico R eſſe punctum diſperſus quæſitum.

Jungatur enim R B & producatur verſus L, itemque O B verſus N. Si igitur ſuperficies A B eſſet convexa, radius N B refringeretur in B R*. Itaque eâdem cava exiſtente, erit quoque radii O B refractio B L†, quandoquidem O B N, R B L ſunt lineæ rectæ.

*Prop. 1 x.
†Prop. 1.

Hinc vero manifeſtum eſt radios ad R tendentes ut L B ita refringi ad eandem cavam ſuperficiem A B, ut poſtea fiant rectæ A C paralleli. Nempe quia B L eſt refractio radii O B, etiam B O erit refractio radii L B.

DEFINITIO.

Pertinere ad punctum illud radii vel radiorum refractiones dicuntur, ad quod tendunt, vel a quo exeunt, vel ad quod eo modo ſe habent, ac ſi inde prodiiſſent.

PROPOSITIO XII.

Data diaphani ſphærica ſuperficie convexa, vel cava, & puncto, ad quod pertinentes radii ſuperficiei dictæ occurrant; ſi tribus ab illo puncto diſtantiis quarta proportionalis conſtituatur in axe, qui per centrum ſuperficiei & punctum ipſum tranſit; quarum diſtantiarum prima ſit a puncto dato ad illud quo pertinerent refra-

refractiones axi parallelorum a contraria parte advenientium; ſecunda ad ſuperficiem refringentem; tertia ad centrum illius; terminus quartæ diſtantiæ erit punctum quo pertinebunt radii refracti. Hæc autem quarta diſtantia in eam dati puncti partem ſumenda eſt, ut vel omnes eodem verſus habeantur, vel binæ utrimque.

HOc Theorema in partes octo diſtribuemus, nam ſuperficies ſphærica vel convexa eſt, vel cava; & utrique vel extrinſecus, vel intrinſecus radii occurrunt; & vel a dato, vel ad datum punctum tendentes. Partes vero pleræque ſuos caſus habebunt.

P A R S I.

Cum ſuperficies eſt convexa, & a puncto venientes radii extrinſecus in eam deferuntur.

Eſto diaphani ſuperficies ſphærica convexa A B, cujus centrum C, & punctum D a quo venientes radii in illam deferantur ut D B; agatur recta per D C, inque ea ſignetur punctum R, ita ut C R ad R A habeat proportionem refractionis. Eſt igitur R punctum concurſus radiorum parallelorum a contraria parte venientium*. Punctum autem D aut magis aut minus a convexo diſtabit quam punctum R; nam ſi in ipſum R incidit, radii ab illo venientes pro parallelis habentur, ut ex prop. 1x manifeſtum eſt; quia nempe, uti diximus, paralleli ex parte C venientes a ſuperficie A B detorquentur ad punctum R. Primò igitur ſit punctum D remotius quam R, & quandoquidem D R eſt prima dictarum diſtantiarum, D A ſecunda, D C tertia, fiat ut D R ad D A, ita D C ad D S: Dico S fore punctum concurſus radiorum ex D procedentium. Nam primùm quidem, nullius radii refractionem cum axe A C ultra punctum S convenire, ſic oſtendemus: Sit radii cujusvis D B refractio B L, & ducatur

Tab. II. Fig. 9.

* Prop. 1x.

C M parallela D B, & producatur verſus C quouſque occurrat ſuperficiei A B in F. Cum igitur F M per centrum convexi ducta ſit parallela radio D B, ſitque refractio hujus B M, conſtat F M minorem fore quam C R*, & C M proinde minorem quam A R. D B autem major eſt quam D A. Itaque major ratio D B ad C M, hoc eſt, D L ad L C, quam D A ad A R; ideoque per converſionem rationis minor ratio L D ad D C quam A D ad D R, hoc eſt, quam S D ad D C†. Ergo D L minor erit quam D S. Patet igitur radii D B refractionem B L convenire cum axe A C citra punctum S, ac proinde reliquorum quoque omnium.

* Prop. VIII.

† Ex hyp.

Deinceps demonſtrabimus radios eos qui minus diſtant ab axe A C, refractos propius accedere ad punctum S. Eſto radius D P remotior quam D B, & refractio illius ſit P K. Ducatur C N parallela D P, & occurrat ſuperficiei in E. Angulus itaque A D P, hoc eſt A C E major eſt quam A D B ſive A C F; ſed & circumferentiæ pars A P major eſt quam A B; itaque arcus E P major omnino erit arcu F B. Quare conſtat concurſum radii D P refracti cum recta E C N propiorem eſſe centro C quam concurſum radii D B refracti cum recta F M‡. Ergo C N minor quam C M. Sed D P major eſt quam D B. Ergo major ratio D P ad C N, hoc eſt, D K ad K C quam D B ad C M, hoc eſt, quam D L ad L C. Et dividendo, major D C ad C K, quam D C ad C L. Ergo C K minor quam C L, quod oſtendere oportebat.

‡ Prop. VIII

Denique aliquos radios refractos cum axe A C concurrere ad puncta quolibet intervallo propiora puncto S hinc erit manifeſtum. Etenim quia D L eſt ad L C ut D B ad C M, poteſtque fieri appropinquando radium D B ad axem D A C, ut differentia inter D B & D A ſit qualibet data minor, ut & ea quæ eſt inter C M & A R; nam exceſſus A R ſuper C M eo minor erit quo minor fuerit arcus B F; apparet fieri poſſe ut ratio D B ad C M, hoc

eſt

eſt, D L ad L C quamlibet proxime eadem evadat quæ D A ad A R; ac proinde per converſionem rationis, ratio L D ad D C quamlibet proxime eadem quæ A D ad D R, hoc eſt, quæ S D ad D C. Atque ita D L proxime æqualis D S. hoc eſt, ut punctum L ubi radius D B convenit cum axe A C quamlibet propinquum fiat puncto S. Propter hæc igitur erit S punctum concurſus radiorum ex D manantium.

Eſto autem nunc punctum D inter A & R datum; & fiat rurſus ut D R ad D A ita D C ad D S; accipiatur autem D S non verſus C, ſed verſus R. Dico radios ex puncto D in ſuperficiem A B incidentes poſt refractionem ita inflecti quaſi venirent ex puncto S, ſive S fore punctum diſperſus radiorum refractorum. TAB. II. Fig. 10.

Etenim primo oſtendemus omnes dictas refractiones retro productas concurrere longius ab A quam ſit punctum S. Sit radius incidens D B, ejusque refractio B M, quæ producta retro recurrat axi A C in L. oportet autem D B minorem eſſe duabus tertiis D C, ut refractio B M retro producta conveniat cum axe A C, nam alioqui vel parallela illi fieret, vel occurreret prorſum producta; ut manifeſtum eſt ex demonſtratis prop. IX. Ducta igitur C M parallela D B, erit rurſus, ſicut in caſu præcedenti, C M minor quam A R; at D B major quam D A; ideoque major ratio D B ad C M, hoc eſt, D L ad L C, quam D A ad A R; Et invertendo minor C L ad L D quam R A ad A D; & dividendo minor C D ad D L quam R D ad D A, hoc eſt, quam C D ad D S. Quare D L major quam D S. ideoque occurſus L ulterius diſtat ab A quam punctum S. Sumto autem puncto D valde propinquo ipſi R poſſet fieri D B major quam C M, & ſic refractio radiorum quorundam ab axe remotiorum concurrere ſimul cum axe ultra punctum C.

Porro quod radiorum axi A C propiorum refractiones retro productæ propius concurrant ad punctum S, demon-

monſtratur quemadmodum in caſu præcedenti; niſi quod hîc, ubi oſtenderimus majorem eſſe rationem DK ad KC quam DL ad CL, inde ſequatur, invertendo & dividendo, rationem CD ad DK minorem eſſe quam CD ad DL, unde DK major quam DL.

Denique aliquorum radiorum refractiones quolibet intervallo propius concurrere ad punctum S eodem quoque modo oſtenditur atque in caſu priori. Erit igitur S punctum diſperſus radiorum ex D promanantium.

PARS II.

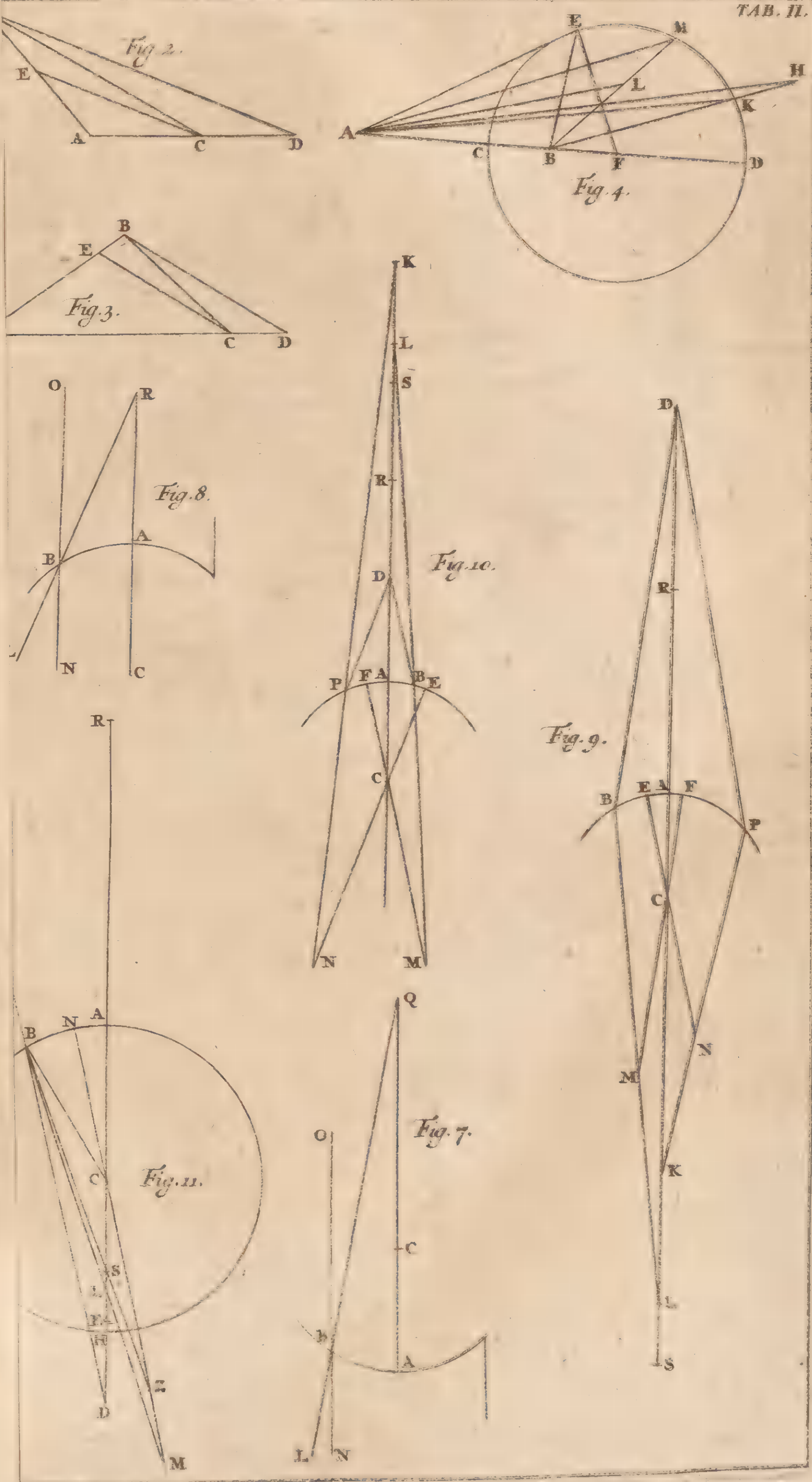
Cum ſuperficies convexa eſt, & ad punctum tendentes radii extrinſecus illi occurrunt.

Tab.III. Fig. 1. Eſto data convexa diaphani ſuperficies AB, & punctum D, quo tendentes radii ut FB, GP, exterius incidant in dictam ſuperficiem. Centrum autem convexitatis ſit C, per quod ducta ſit recta DCA. Producatur DA, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Erit ergo R concurſus parallelorum a contraria parte venientium.

Deinde tribus hiſce DR, DA, DC, inveniatur quarta proportionalis DS. Dico punctum S eſſe quo pertinent radii refracti ad D tendentes.

Et conſtructio quidem univerſalis eſt ad omnes caſus pertinens; in demonſtratione autem triplex ſpectanda eſt differentia. Nam DC ad radium CH vel majorem rationem habet, quam ſit refractionis ratio, vel minorem, vel eandem. Atque hoc ultimo caſu animadverſione dignum eſt radios omnes perfectè coire ad punctum unum S. Ut jam olim adverteram cum ovalem quandam ex iis quas Carteſius excogitaverat ad colligendos radios uno caſu circulum fieri admonui; quod ſuis in Carteſii geometriam commentariis Franc. Schotenius inſeruit.

Ut autem tres quos dixi caſus ordine perſequamur: ſit primo


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

primo punctum D ita poſitum, ut major ſit ratio DC ad CH, ratione refractionis, hoc eſt, quam CR habet ad RA. Sitque S punctum repertum eo modo quo diximus. Radius autem quilibet ut FB tendens ad punctum D, refractus conveniat cum axe AC in L. Oſtendam igitur primo punctum L cadere citra S. Jungatur BS, & producatur, ut & BL, & occurrat utraque rectæ CMZ radio FBD parallelæ, nempe BS in Z, BL in M. Sicut autem DA ad AS, ita ſit DE ad ES.

Quia ergo ratio DC ad CH ſive ad CA major ponitur quam CR ad RA; & permutando major erit DC ad CR quam CA ad AR. Et componendo DR ad CR major quam CR ad RA. Quare reliquæ DC ad reliquam AC major ratio quam DR ad RC*. Ut autem DR ad RC ita eſt DA ad AS. nam quia ut DR ad DA ita DC ad DS, erit permutando & per converſionem rationis DR ad RC ut DA ad AS. Itaque ratio DC ad CA major quoque quam DA ad AS. Ut autem DA ad AS ita DE ad ES, ideoque duæ ſimul DA, DE ad duas AS, SE, hoc eſt ad AE, ut DA ad AS. Igitur major ratio DC ad CA, ſive ad CH, quam ADE ad AE: Et dividendo major ratio DH ad HC quam duplæ DE ad EA. Et ſumtis conſequentium duplis, major DH ad HA, quam duplæ DE ad duplam EA, hoc eſt, quam DE ad EA. Itaque punctum E cadit extra circulum ABH, ideoque ſi circa EA diametrum circulus deſcribatur, is intra ſe complectetur punctum B. Eſt autem DE ad ES ut DA ad AS. Itaque major erit ratio DB ad BS quam DA ad AS†. Ut autem DB ad BS, ita eſt CZ ad ZS, & ut DA ad AS, ita DR ad RC, fuit enim hoc antea oſtenſum. Major itaque erit ratio CZ ad ZS quam DR ad RC. Componitur autem ratio DR ad RC ex rationibus DR ad RA & RA ad RC, quarum DR ad RA eſt eadem quæ DC ad CS, quia fecimus ut DR ad DA ita DC

* 33. V. Elem.

† Lem. 5.

ad D S.Ergo ratio C Z ad Z S major quam quæ componitur ex rationibus D C ad C S & R A ad R C. Ratio autem C Z ad Z S componitur ex rationibus C Z ad Z B & Z B ad Z S. Ergo quæ ex duabus hiſce componitur ratio major erit compoſita ex rationibus D C ad C S & R A ad R C. quare ablatis utrinque rationibus D C ad C S & R A ad R C. quare ablatis utrinque rationibus æqualibus, hinc D C ad C S, inde B Z ad Z S, major adhuc erit ratio C Z ad Z B quam R A ad R C. Et invertendo ratio B Z ad Z C minor quam C R ad R A. Sicut autem C R ad R A, quæ eſt ratio refractionis, ita eſt B M ad M C*, quoniam B M eſt refractio radii F B, cui parallela ducta eſt C M. Igitur minor eſt ratio B Z ad Z C quam B M ad M C. Angulus autem B C Z, quoniam æqualis eſt angulo F B C, neceſſario eſt obtuſus; eique utraque linearum B M, B Z ſubtenſa eſt. Ergo C M minor erit quam C Z†, & angulus proinde C B M minor angulo C B Z. Quare & C L minor quam C S. Itaque apparet omnium radiorum ad D tendentium refractiones cum axe A C convenire citra punctum S.

*Prop. 11.

†Lem. 2.

Nunc porro oſtendemus refractiones radiorum axi A C propinquiorum concurrere propius ad punctum S, idque ad intervallum minus quolibet dato. Sit enim radius aliquis G P tendens ad D, inque ſuperficiem A B incidens, qui refringatur in P K. Eſt igitur concurſus K inter C & S ex jam demonſtratis. Porro inter K & S quodvis punctum ſumatur L: & dividatur D L in T, ut D T ad T L habeat rationem eam quam rectangulum D C, A R ad rectangulum L C, C R; quæ quidem erit majoris ad minus. Major enim eſt ratio D C ad C L quam D C ad C S, hoc eſt, quam D R ad R A (nam has easdem eſſe ſupra oſtenſum eſt) ideoque multo major ratio D C ad C L quam C R ad R A, ac proinde rectangulum D C, A R majus rectangulo C L, C R. Quoniam igitur ratio D T ad T L eſt majoris ad minus, poteſt in linea D L

con-

continuata verſus L, ſumi punctum Q, ita ut D Q ad Q L habeat eandem rationem quam D T ad T L. Eſto itaque inventum, ſitque ad diametrum Q T deſcripta circuli circumferentia. Ea ſecabit circumferentiam A P inter A & P, ut poſtea demonſtrabitur. Secet ergo in B, & ducatur recta D B F, & jungatur B L, eaque producatur, & occurrat rectæ C M, quæ ducenda eſt ipſi D B F æquidiſtans. Quoniam igitur punctum B eſt ad circuli circumferentiam cujus diameter T Q, eſtque D T ad T L ut D Q ad Q L; erit ratio D B ad B L eadem quæ D T ad T L*, hoc eſt, quæ rectanguli D C, A R ad rectangulum L C, C R. Ratio autem D B ad B L, hoc eſt, C M ad M L componitur ex ratione C M ad M B & M B ad M L, hoc eſt, & D C ad C L. Rectangulum vero D C, A R ad rectangulum L C, C R compoſitam habet rationem ex D C ad C L & A R ad R C. Ergo eadem eſt ratio quæ componitur ex rationibus C M ad M B & D C ad C L, compoſitæ ex rationibus D C ad C L & A R ad R C. Quare ablata communi ratione D C ad C L, erit eadem ratio C M ad M B quæ A R ad R C, & invertendo B M ad M C eadem quæ C R ad A R, quæ eſt ratio refractionis. Ergo cum C M ſit parallela radio F B, erit B L M ejusdem radii refractio. Sumtum autem fuit punctum L pro arbitrio inter K & S. Itaque conſtat alicujus radii refractionem quolibet dato intervallo propius accedere ad punctum S, in linea C S. Sed & oſtenſum eſt, radium cujus refractio pervenit ad punctum L, propiorem eſſe axi A C, quam cujus refractio ad punctum K concurrit. Ergo conſtat eas refractiones, quæ propius conveniunt ad punctum S, pertinere ad radios axi A C propiores. Cujus converſum quoque verum eſſe liquet, nimirum radiorum axi A C propinquiorum refractiones propius concurrere ad punctum S. Ergo ob hæc erit S punctum concurſus radiorum ex D venientium.

*Lem. 5.

 Quod

Quod autem dictum eſt circumferentiam circa Q T diametrum deſcriptam ſecare circulum A P H inter A & P, ſic oſtendetur. Primò quia C S major quam C L, erit major ratio A C ad C L quam A C ad C S, & componendo, major A L ad L C quam A S ad S C. Ratio autem A S ad S C componitur ex rationibus A S ad S D & S D ad S C; quarum A S ad S D eadem eſt quæ R C ad C D. quia ex conſtr. eſt D R ad D C ut D A ad D S. Item ratio S D ad S C eſt eadem quæ D A ad A R. Major itaque erit ratio A L ad L C quam compoſita ex ratione R C ad C D & D A ad A R: hoc eſt, quam compoſita ex ratione C R ad R A & D A ad D C. quare ablata utrinque ratione D A ad D C, erit compoſita ex ratione A L ad L C & D C ad D A, ſive compoſita ex L A ad A D & D C ad C L major quam C R ad R A. Ablataque rurſus utrinque ratione D C ad C L, erit L A ad A D major quam compoſita ex rationibus C R ad R A & L C ad C D. Et invertendo ratio D A ad A L minor compoſitâ ex rationibus D C ad C L & A R ad R C; hoc eſt, ratione rectanguli D C, A R ad rectangulum C L, C R, hoc eſt, ratione D Q ad Q L. Quare & dividendo ratio D L ad L A minor erit ratione D L ad L Q. Unde patet L Q minorem eſſe quam L A. Eſt autem ratio D C ad C L major quam D Q ad Q L, nam D C ad C L ratio major eſt quam rectanguli D C, A R ad rectangulum C L, C R, quia A R minor eſt quam C R. Itaque patet punctum Q cadere inter A & C. Jam porro dividatur D K in V, ut habeat D V ad V K rationem eam quam rectangulum D C, A R, ad rectangulum K C, C R. Hæc autem eſt majoris ad minus, ſiquidem hoc eadem ratione oſtenditur, qua ſupra oſtenſum fuit rectangulum D C, A R majus eſſe rectangulo L C, C R. Deinde fiat ut D V ad V K ita D X ad X K, cadetque punctum X inter A & C, æquè ac punctum Q, nam hoc ſimiliter quoque de-

demonſtrari poteſt. Sit autem circuli circumferentia circa X V diametrum deſcripta. Ea ſecabit circulum A P in ipſo puncto P ubi radius G P convexo A B occurrere dictus eſt. Producatur enim P K, & occurrat ei C N parallela G P D. Ergo quia P K poſita eſt eſſe refractio radii G P, cui parallela ex centro ducta eſt C N; habebit P N ad N C rationem refractionis. Eſt igitur C N ad N P ut A R ad R C. Unde ſic porro argumentabimur: Ratio C N ad N K componitur ex rationibus C N ad N P & N P ad N K, hoc eſt, & D C ad C K; igitur ratio C N ad N K, hoc eſt, D P ad P K componitur ex rationibus A R ad R C & D C ad C K, ex quibus componitur quoque ratio rectanguli A R, D C ad rectangulum R C, C K. Igitur D P ad P K erit ut rectangulum A R, D C ad rectangulum R C, C K; ac proinde etiam ſicut D V ad V K, nec non ut D X ad X K. Quare circumferentia cujus diameter X V, tranſibit per punctum P*, ut dicebamus. Jam quia ratio D T ad T L eſt eadem quæ rectanguli A R, D C ad rectangulum R C, C L; ratio vero D V ad V K eadem quæ rectanguli A R, D C ad rectangulum R C, C K; minor erit ratio D T ad T L quam D V ad V K, quia rectangulum R C, C L majus eſt rectangulo R C, C K. Itaque multo minor ratio D T ad T K quam D V ad V K; nam D K major eſt poſita quam D L. Apparet igitur punctum T cadere inter D & V. Punctum vero Q dico cadere inter A & X. Sit enim ut D Q ad Q L ita D X ad X Y. Ergo quia X K ad X D per conſtr. ut rectang. R C, C K ad rectangulum A R, D C; D X autem ad X Y ut D Q ad Q L, hoc eſt, ut rectang. A R, D C ad rectangulum R C, C L: erit ex æquo X K ad X Y ut rectang. R C, C K ad rectang. R C, C L, hoc eſt, ut C K ad C L. Et X K ad K Y ut C K ad K L. Eſt autem X K major quam C K, ut ſuperius dictum fuit. Ergo K Y major quoque quam K L, ideoque D Y minor quam D L. Erat autem D X

*Lem. 5.

ad X Y ut D Q ad Q L, & per converſionem rationis D X ad D Y ut D Q ad D L. Ergo quum D Y ſit minor quam D L, erit & D X minor quam D Q. Unde neceſſario punctum Q cadet inter A & X, nam quod inter A & C cadat jam ante oſtenſum fuit. Sed punctum T oſtendimus diſtare ab A ultra punctum V. Ergo manifeſtum eſt circumferentiam Q B T ſecare circulum A P H inter A & P. Quod demonſtrandum ſupererat.

TAB. II. Fig. 11. TAB. III. Fig. 2. Sit nunc ratio D C ad C H minor ratione refractionis, hoc eſt, ratione C R ad R A. Sitque punctum D vel extra circulum A B H, vel intra, ita tamen ut ultra centrum C diſtet ab A. Nam cum inter A & C poſitum eſt adhuc ſingularis eſt caſus, quem mox videbimus. Radio igitur exiſtente F B, qui tendat ad punctum D, & refractus conveniat cum axe A C in puncto L: Dico L diſtare ab A ulterius quam punctum S. Jungatur enim B S, & ducatur C M parallela F D, quæ occurrat productis B S, B L, in Z & M; Et ſicut D A ad A S ita ſit D E ad E S. Si igitur punctum D intra circulum A B H ponatur, cadet neceſſariò & E intra eundem. Si vero D extra dictum circulum ponatur, tamen E punctum intra circulum cadere ſic oſtenditur.

TAB. II. Fig. 11. Quia enim minor ratio D C ad C H, vel D C ad C A quam C R ad R A, permutando quoque minor erit D C ad C R quam C A ad A R, & componendo, minor D R ad R C quam C R ad R A; quare reliquæ D C ad reliquam C A minor erit ratio quam D R ad R C, hoc eſt, quam D A ad A S, namque has easdem eſſe, ſicut in caſu præcedenti, oſtenditur. Ut autem D A ad A S ita eſt D E ad E S ex conſtr. ideoque & duæ ſimul A D, D E ad duas ſimul A S, S E, hoc eſt, ad A E, ut D A ad A S. Igitur minor ratio D C ad C A, vel D C ad C H, quam A D E ad A E: Et dividendo minor ratio D H ad H C quam duplæ D E ad E A. Sumtisque conſequentium duplis, minor D H ad H A quam duplæ D E ad duplam

plam E A, hoc eſt, quam D E ad E A. Ergo punctum E cadet intra circulum A B H.

Jam utroque caſu ſic porro argumentabimur. Quoniam E cadit inter A, H, ſi circa A E diametrum circulus deſcribatur, extra eum erit punctum B. Eſt autem ut D A ad A S ita D E ad E S. Ergo erit D B ad B S minor ratio quam D A ad A S*. Ut autem D B ad B S ita eſt C Z ad Z S: & ut D A ad A S ita D R ad R C. Ergo minor eſt ratio C Z ad Z S quam D R ad R C. Ratio autem D R ad R C componitur ex rationibus D R ad R A & R A ad R C, quarum D R ad R A eſt eadem quæ D C ad C S, quia ut D R ad D A ita D C ad D S ex conſtr. Ergo ratio C Z ad Z S minor erit compoſitâ ex rationibus D C ad C S & R A ad R C. Ratio autem C Z ad Z S eadem eſt compoſitæ ex rationibus C Z ad Z B & Z B ad Z S Itaque ablatis utrinque rationibus æqualibus, hinc B Z ad Z S, inde D C ad C S, minor quoque erit reliqua ratio C Z ad Z B quam R A ad R C: Et invertendo, major B Z ad Z C quam C R ad R A. Sicut autem C R ad R A quæ eſt ratio refractionis, ita eſt B M ad M C†, quoniam B L M eſt refractio radii F B, cui parallela ducta eſt C M. Igitur major eſt ratio B Z ad Z C quam B M ad M C. Angulus autem B C M, cui utraque B M, B Z ſubtenditur, neceſſario eſt obtuſus, quippe æqualis angulo F B C. Ergo C Z minor erit quam C M‡, atque angulus proinde C B M major angulo C B Z. Quare & C L major quam C S; quod erat probandum.

Tab. II. Fig. 11. Tab. III. Fig. 2.

*Lem. 5.

† Prop. 11.

‡ Lem. 2.

Porro ſimili fere demonſtratione, atque in caſu primo, oſtendi poſſet refractiones radiorum axi A C propinquorum* (intelligo autem propinquiores qui minimam circumferentiæ partem verſus A abſcindunt) propius coire ad punctum S, idque ad intervallum quolibet dato minus. Sed prolixam argumentationem hîc non repetemus. Illud tamen quod ad puncta quamlibet proxima puncto S, radiorum aliquorum refractiones concurrunt, hoc modo evinci

vinci poteſt. Producta M C occurrat circumferentiæ in N. Quoniam ergo propter triangula ſimilia L D B , L C M, ſicut D B ad C M, ita D L ad L C; poteſtque fieri appropinquando radium F B ad axem A C, ut differentia longitudinis linearum D B, D A evadat qualibet data minor, ut & ea quæ eſt inter C M & A R; (hæc enim differetia eo minor erit quo minor continget arcus B N, ut patet ex prop. VIII. quia nempe ratio B M ad M C eſt eadem quæ C R ad R A.) apparet hinc fieri poſſe ut ratio D B ad C M, hoc eſt, D L ad L C, quamlibet prope eadem efficiatur quæ D A ad A R, hoc eſt, quæ D S ad S C. atque ſic punctum L, quo nempe radius F B refractus cum axe A C convenit, quamlibet propinquum fiat puncto S.

Tab. III. Fig. 3. Sit jam punctum D inter A & C datum, cadet autem & hîc radii F B refractio B L inter D & C. Dico concurſum L rurſus hic diſtare longius ab A quam punctum S. Producatur B L & occurrat ei C M parallela F D B in M. Quia itaque punctum D eſt in diametro inter A & centrum C, erit D B major quam D A. Sed C M minor eſt quam A R ut conſtat ex prop. VIII. quia C M parallela eſt radio F B cujus refractio eſt B M. Ergo major eſt ratio B D ad C M, hoc eſt D L ad L C, quam D A ad A R. Sicut autem D A ad A R ita eſt D S ad S C. Ergo major ratio D L ad L C quam D S ad S C; & componendo, major D C ad C L quam D C ad C S. Ergo C L minor quam C S. Unde liquet punctum L ulterius quam S diſtare ab A.

Porro autem, eodem modo quo in caſu præcedenti, oſtenditur hic quoque radiorum aliquorum refractiones propius concurrere ad punctum S, qualibet data diſtantia. Erit igitur & hic S punctum concurſus radiorum ad D tendentium.

Tab. III. Fig. 4. Ultimus caſus demonſtrandus reſtat, cum punctum D extra ſphæram A B H ſic collocatum eſt, ut D C ad C H ha-

habeat rationem eandem, quam CR ad RA, hoc eſt, rationem refractionis. Quo caſu diximus omnium radiorum ad D tendentium refractiones accurate colligi in puncto S: quod nempe invenitur faciendo ut ſicut DR ad DA ita ſit DC ad DS. Puncto igitur D ſicut dictum eſt poſito, ſit quilibet radius illuc tendens FBD & ab occurſu B ducatur ad punctum S recta BS. Dico radii FB refractionem eſſe ipſam BS. Producatur enim BS & occurrat ei CM parallela FBD, & jungatur BC.

Quia igitur DC ad CH ſive CA, ut CR ad RA, erit quoque tota DR ad RC, ut CR ad RA. Ut autem DR ad RC, ita eſt DA ad AS, quia videlicet ex conſtr. eſt, ut DR ad DA ita DC ad DS. Itaque & DA ad AS, ut CR ad RA, hoc eſt, ut DC ad CH. Ergo ſi a DA auferatur DC & ab AS auferatur CH ſive CA, habebit & reliqua CA, ſeu CH, ad reliquam CS eandem rationem quam DC ad CH. Eſt autem CB æqualis CH. Ergo & BC ad CS ut DC ad CB, ideoque trianguli DCB, BCS ſimiles, quoniam & angulum ad C communem habent qui a lateribus proportionalibus comprehenditur. Igitur & latus illius reliquum DB erit ad hujus trianguli latus reliquum BS, ut DC ad CB ſive CH, & angulus SBC erit æqualis angulo BDC. Hinc jam igitur in triangulis DBS, BMC, angulus MBC æquabitur angulo BDS. Eſt autem & angulus BMC æqualis angulo DBS, propter parallelas BD, CM. Igitur dicti trianguli DBS, BMC ſimiles quoque erunt, ac proinde BM ad MC ut DB ad BS, hoc eſt, ut DC ad CH, hoc eſt, ut CR ad RA. Itaque BM ad MC rationem eam habet quæ eſt refractionis; eſtque CM radio FB parallela. Ergo BSM eſt refractio radii FB*. quod erat oſtendendum. Omnes igitur radii ad D tendentes atque occurrentes ſuperficiei convexæ AB, refracti concurrent ad punctum unicum S. *Prop. II.

Manifeſtum autem eſt, ſi circa centrum C duæ ſphæricæ ſuperficies intelligantur ſemidiametris CD, CS; at-

que in illis duo quæpiam puncta ſumantur K, P, radio eodem C K connexa, omnes radios ad K tendentes refringi in diaphani ſuperficie A B H, ut exactè concurrant ad punctum P: quod quidem nulla alia quam ſphærica ſuperficies præſtare queat.

Tab.III. Fig 5. Poterimus porro per hæc, cum & refractionem vitri penitus cognitam habeamus, ſitque ſphærica ſuperficies expolitu facilis, lentes conficere quæ radios ad datum punctum tendentes ad datum aliud punctum concurrere faciant. Item quæ venientes ex dato puncto ita inflectant quaſi ex alio puncto dato promanent. Dentur enim puncta A, B, oporteatque efficere ut radii tendentes verſus A colligantur in B. Dividatur A B in C, ut habeat A C ad C B rationem quæ eſt refractionis vitri, hoc eſt, ſeſquialteram. Deinde producatur A B uſque in D, ut ſit C D ad D B ſicut A C ad C B, & centro D, radio autem D C deſcribatur circumferentia E F G; & alia E H G, centro B, radio B H, paulo minori quam eſt B F. hæc autem priorem circumferentiam neceſſariò ſecabit, velut in punctis E, G: & meniſcus E F G H figuram quæſitæ lentis per medium ſectæ exhibebit. Radii enim tendentes ad A & in ſuperficiem E F G incidentes ibique refracti vergent ad punctum B, ſecundum ea quæ modo oſtenſa fuerunt, atque eò quidem pervenient cum nullam amplius patiantur refractionem in ſuperficie E H G, quippe cujus centrum eſt ipſum B punctum.

Eadem vero lens efficiet etiam, ut radii ex B venientes inflectantur quaſi ex A venirent.

Tab.III. Fig. 6. Similiter datis punctis A, B inventaque circumferentia E F G ſicuti diximus, ſi centro B, intervallo autem B N paulo major quam B F, alia circumferentia deſcribatur L N M; figura E L N M G F ſectionem alterius lentis referet, quæ efficiet ut radii tendentes ad punctum B dirigantur verſus A. Si enim convexa exiſtens vitri ſuperficies E F G radios ad A tendentes deflectere facit ad B,

ne-

neceſſe eſt ut eadem ſuperficies cava exiſtens ut hîc, radios ad B tendentes mittat verſus A: ut facile colligere eſt ex Propoſ. I. Superficies autem LNM nulla refractione hîc radios inflexit ad B tendentes, quoniam hoc centrum habet.

Eadem vero lens cava radios ex A venientes ita franget ut videantur procedere ex puncto B.

Pars III.

Cum convexa eſt ſuperficies, & a puncto egredientes radii intrinſecus illi occurrunt.

Sit convexa diaphani ſuperficies AB & punctum S, ex quo in illam perveniant radii ut SB, qui quidem egredientes diaphanum refringentur, niſi S ſit idem cum convexi centro C. Eſt autem præterea quoque duplex caſus: Junctâ enim SC, eademque productâ, ac circumferentiam AB ſecante in A, ſi fecerimus ut AQ ad QC habeat rationem quæ eſt refractionis, erit punctum S vel propius puncto A quam punctum Q, vel ulterius remotum. Nam ſi convenit cum puncto Q, perſpicuum & ex propoſ. I. & VIII. radios poſt refractionem non concurrere ad punctum aliquod, ſed pro parallelis haberi: eſt enim Q punctum concurſus radiorum parallelorum extrinſecus in ſuperficiem AB incidentium. Tab. III. Fig. 7.

Sit igitur primo punctum S ulterius diſtans ab A quam punctum Q. Et fiat ut SQ ad SA ita SC ad SD. Dico D fore punctum concurſus radiorum refractorum qui a puncto S procedunt ad ſuperficiem AB. Ponatur enim AR æqualis CQ, ita ut A inter R & C cadat. Ergo & CR ad RA proportionem refractionis habebit æquè ac AQ ad QC. Et præterea manifeſtum eſt punctum R cadere inter A & D. Nam quia ut SQ ad SA, ita SC ad SD, erit permutando & dividendo ut SQ ad QC ita SA ad AD; unde, cum SQ ſit minor SA, erit & QC,

 hoc

hoc eſt, A R minor quam A D. Porro quoniam eſt S A ad A D ut S Q ad Q C, hoc eſt, A R, erit & reliqua
* 19. v. Q A, hoc eſt, C R ad reliquam R D ut S A ad A D*. Et componendo C D ad D R ut S D ad D A, & invertendo & permutando D R ad D A ut D C ad D S. Quare per propoſ. hujus part. 1. radii ex puncto D fluentes in ſuperficie A B ita refringentur ut tendant ad S. ideoque & vice verſa, qui veniunt ab S puncto, ad eandem ſuperficiem ita refringentur ut tendant ad E. Igitur D erit punctum concurſus quæſitum. Ea nempe ratione qua punctum S in propoſitionibus antecedentibus. Etenim non perfectè ad D radii hìc concurrent, ſed omnes citra; quod ſic oſtenditur: Radius quilibet ex D veniens ut D B atque a ſuperficie A B refractus, convenit cum recta D C citra
* P. 1. Prop. hujus. punctum S*, velut in P. Quare & viciſſim radii P B refractio erit B D; Ideoque radii S B refractio, puta B N, concurret citra punctum D. quin cum ad idem ſuperficiei punctum tendant radii P B, S B, neceſſe eſt ut poſt refractionem fiat interſectio, ut facilè colligitur ex prima refractionum proprietate.

Tab. IV. Fig. 1. Sit nunc punctum S datum, ut minus diſtet ab A quam punctum Q. Erit autem vel inter Q & C vel inter C & A. nam cum in C incidit, nullam fieri refractionem jam diximus. Sit primo inter Q & C punctum S; & fiat rurſus ut S Q ad S A ita S C ad S D quæ ſumatur in partem a centro C averſam. Dico D fore punctum diſperſus radiorum refractorum qui ab S puncto egrediuntur. Sumatur enim, ut ante, A R æqualis C Q. Erit ergo & C R ad R A proportio refractionis, eadem nempe quæ A Q ad Q C. Et quoniam S Q ad S A ut S C ad S D, erit & componendo Q A, hoc eſt, R C ad A S ut C D ad D S. quare & utraque ſimul R C, C D, hoc eſt D R, ad utramque ſimul A S, D S, hoc eſt, ad D A ut D C ad D S. Ergo radiorum ad D tendentium & in convexa ſuperficie

A B

TAB. III.

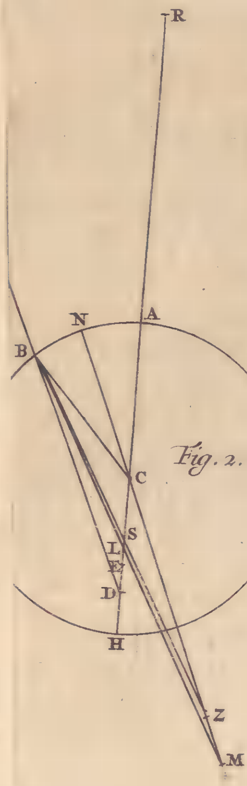


Fig. 2.

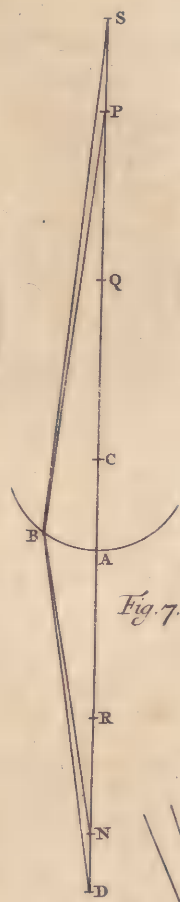


Fig. 7.

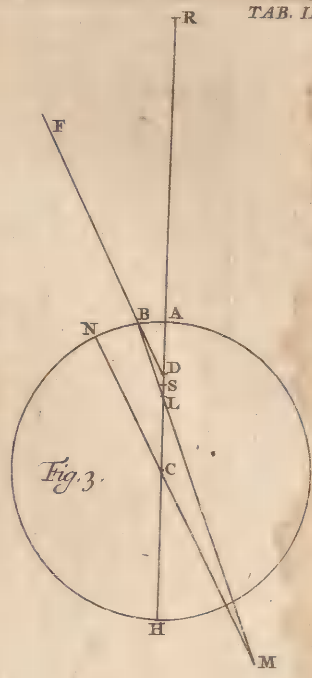


Fig. 3.

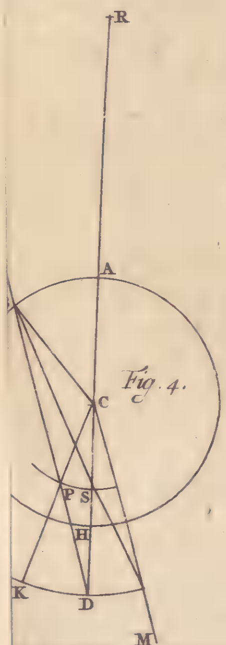


Fig. 4.

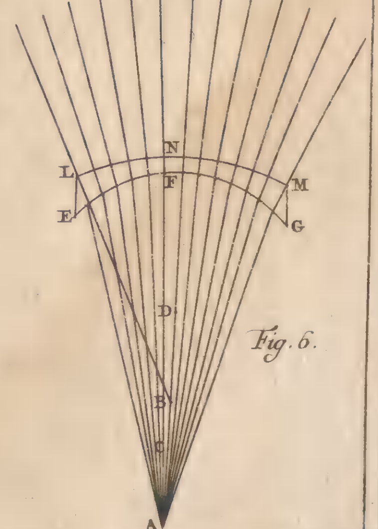


Fig. 6.

A B refractorum punctum concurſus erit S†. Quare & viciſſim radiorum ex puncto S in ſuperficiem eandem A B, ſed intrinſecus incidentium, punctum diſperſus erit D. Erit autem D punctum diſperſus accuratè uno caſu, cum nempe ratio A C ad C S erit eadem quæ A Q ad Q C, ſive quæ refractionis. Si enim ut A Q ad Q C ita A C ad C S; auferendo A C ab A Q & C S ab Q C erit & reliquæ C Q ad reliquam Q S eadem ratio quæ A Q ad Q C. Quia porro Q A ad A S ut C D ad D S, uti antea oſtenſum eſt, erit & per converſionem rationis A Q ad Q S ut D C ad C S. Sed C S ad C A ut C Q ad A Q; ergo erit ex æquo in proportione perturbata D C ad C A ſive C H ut C Q ad Q S, hoc eſt, ut A Q ad Q C, quæ eſt proportio refrationis. Cum autem D C ad C H habet proportionem refractionis, eſtque D R ad D A ut D C ad D S, ut hic eſſe oſtendimus, conſtat radios omnes ad punctum D tendentes, atque ad ſuperficiem convexam A B refractos, colligi exactè ad punctum S. Ergo & viciſſim qui veniunt ex puncto S, ad eandem ſuperficiem ita refringentur, ut a puncto D procedere videantur. Quod ſi vero minor ratio fuerit A C ad C S quam A Q ad Q C, omnium radiorum ex S venientium refractiones retro productæ ultra punctum D concurrent cum axe A C; ſi autem ratio A C ad C S major fuerit quam A Q ad Q C, eædem omnes citra punctum D concurrent, ut ex propoſ. hujus parte 2. facile colligitur.

† Prop. hujus p. 2.

Caſus denique is quo punctum S inter A & C datum eſt, eodem modo conſtruitur quo noviſſime præcedens, nec diſſimilem demonſtrationem habet. Nempe cum ſit S Q ad S A ut S C ad S D, erit componendo Q A, hoc eſt, R C ad A S ut C D ad D S. Quare auferendo C D ab R C, & D S ab A S, erit & reliqua D R ad reliquam D A ut D C ad D S. Unde reliqua eodem modo concludemus. Erit autem D punctum diſperſus ejuſmodi, ut re-

Tab IV. Fig. 2.

refractiones omnes retro productæ citra ipſum concurrant; hoc eſt, inter D & A.

Pars IV.

Cum ſuperficies convexa eſt, & ad punctum tendentes radii intrinſecus ſuperficiei occurrunt.

Tab. IV. Fig. 3. Eſto diaphani convexa ſuperficies AB, & datum punctum S, quo tendant radii, ut LB, intrinſecus ſuperficiei occurrentes, centrum vero convexi ſit C. Jungatur SC ſecetque ſuperficiem in A, & producatur ad Q, ut AQ ad QC habeat proportionem refractionis; & ut SQ ad SA ita ſit SC ad SD. Dico D eſſe punctum concurſus radiorum refractorum qui ad S punctum pergunt. Sit enim AR æqualis CQ; Ergo & CR ad RA habebit proportionem refractionis. Et quia SQ ad SA ut SC ad SD, erit dividendo, QA, hoc eſt, CR ad SA ut CD ad DS. Quare auferendo CD ad CR, & DS ab SA, erit & reliqua DR ad reliquam DA ut DC ad DS. Ergo cum radii ex D in convexum AB incidentes refractique habeant punctum diſperſus S; viciſſim qui ad S tendunt ab eadem ſuperficie inflectentur verſus punctum D. Non tamen accurate; ſed quia qui ex D veniunt refracti, retroque producti non in ipſum punctum S concurrunt, ſed omnes ulterius ab A, idcirco & ii qui tendunt ad punctum S, tantum prope D inter A, D, concurrent ad puncta diverſa, quæ eo propiora erunt puncto D, quo radius incidens propior fuerit axi CA.

Pars V.

Cum ſuperficies cava eſt, & radii a puncto venientes extrinſecus ei occurrunt.

Tab. IV. Fig. 4. 5. Sit ſuperficies ſphærica cava AB, cujus centrum C, in-

incidantque in eam radii a puncto dato D procedentes, ut DB. Jungatur DC, & producta ſecet ſuperficiem in A, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Erit ergo R punctum diſperſus radiorum parallelorum ab oppoſita parte venientium. Jam ſicut DR ad DA ita ſit DC ad DS. Dico S fore punctum diſperſus radiorum ex D egredientium poſtquam in ſuperficie AB refracti fuerint.

Junctâ enim SB, productâque verſus L, & DB verſus N. conſtat radii NB refractionem fore BS, ſi ſuperficies AB convexa eſſet†. Ergo cum cava nunc ſit, hoc eſt, diaphanum ab contraria parte poſitum terminet, cumque NBD, SBL ſint lineæ rectæ, erit radii DB refractio BL*. Itaque erit S punctum diſperſus radiorum ex D manantium.

† Prop. hujus p. 2.

* Prop. 1.

Sunt autem caſus tres. Nam punctum D ita datum eſt, ut ratio DC ad CA ſit major ratione CR ad RA, vel minor, vel æqualis. Et ſi quidem eadem eſt ratio DC ad CA quæ CR ad RA, ſive quæ refractionis, erit S punctum quo exacte omnes radii refracti pertinebunt. Si vero ratio DC ad CA major, refractiones omnes retro productæ citra S punctum cum axe AC convenient. Si minor, ultra. Quæ omnia ex iis quæ propoſitionis hujus parte II. habentur manifeſta ſunt.

Pars VI.

Cum ſuperficies cava eſt, & radii ad punctum tendentes extrinſecus illi occurrunt.

Sit ſuperficies ſphærica cava AB, centro C; incidantque in eam radii ad punctum datum D tendentes, ut OB, agatur recta per DC, ſecans ſuperficiem in A, & habeat CR ad RA proportionem refractionis. Et ut DR ad DA ita ſit DC ad DS. Dico priore caſu, cum R cadit inter A, D, punctum S fore punctum diſperſus radiorum qui ad D tendebant. Altero verò caſu, cum D cadit inter

Tab. IV. Fig. 6. 7.

ter A, R, eventurum contra ut S ſit punctum eorum concurſus. Si autem D fuerit idem quod punctum R, radii eo tendentes, poſt refractionem fient inter ſe & axi AC paralleli, ut in propoſ. IX & I annotatum fuit.

Caſus autem hîc propoſiti demonſtrabuntur ductâ SB, eàdemque verſus L extenſâ. Quia enim rectæ ſunt lineæ SBL, DBO, eſtque ſuperius demonſtratum*, radiorum ex D venientium ad ſuperficiem AB convexam refractiones concurrere ad S punctum, ita ut ſi DB ſit radius incidens, refractio ejus fiat BS; neceſſe eſt hîc radii OB ad D tendentis atque in cavam ſuperficiem AB incidentis refractionem eſſe BL†. Quamquam exacta ratione tamen radii OB refractio concurret cum AC citra punctum S, quando S eſt punctum diſperſus. Sed ultra, quando contingit S eſſe punctum concurſus.

* Prop. hujus p. I.

† Prop. I.

Pars VII.

Cum ſuperficies cava eſt & radii a puncto venientes intrinſecus illi occurrunt.

Tab. IV. Fig. 8.

Sit ſuperficies cava AB, cujus centrum C; & punctum S, unde digreſſi radii ut SB intrinſecus in ſuperficiem ferantur. Ducatur recta per SC, ſecans ſuperficiem in A, & habeat AQ ad QC proportionem refractionis. Erit igitur punctum Q quo pertinerent radii paralleli a parte contraria advenientes. Quare ut SQ ad SA ita ſit SC ad SD. Dico D fore punctum diſperſus radiorum ab S manantium: hoc eſt, ſi jungatur DB & producatur verſus L, futuram BL refractionem radii SB. Si enim & SB producatur verſus N, conſtat radii NB refractionem eſſe BD, ſi ſuperficies AB convexa intelligatur‡. Itaque hîc, cum diaphanum ad alteram partem ſuperficiei AB poſitum ſit, erit & BL refractio radii SB*. Ideoque D punctum diſperſus radiorum ab S venientium. Eſt autem

‡ Hujus Prop. p. IV.

* Pr. I.

ejus-

ejuſmodi ut refractiones omnes citra ipſum cum axe conveniant, hoc eſt, minus procul a ſuperficie AB.

Pars VIII.

Cum ſuperficies cava eſt, & radii ad punctum tendentes intrinſecus illi occurrunt.

Sit diaphani cava ſuperficies AB; centrum ejus C; & punctum datum ſit S quo tendentes radii, ut OB, intrinſecus dictæ ſuperficiei occurrant. Ducatur recta SC, ſecans ſuperficiem in A, habeatque AQ ad QC proportionem refractionis. Porro ut SQ ad SA ita ſit SC ad SD. Dico priore caſu, cum punctum Q cadit inter A & S, futurum D punctum diſperſus radiorum ad S tendentium. Poſterioribus vero duobus quibus S cadit inter A, Q, dico D fore eorundem radiorum punctum concurſus. Jungatur DB & verſus L producatur. Itaque ſi ſuperficies AB convexa ponatur, ut diaphanum ſit verſus C, conſtat radii SB refractionem eſſe DB priori caſu, duobus verò reliquis in producta DB, hoc eſt, BL*. Quare è diverſo hîc, ubi diaphanum a parte altera ſuperficiei collocatum eſt, erit radii OB refractio BL in caſu primo, in reliquis vero BD†. Quia videlicet OBS, DBL ſunt rectæ lineæ. Eſt igitur priori caſu D punctum diſperſus radiorum ad S tendentium, reliquis duobus punctum concurſus. Poteſt autem fieri ut fiat D punctum concurſus accuratè; nempe ſi AC ad CS, habeat rationem eam quæ eſt refractionis, hoc eſt, eandem quam AQ ad QC. Quandocunque autem D fit punctum diſperſus, ſemper radii refracti retro producti convenient cum axe citra punctum D.

Tab. IV. Fig. 9. 10. 11.

* Prop. 5. P. 3.

† Prop. 1.

In dato loco ſuperficiem ſphæricam conſtituere, quæ radios ex dato vel ad datum punctum pergentes, ad punctum aliud datum concurrere faciat.

Tab. V. Fig. 1. 2. 3. 4. 5.

Sint data puncta A, B & D in linea recta & oporteat ad D ſuperficiem ſphæricam conſtituere quæ radios ex A vel ad A tendentes colligat in puncto B.

Sciendum quod uno caſu ſuperficies ſphærica non invenitur, ſed plana ejus loco. Nempe cum punctum A inter B & D ſitum eſt, habetque B D ad D A rationem quæ eſt refractionis, ut in caſu horum primo. Nam ſi per punctum D plana ſuperficies ducatur diaphanum terminans quod ſit a parte A, ea radios verſus A punctum tendentes coget ad punctum B, ut ſupra demonſtratum fuit. In cæteris autem caſibus hæc erit conſtructio.

Producatur D A ad K, ut K D ad D A ſit eadem quæ refractionis ratio; & tribus hisce B K, B A, B D, inveniatur quarta proportionalis B C, ponaturque in eam partem ut vel omnes in eandem tendant, vel binæ in utramque. Jam ſi centro C circumferentia deſcribatur D E, ea ſectionem quæſitæ ſuperficiei exhibebit, diaphanum habentis a parte B. quæ quidem cæteris caſibus convexa uno vero cava erit, nempe ſi punctum A poſitum fuerit inter D & B, & major ratio B D ad D A ratione refractionis.

Ad demonſtrationem autem, ponatur D F æqualis A K, ut ſimul fiat F A æqualis D K, & habeat C R ad R D rationem quæ eſt refractionis, hoc eſt, quam habet K D ad D A.

Quia igitur B K ad B A ut B D ad B C, erit & B K ad K A ut B D ad D C, & permutando, B K ad B D ut K A ſeu D F ad D C. Quare & K D ſeu A F ad D B, ut F C ad C D; & permutando & invertendo F C ad F A ut D C ad D B. Porro quia F A æqualis K D ex conſtructione, erit F A ad A D ut K D ad D A, hoc eſt, ut C R ad R D. Igitur & per converſionem rationis, A F ad F D ut R C ad C D. Sed ut F C ad F A ita erat D C ad D B. Igitur ex æquali in proportione perturbata, erit F C ad F D ut R C ad D B. Inſuper quia ut F A ad A D ita

C R

CR ad RD, erit & dividendo, FD ad DA ut CD ad DR; & permutando, FD ad CD ut DA ad DR. Ergo & FD ad FC ut DA ad AR. & invertendo FC ad FD ut AR ad AD. Sed ut FC ad FD ita oſtenſa fuit RC ad BD. Igitur & AR ad AD ut RC ad BD; Et permutando AR ad RC ut AD ad BD. Ideoque & proportionales AR, AC; AD, AB. Unde liquet radios ad punctum A pertinentes, ita refringi in ſuperficie DE ut congregentur in puncto B. Quod erat demonſtrandum.

Si vero inventæ ſuperficiei altera jungatur centro B, ſemidiametro minore quam BD; conſtituent ſimul lentem, quæ propoſitum efficiet, nam in poſteriori ſuperficie nulla amplius continget refractio, quum radii ad ipſius centrum ferantur.

Cognita ſingularum ſuperficierum refractione ex his quæ hactenus demonſtrata ſunt, poterimus jam lentium quarumlibet convexarum vel cavarum vel quæ ex convexis, cavis, planiſque ſuperficiebus diverſimode componuntur, puncta concurſus vel diſperſus invenire, æquè cum paralleli radii incidunt, atque cum ex dato vel ad datum punctum feruntur: Qua in re ſæpe etiam compendia quædam ſequi licebit, ut in ſequentibus manifeſtum fiet.

Propositio XIII.

Sphæra data quæ ſit ex materia diaphana, invenire punctum concurſus radiorum parallelorum in illam incidentium.

Esto ſphæra cujus centrum C axis BA, ſectio per centrum circulus BPA. Incidant autem radii paralleli axi BA, ut OP. Dividatur ſemidiameter CA bifariam in E, & producatur, & habeat CD ad DE proportio- Tab. IV. Fig. 12.

 nem

nem refractionis, eam nempe quæ convenit materiæ ex qua ſphæra componitur. Veluti ſi cryſtallina aut vitrea ſphæra proponatur, oportet rationem C D ad D E eſſe ſeſqui-alteram proximè; ſi vero ex aqua, ſeſquitertiam. Dico D fore punctum concurſus quæſitum.

Signentur enim in axe A B utrinque producto puncta S & Q, ut tam B S ad S C, quam A Q ad Q C, habeat proportionem refractionis, hoc eſt, eandem quam C D ad D E: fientque inter ſe æquales C S, C Q. Radii igitur axi B A paralleli, ut O P, in ingreſſu ita frangentur, ut tendant ad punctum S*. Porro autem quia C D ad D E ut B S ad S C, erit & dividendo C E ſive E A ad E D ut B C ſive C A ad C S. Unde & E A ad A D ut C A ad A S. Eſt autem E A dimidia ipſius C A, ergo & A D dimidia erit ipſius A S. Sed & S C eſt dimidia ipſius S Q. Ergo ut S Q ad S C ita S A ad S D, & permutando. Eſt autem Q punctum concurſus radiorum parallelorum a parte contraria in ſuperficiem A Q incidentium. Itaque erit D punctum concurſus radiorum ad S tendentium atque ad ſuperficiem eandem A refractorum †. Diximus autem radios parallelos poſt primam refractionem in ſuperficie B P tendere ad punctum S. Ergo totâ ſphærâ penetratâ liquet eos concurrere ad punctum D, quod erat demonſtrandum.

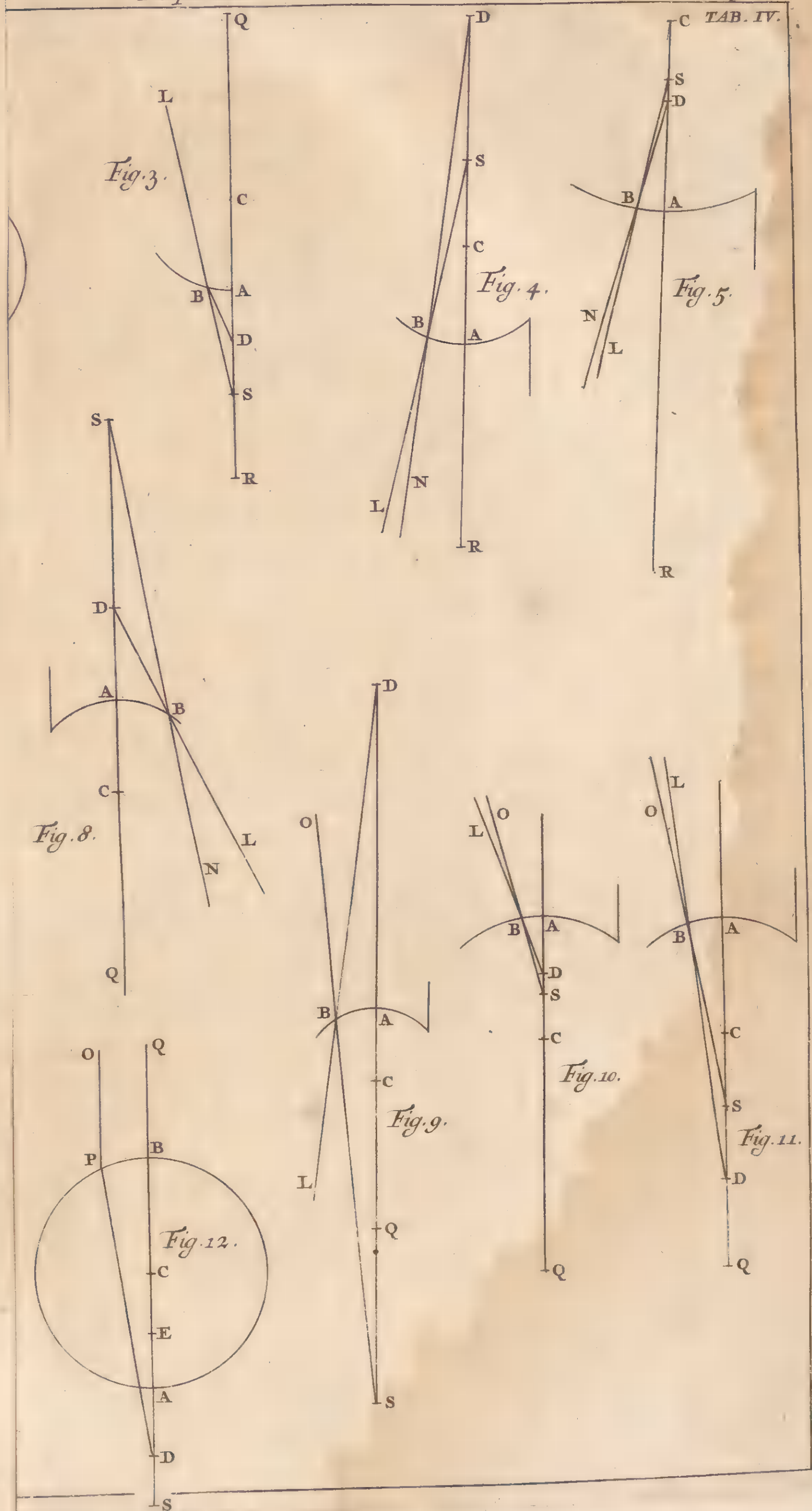
* Prop. VIII.

† Prop. XI. p. 4.

Sciendum autem eſt de radiis axi B A proximis hæc intelligenda, ut ſuperius quoque plerumque factum eſt. Qui quidem radii & comburendi facultatem habent, ſphærâ Soli expoſitâ; & rerum imagines pingendi ad diſtantiam A D. Hæc autem erit proximè quarta pars diametri in ſphæra vitrea; in ſphæra aquea vero ſemiſſis. Unde jam artificii ejus ratio manifeſta eſt, quo proportionem refractionis initio inquirere docui. Quoniam hæc demonſtratio ad cylindrum quoque pertinet, vel ad aliud omne vas rotundum cujus ſectio ad axem recta ſit.

PROP-

TAB. IV.



Propositio XIV.

Data lente quæ ſuperficiem unam planam habeat, alteram convexam, invenire punctum concurſus radiorum axi parallelorum.

Sit data lens cujus ſuperficies convexa A B C, ex ſphæra quæ centrum habeat D, plana autem ſuperficies ſit A F C. Atque hæc primò radiis parallelis oppoſita ſit. Ductâ igitur D B E recta, quæ axem lentis referat, hoc eſt, quæ ſuperficiem A F C ſecet ad angulos rectos, eâque producta ad E, ita ut D E ad E B habeat proportionem refractionis, quæ ſemper data intelligitur: Manifeſtum eſt, E fore punctum concurſus quæſitum. Radii enim axi D F paralleli, cum in ſuperficiem planam A C incidant ad rectos angulos; nullam refractionem ibi patientur, ac proinde paralleli venient ad ſuperficiem A B C. cujus refractione ad E punctum flectentur per prop. IX. Tab. V. Fig. 6.

Erit autem B E diſtantia diametro convexi ſive duplæ D B æqualis ſi lens vitrea fuerit; quia ratio D E ad E B eſt ſeſquialtera.

Sit nunc ſuperficies convexa A B C radiis oppoſita. Si igitur axis B D producatur ad G, ut B G ad G D habeat proportionem refractionis, erit punctum G quo tendent radii poſt primam refractionem in ſuperficie A B C*. Dividatur autem G F in H, ita ut G F ad F H habeat quoque refractionis proportionem. Dico H fore punctum concurſus radiorum parallelorum poſtquam utramque ſuperficiem lentis tranſierint. Quia enim poſt refractionem in ſuperficie A B C tendunt ad punctum G, atque ita occurrunt intrinſecus ſuperficiei planæ A F C, hæc eos diriget porro ad punctum H†, quoniam G F ad F H proportio eſt refractionis. Tab. V. Fig. 7.

* Prop. VIII.

† Prop. VII.

Manifeſtum autem eſt diſtantiam F H paulo tantum mi-

minorem eſſe quam BE ſupra inventam, rationemque ad eam habere quam GF ad GB. Unde, ſi craſſitudo lentis FB pro nulla habeatur, erit FH ipſi BE æqualis, hoc eſt, diametro ſphæræ cujus portio eſt ABC, ſi lens vitrea fuerit.

Patebit autem, ſi concurſus radiorum ab hac lente refractorum exactè expendatur atque ad calculos revocetur, accuratius aliquanto eos propiusque ad unum punctum convenire hoc poſteriore lentis ſitu, nempe cum ſuperficies convexa venientibus oppoſita eſt radiis, quam ſi plana ad illos convertatur.

Propositio XV.

Data lente quæ cavam & planam ſuperficiem habeat, invenire ante ipſam punctum diſperſus radiorum parallelorum.

Tab. V. Fig. 8. Esto lens ejusmodi cujus cava ſuperficies ſit B, centrum cavitatis habens D, plana autem F.

Quod ſi ergo ſuperficies plana radiis advenientibus obverſa eſt, producatur tantum DB in E, ut DE ad EB ſit proportio ea quæ eſt refractionis; eritque E punctum diſperſus quæſitum, uti manifeſtum eſt ex prop. xi. Nulla ſiquidem contingit refractio in ſuperficie plana F, quum radii ad angulos rectos in hanc incidere ponantur; ideoque paralleli perveniant in ſuperficiem B.

Tab. V. Fig. 9. Si vero aliter converſa fuerit lens, producenda eſt BD ad G, ita ut BG ad GD ſit proportio refractionis; deinde dividenda GF in E, ut & GF ad FE proportionem refractionis habeat eandem; atque ita rurſus inventum erit diſperſus punctum E. Radii enim paralleli refracti in ſuperficie cava B, habebunt inde punctum diſperſus G, per prop. x. qui vero ex G venientes incidunt in ſuperficiem planam, ſecundò ibi refractionem ſubeunt, perguntque

que deinceps quaſi ex puncto E procederent, per prop. VI. Itaque E eſt punctum diſperſus quæſitum.

Quia vero G F ad F E ut B G ad G D, eſtque G F major quam B G, erit & F E major quam G D, cui æqualem eſſe conſtat B E in caſu priori. Unde ablata utrinque B F craſſitudine lentis, etiam diſtantia B E in poſteriori caſu major erit quam F E in priori.

Propositio XVI.

Data lente convexa parium vel diſparium ſuperficierum, ſive utraque convexa ſit, ſive altera cava; ſed cavitas ſit convexitate minor; invenire punctum concurſus parallelorum.

Sit lens utravis harum C D, & ſuperficiei C centrum A, B vero ſuperficiei D. Jungatur A B & producatur utrimque, & fiat ut tam C E ad E A, quam D L ad L B rationem habeant quæ eſt refractionis. Deinde ſicut E L ad E D ita ſit E B ad E N, hæc autem E N in partem eam ſumenda eſt, quam præcipit prop. XII. Eritque N centrum concurſus radiorum axi parallelorum qui veniunt a parte C. Refracti enim primò in ſuperficie C pertinent inde ad punctum E, ut oſtenſum eſt prop VIII. qui autem ad E pertinent refracti in ſuperficie D colliguntur in puncto N, per part. IV. prop. XII. & in meniſco per part. VIII. prop. XII. Tab. V. Fig. 10. 11.

Eadem ratione ſi fiat ut L E ad L C ita L A ad L O, erit O punctum concurſus parallelorum qui adveniunt a parte D. Et notandum quod diſtantiæ D N & C O proximè inter ſe ſunt æquales, cauſamque inæqualitatis oriri tantum a craſſitudine lentis. Et ſi quidem ſuperficies D ſit ex majori ſphæra quam ſuperficies C, hoc eſt, ſi B D ſit major quam A C, erit C O diſtantia major quam D N, quod ſic oſtenditur. Quia ut D L ad L B ita C E ad E A, erit

erit & per converſionem rationis & invertendo ut DB ad DL ita CA ad CE. Eſtque DB major quam CA, ergo & DL major quam CE. In caſu igitur lentis utrinque convexæ, ſi ab utraque harum auferatur DC; in meniſco autem ſi eadem DC addatur ad DL, auferatur vero a CE; patet utrobique majorem fieri rationem LC ad DE, quam ſit LD ad CE, hoc eſt, quam LB ad AE. quamobrem rectangulum LC, AE majus erit rectangulo DE, LB. Rectangulum autem LC, AE æquale eſt rectangulo LE, CO, quia ut LE ad EA ita LC ad CO; & rectangulum DE, LB æquale eſt rectangulo EL, DN, quia ut EL ad LB ita ED ad DN. Ergo majus eſt rectang. LE, CO rectangulo LE, DN, ideoque CO major quam DN.

At ſi craſſitudinem lentis CD pro nulla habeamus, uti

Tab. V. Fig 12 13 fere ſemper in ſequentibus fiet, dico puncta concurſus parallelorum O & N æqualiter a lente remota eſſe. Sit enim nunc punctum medium lentis D pro utriſque D & C. Quia ergo LE ad LA ut LD ad LO, erit & LE ad EA ut LD ad DO, unde rectang. LE, DO æquale rectangulo EA, LD. huic autem æquale eſt rectang. DE, LB, quia DE ad EA ut DL ad LB, & rurſus rectangulo DE, LB æquale rectang. EL, DN, quia ut EL ad LB ita ED ad DN. Ergo rectang. LE, DO æquabitur rectangulo EL, DN; ac proinde DO ipſi DN; quod erat probandum.

Puncta autem O & N faciliori ratione nunc invenire licebit. Etenim ſolum inveniendum eſt punctum L ſicut antea, faciendo nimirum ut DL ad LB ſit proportio ea quæ eſt refractionis; ac deinde ut BA, ad AD ita LB ad DN vel DO. Quia enim DL ad LB ut DE ad EA, erit per converſionem rationis LD ad DB ut ED ad DA, & permutando LD ad DE ut BD ad DA. Unde & LE ad ED ut BA ad AD. Ut autem BA ad AD ita fecimus LB ad DN. Igitur LE ad ED ut LB

ad

ad DN. & permutando, EL ad LB ut ED ad ON. Unde & EL ad EB ut ED ad EN, ideoque N punctum concurſus quæſitum; nam hoc antea oſtenſum. Itaque in lente vitrea, ſicut duæ ſimul convexitatum ſemidiametri; in meniſco autem ut earum differentia, ad alterutram ipſarum, ita reliqua bis erit ad foci diſtantiam. fit enim tunc LB dupla radii BD, quia DL ad LB ut 3 ad 2 quæ in vitro eſt proportio refractionis. Quod ſi autem ſuperficies utraque fuerit æqualiter convexa, apparet jam foci diſtantiam ſemidiametro convexitatis æqualem fore; eandemque etiam in lente plano convexa produci a convexitatis ſemidiametro duplo minore.

Propositio XVII.

Data lente cava duarum ſuperficierum ſphæricarum, punctum diſperſus radiorum parallelorum invenire.

Sit data lens CD quæ ſuperficiem utramque cavam habeat, vel alteram earum convexam, ſed quæ majoris ſit ſphæræ quam cava. Sint autem ſemidiametri ſuperficierum AC, BD, quæ producantur ad L & E; ut tam CE ad EA quam DL ad LB habeat proportionem quæ refractionem metitur. Et ut EL ad ED ita ſit EB ad EN. Dico N fore punctum diſperſus radiorum qui paralleli incident a parte C. Tab. V. Fig. 14, 15.

Qui enim paralleli advenientes refringuntur in ſuperficie C, exinde pertinent ad punctum E, per prop. x. quia CE ad EA eſt proportio refractionis. Sed quia ut EL ad ED ita EB ad EN, ideo qui ex E veniunt, refracti a ſuperficie D, habebunt punctum diſperſus N, ut conſtat ex prop. xii. p. 7. & p. 3. Igitur punctum N eſt punctum diſperſus radiorum parallelorum poſt geminam in lente CD refractionem. Oportet autem in lente cavoconvexa, ut ſemidiameter AC tanto ſaltem minor ſit ſemidiametro BD, ut punctum E minus quam L a lente remo-

remotum inveniatur. Nam alioqui radii qui ex E tendunt, refracti in ſuperficie D non poterunt diſpergi, ut conſtat ex prop. XII. part. III.

Porro ſi fiat ut L E ad L C ita L A ad L O, erit O punctum diſperſus parallelorum qui adveniunt a parte D. Primum ſiquidem per refractionem ſuperficiei D, pertinebunt radii ad punctum L, per prop. X. & VIII. Et quia L E ad L C ut L A ad L O, ideo poſt alteram refractionem in ſuperficie C, diſpergentur quaſi procederent ex puncto O, per prop. XII. p. VII. & VIII. ſi modo in convexocavâ L magis diſtet quam E. Erit autem jam D O minor quam C N, ſi A C fuerit minor quam B D, & contra. Quia enim B D ad A C ut D L ad C E. Itaque in caſu lentis utrimque cavæ ſi addatur utriſque D C lentis craſſitudo, in caſu vero cavoconvexæ, ſi auferatur D C a D L, eadem vero addatur ad C E, fiet utrobique minor ratio L C ad D E quam L D ad C E, hoc eſt, quam L B ad A E. Unde ſimili argumentatione ac ſupra in lente convexa efficietur rectangulum L E, C O, minus eſſe rectangulo L E, D N, ideoque C O minorem quam D N; differentia vero eſt exigua, quæ oritur ex craſſitudine lentis. Namque ſi pro nulla habeatur lentis craſſitudo, ita ut pro punctis D & C ſit unum D, jam diſtantiæ D N, D O inter ſe æquales fient, quod eodem modo demonſtratur atque ſuperiori propoſitione in lente convexa.

Poterunt autem hic rurſus puncta diſperſus O vel N brevius nunc inveniri, faciendo tantum ut D L ad L B habeat refractionis proportionem, ſicut prius; ac deinde ſicut B A ad A D ita B L ad D N vel D O; cujus eadem quoque eſt demonſtratio quæ fuit in lente convexa.

Liquet autem, ſi utraque ſuperficies fuerit æqualiter concava, hoc eſt, ſi A D æqualis D B, quod D N vel D O erit æqualis dimidiæ L B: ac proinde, ſi lens vitrea fuerit, æqualis ipſi A D vel B D ſemidiametro. Eadem ſcilicet ratione qua id in lente convexa de concurſus puncto oſtenſum fuit.

PRO-

Propositio XVIII.

Lentem invenire cujus ſuperficies altera convexa ſit eadem datæ, quæque punctum concurſus parallelorum habeat ad datam diſtantiam.

Sit lentis C ſuperficies altera data, hoc eſt ſemidiameter ejus convexitatis A C. deturque diſtantia C O, oporteatque invenire ſuperficiem alteram quæ juncta priori, lentem efficiat quæ radios parallelos cogat ad punctum O.

Producatur A C uſque in P, ut ſit A P ad P C proportio refractionis. Tum ſi quidem diſtantia O C ipſi C P æqualis inveniatur, debebit altera lentis ſuperficies plana eſſe, ut ex prop. xiv. manifeſtum eſt. Si vero O C, C P inæquales fuerint, fiat ſicut differentia earum P O ad O C, ita A C ad C B; quæ accipiatur verſus P, ſi P C major fuerit quam C O; at verſus partem alteram ſi minor P C quam C O. Eritque priore caſu ſuperficies lentis altera convexa a ſemidiametro B C; poſteriore autem cava, adeo ut tunc meniſcus habeatur. Demonſtratio autem eſt hujuſmodi: Quoniam eſt A C ad C B ut P O ad O C, erit componendo in priore caſu, in altero vero per converſionem rationis contrariam ut A B ad B C ita P C ad C O. Eſt autem A P ad P C proportio refractionis. Igitur erit O punctum concurſus radiorum qui paralleli incidunt in lentem C, ut conſtat ex prop. xvi. Patetque lentem, qualis requirebatur, eſſe inventam. Tab. V. Fig. 16. 17.

PROPOSITIO XIX.

Datæ lenti inæqualiter convexæ vel meniſco, lentem aliam æquivalentem invenire, quæ convexam & planam ſuperficiem habeat vel utramque convexam æqualiter.

TAB. V. Fig. 18. 19. Sit data lens D qualem diximus vel meniſcus. Et centra ſuperficierum ſint A & B. Fiat ut B A ad A D ita B D ad D K. Dico D K eſſe ſemidiametrum convexi, lentis quæ alteram ſuperficiem planam habeat, quæque paria faciat cum lente D. Habeat enim D L ad L B proportionem quæ eſt refractionis, & ut B A ad A D ita ſit L B ad D N. Erit ergo N focus lentis D, per ea quæ in prop. XVI. demonſtrata ſunt. Verum ut B A ad A D, ita quoque eſt B D ad D K; ergo B D ad D K ut L B ad D N. Et permutando B D ad B L ut D K ad D N. Et componendo igitur erit ut D L ad L B ita K N ad N D. quare & K N ad N D erit refractionis proportio. Itaque ſi in D lens conſtituatur quæ ſuperficiem alteram convexam habeat ſemidiametro K D, alteram vero verſus K planam, ejus erit focus punctum N; ut ex prop. XIV. manifeſtum eſt.

Si vero K D duplicetur, habebitur ſemidiameter convexitatis ad lentem duarum æqualium ſuperficierum, ut patet ex prop. XVI.

PROPOSITIO XX.

Theorema.

Poſita quavis lente convexa vel cava, ſive utraque ſuperficie ſphærica conſtet, ſive altera plana; datoque in axe ejus puncto, a quo vel ad quod radii tendentes lenti occurrant: Si duabus ab eo puncto diſtantiis tertia proportionalis ſtatuatur, quarum diſtantiarum pri-

ma ſit ad punctum quo pertinent refractiones parallelorum a contraria parte incidentium; ſecunda ad lentem ipſam; erit terminus tertiæ, ſumendæ a puncto dato in partem eandem cum primâ, punctum concurſus vel diſperſus radiorum à dato puncto vel ad datum tendentium.

SIt lens C, cujus quidem craſſitudinem tanquam ſi nulla eſſet hic conſiderabimus, in axe autem lentis AC datum ſit punctum D, a quo vel ad quod tendentes radii lenti C occurrant. Sitque O punctum quo pertinent refractiones radiorum parallelorum a contraria parte incidentium. Et ponatur duabus DO, DC tertia proportionalis DP, ita ut DO, DP ſemper ſint verſus partem eandem. Dico P fore punctum concurſus vel diſperſus radiorum ex D vel ad D procedentium. Debet autem D non incidere in O, quia tunc radii ex D venientes refractione lentis non cogentur ad punctum, ſed paralleli evadent, ut conſtat ex prop. 1. Tab. VI. Fig 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 8 9 10. 11. 12.

Demonſtratio autem, quando utraque lentis ſuperficies ſphærica eſt, erit hujuſmodi.

Sit A centrum ſphæricæ ſuperficiei cui primum incidentes radii occurrunt; B vero centrum reliquæ. Et inveniantur puncta E & L, ut tam CE ad EA quam CL ad LB habeat proportionem refractionis. Et ponatur ipſi AE æqualis CR ad partem lentis alteram; Unde AR erit ad RC ſicut CE ad EA. fiat quoque tribus hiſce DR, DC, DA quarta proportionalis DN, ſumenda in eam partem ut vel quatuor omnes a puncto D eodem verſus habeantur vel binæ utrimque. Quod ſi D ſit idem quod A punctum, etiam N cum hiſce coincidere cogitandum eſt. Si vero R cadat in D, is caſus ſeorſim demonſtrabitur. Nunquam vero N cadet in L, cum D diverſum ſit ab O, ut diximus eſſe debere.

Quia igitur CE ad EA, item CL ad LB, eſt propor-

tio refractionis, punctumque O quo pertinent refractiones parallelorum, erunt proportionales hæ quatuor LE, LA; LC, LO*, quare & LE ad EA ut LC ad CO, & permutando LE ad LC ut EA ſive CR ad CO. Unde & LE erit ad EC ut CR ad RO. Quia porro ex conſtructione proportionales ſunt DR, DA; DC, DN, erit & DR ad RA ſeu EC ut DC ad CN; & invertendo NC ad CD ut EC ad DR. Quare & NE ad RC ut EC ad DR. Sed ut RC ad RO ita diximus eſſe LE ad EC. Ergo ex æquali in ratione perturbata, erit ut EN ad RO ita LE, DR. Et permutando & invertendo, ut LE ad EN ita DR ad RO. Hinc vero & LE ad LN ut DR ad DO, ac proinde rectang. LE, DO æquale LN, DR. Eſt autem ſicut DO ad OC ita rectang. DO, LE ad OC, LE. Ergo erit DO ad OC ut rectang. LN, DR ad OC, LE, hoc eſt, ad rectang. LC, RC. dictum enim fuit antea quod LE ad LC ſicut CR ad CO. Eſt autem ut DO ad OC ita DC ad CP, quia ex conſtr. proportionales ſunt DO, DC, DP. Ergo DC ad CP ſicut rectang. LN, DR ad LC, CR. Rectangulum autem LC, CR æquale eſt LB, AR, quia CL ad LB ex conſtr. ut AR ad RC. Ergo DC ad CP rationem habet quam rectang. DR, LN ad LB, AR, hoc eſt, compoſitam ex rationibus DR ad RA & LN ad LB. Ratio autem DC ad CP componitur quoque ex rationibus DC ad CN & CN ad CP. Ergo eadem eſt ratio compoſita ex rationibus DR ad RA & LN ad LB, compoſitæ ex rationibus DC ad CN & CN ad CP. Ratio autem DC ad CN eſt eadem quæ DR ad RA, quia ex conſtr. proportionales ſunt DR, DA, DC, DN. Ergo & reliqua ratio LN ad LB eadem eſt reliquæ CN ad CP. Unde proportionales quoque erunt NL, NB; NC, NP.

* Prop. XVI. & XVII.

Primum itaque quia proportionales ſunt DR, DA; DC, DN conſtat ex prop. XII. radios qui ex puncto D vel ad D feruntur, refringi a ſuperficie cujus centrum A,

ut

ut exinde pertineant ad punctum N. At quia porro proportionales quoque ſunt N L, N B; N C, N P; ideo quia ad N vel ex N feruntur, refracti in ſuperficie altera cujus centrum B, pertinebunt ad punctum P, ut ex eadem prop. manifeſtum eſt. Itaque patet P eſſe punctum concurſus vel diſperſus radiorum qui ex D puncto promanant, vel eo tendunt; quod erat demonſtrandum.

Cum vero contingit puncta D & R in unum coire, conſtructis cæteris ut prius, præter punctum N, demonſtratio erit hujuſmodi: Nimirum quia dictum fuit eſſe E L ad L C ut R C ad C O, erit R O ſeu D O ad O C ut E C ad C L. Sicut autem D O ad O C ita eſt D C ad C P, & ut E C ad C L ita R C ad L B, quia ex conſtr. eſt C E ad E A ſive C R ut C L ad L B. Itaque D C ad C P ut R C ſeu D C ad L B. ac proinde C P ipſi L B æqualis. Et addita utrique B C, erit quoque B P æqualis L C. Ergo eadem ratio B P ad L B ſeu P C quæ C L ad L B. hæc autem eſt ratio refractionis ex conſtructione. Quia itaque primum A R ad R C poſita eſt refractionis proportio, conſtat ex prop. XI. & IX. quod radii ad R, hoc eſt, ad D pertinentes, atque in ſuperficie cujus centrum A refracti, paralleli intra lentem incedent. Qui autem paralleli occurrunt ſuperficiei cujus B centrum eſt, pertinebunt deinceps ad punctum P, quia B P ad P C eſt proportio refractionis. Itaque P eſt punctum concurſus vel diſperſus radiornm ex D vel ad D tendentium: quod erat dem. Tab. V. Fig 20.21

Quod ſi vero ſuperficierum lentis altera ſphærica fuerit altera plana, erit vel hæc vel illa radiis venientibus expoſita, ac ſi quidem ſphærica iis exponatur, cujus centrum A, fiat tribus D O, D A, D C quarta proportionalis D N, quæ accipiatur in eam partem ut vel omnes quatuor eodem verſus habeantur vel binæ utrimque. Erit igitur & D O ad O A ut D C ad C N, & permutando D O ad D C ut O A ad C N. Sed & D O ad D C eſt ſicut O C ad C P, quia ex Tab. VII. Fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

conſtr.

conſtr. proportionales ſunt DO, DC, DP. Itaque OA ad CN ut OC ad CP; & permutando AO ad OC ut NC ad CP. Ratio autem AO ad OC eſt ea quæ refractionis, quia O eſt punctum quo pertinent refractiones radiorum parallelorum*. Igitur & NC ad CP erit refractionis proportio. Quia itaque fecimus proportionales DO, DA; DC, DN; apparet radios omnes qui ad D vel ex D feruntur, refringi in ſuperficie cujus centrum A, ut exinde pertineant ad punctum N†. Sed quia NC ad CP rationem habet quæ eſt refractionis, ideo qui ad punctum N pertinent, refracti in plana lentis ſuperficie, pertinebunt inde ad punctum P‡. Ergo & hic conſtat propoſitum.

* Prop. XIV. XV.

† Prop. XII.

‡ Prop. VII.

Tab. VII Fig. 7. 8 9. 10. 11. 12.

Si vero in planam lentis ſuperficiem primum radii incidant, rurſuſque centrum ſuperficiei ſphæricæ ſit A; habeat CE ad EA proportionem refractionis, ut & MC ad CD. Quia igitur O punctum eſt quo pertinent refractiones parallelorum, erit CO æqualis AE*; ideoque & CE ad CO ut CE ad EA, hoc eſt, ut MC ad CD. Quare & ME ad OD erit ut MC ad CD. Eſt autem ut OD ad OC ita DC ad CP, quia ex conſtr. proportionales ſunt DO, DC, DP. Igitur ex æquo, ut ME ad OC ſive EA ita MC ad CP; ac proinde ut ME ad MA ita MC ad MP. Quia igitur poſita eſt ratio MC ad CD eadem quæ refractionis, ideo radii ex D vel ad D tendentes, poſt refractionem in ſuperficie lentis plana, pertinebunt ad punctum M†. Et quia proportionales ſunt ME, MA; MC, MP, conſtat ‡ radios qui ad M punctum pertinent, refractos in ſuperficie, cujus centrum A, pertinere porro ad punctum P. Quod demonſtrandum ſupererat.

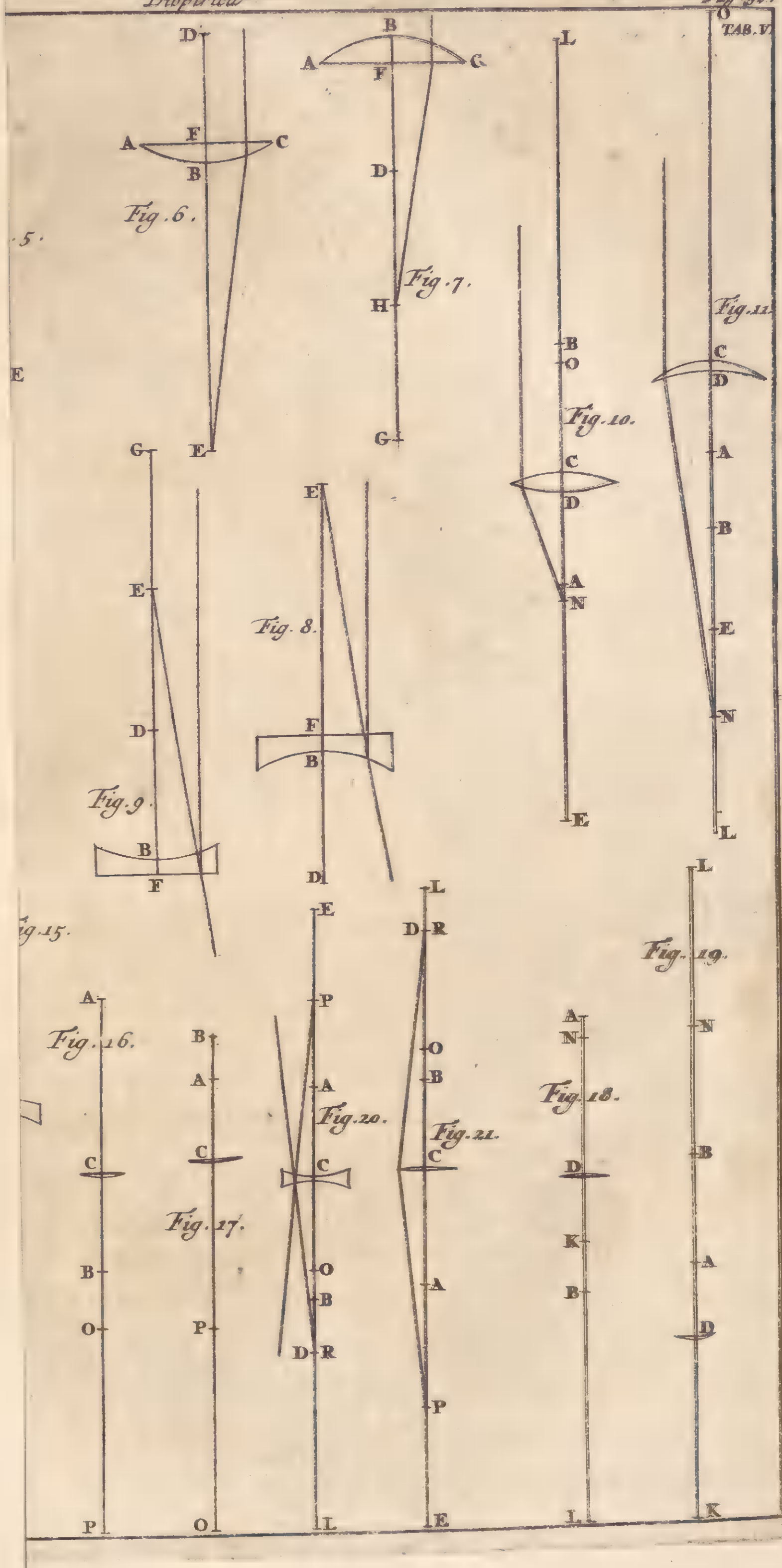
* Prop. XIV. XV.

† Prop. V.

‡ Prop. XII.

Manifeſtum autem ex his eſt, quantum ad diſtantiam punctorum concurſus vel diſperſus radiorum, a quibuſvis vel ad quælibet puncta tendentium, nihil intereſſe utra lentis alicujus ſuperficies radiis incidentibus obvertatur.

Item


TAB. V
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.

Item diverſarum ſuperficierum lentes, quæ puncta concurſus vel diſperſus parallelorum æque remota habent, etiam ad cætera æquivalentes eſſe. Nempe quia in conſtructione non attenduntur centra ſingularum lentis ſuperficierum, ſed tantummodo punctum concurſus vel diſperſus radiorum parallelorum.

Propositio XXI.

Radiorum, qui ad axes lentium pertinent ab axe primario paulum declinantes, puncta concurſus vel diſperſus inveſtigare. Et oſtendere eandem ferè horum eſſe a lente diſtantiam, ac eorum quæ ad puncta radiorum in axe poſitorum pertinent, ſi vel paralleli vel ab æque procul diſtantibus punctis radii fuerint egreſſi.

Hactenus complexus radiorum examinavimus, qui ad axes lentium referuntur. Sed neceſſe eſt eos quoque inſpicere qui ad puncta extra axem poſita pertinent, quoniam ab his radiis æque ac ab illis pendent tum oculi, tum omnis generis perſpicillorum miri effectus; ac videndum primò, quid fiat in ſuperficiebus ſingulis, quia hoc cognito, etiam de lentibus res erit facilior.

Sit ſuperficies ſphærica convexa EA, cujus centrum C, ſemidiameter convexitatis AC, quæ producatur ad B, ut ſit ratio AB ad BC eadem quæ eſt refractionis. Intelligatur porro ſuperficies ſphærica cava, radios exceptura BD; centrum idem habens C. Jam non tantum radii paralleli rectæ CB, in ſuperficiem AE incidentes, convenient in B, ut in prop. VIII. demonſtratum eſt, ſed & ii qui rectæ CD, angulum qualemcumque cum CB conſtituenti, paralleli ferentur, eodem modo ad D concurrent. Tab. VI. Fig. 13.

Rurſus ſi a puncto, vel ad punctum aliquod G tendentes radii fractique in ſuperficie ſphærica AE, habuerint punctum Tab. VI. Fig. 14. 15.

ctum concurſus H; hoc autem invenitur per prop. 11. p. 1. & 2. & centro C intelligantur ſuperficies ſphæricæ GK, HL, tunc radii ex K, puncto ſuperficiei GK venientes, vel ad K tendentes, concurrent ſimiliter ad punctum in ſuperficie HL, ut L. atque hæc per ſe manifeſta ſunt in quibuscumque caſibus.

Tab. VI. Fig. 16. Ponatur nunc lens convexa AO, cujus axis BAE, in quo nempe centra ſuperficierum AN, OP ſint C & G. Radii autem a puncto B manantes in ſuperficiem AN, franguntur ut inde tendant ad punctum E: atque iterum fracti in ſuperficie OP pergant ad punctum V. Item a puncto D extra axem, quodque tantundem ac B diſtet a ſuperficie AN, vel a centro ejus C, egreſſi radii in ſuperficiem hanc incidant. Horum punctum concurſus L poſt binas in lente refractiones ita inveniemus.

Ducatur recta DC, quæ ſecabit ſuperficiem AN in N, ad rectos angulos, invenieturque in eadem linea producta punctum S quo concurrunt radii ex D venientes poſt refractionem in ſuperficie AN, per ſuperius expoſita. Et apparet diſtantias CS, CE fore æquales. Jungatur jam SG, quæ ſuperficiem OQ normaliter ſecabit in Q; eritque propterea in ipſa SG punctum concurſus L, radiorum ex prima refractione tendentium ad S, ac rurſus refractorum in ſuperficie OQ, atque invenietur inde iſtud concurſus punctum ex ſuperioribus.

Quod autem punctum L proximè eandem diſtantiam habebit a lente ac punctum V, hinc conſtabit. Si enim puncta E, S, vertices nempe conorum radioſorum æqualiter diſtarent a ſuperficie OQ, cujus refractione mutantur hi Coni in conos quorum vertices L & V; etiam hi vertices æqualiter diſtarent ab hac ſuperficie. Sunt autem diſtantiæ QS, OE proximè æquales, quippe minimo quopiam differentes, quanto nimirum GE ſive duæ ſimul GC, CS ſuperant GS. Ergo & diſtantiæ LQ, VO proimè æquales erunt. Rectæ autem quæ puncta B, D,

item

itemque V, L, conjungunt, quia minimæ eſſe cenſentur, & puncta ipſa æqualiter a lente diſtant, poſſunt tanquam ad axem lentis B E perpendiculares haberi.

Hæc autem non difficulter ad cavas quoque lentes, & ad eas quæ alteram ſuperficierum planam habent, omnemque caſuum diverſitatem transferri poſſunt, radios parallelos, tanquam ad punctum infinite diſtans conſiderando. Quod uno etiam exemplo in lente plano concava ſchema alterum explicat.

Hujus enim lentis plana ſuperficies A N radios ad punctum axis B tendentes excipit, itemque alios tendentes ad punctum D, ab axe exiguo diſtans, & æque ac B a ſuperficie A N. Quod ſi jam ponamus eos qui ad B tendebant, poſt alteram refractionem in ſuperficie O Q, fieri parallelos axi A E; ſive ad punctum V in axe infinite distans concurrere, fient etiam qui ad D tendunt, ejusdem ſuperficiei O Q altera refractione, inter ſe paralleli: ſive ad punctum L in linea Q G S infinitè diſtans pertinebunt. Quæ linea invenitur eodem modo ac in caſu præcedenti; eademque eſt demonſtratio, qua oſtendatur ex poſtrema refractione radios utrobique fieri parallelos, niſi quod hoc caſu, e duabus G E, G S, quæ ut æquales cenſentur, G E nunc pauxillo minor eſt quam G S, quippe cum æquales ſint A E, N S. Tab VII. Fig. 13.

Porrò ex his manifeſtum eſt, etiam per binas pluresve lentes transmiſſos conos radioſos, tam obliquos quam rectos, æquali diſtantia a lente poſtrema vertices ſuos ultimos habere, ſi ad æque remotos conorum vertices radii primitus ſpectent.

Comprobat autem quæ hic oſtenſa ſunt experimentum picturæ, quam lens foramini oppoſita in loco tenebroſo exhibet, cum non tantum in axe lentis, ſed & circum amplo ſatis ſpatio hæc pictura mirabili nitore conſpiciatur, ut minima quæque diſtinctè exprimat. Eadem vero & te-

teleſcopiorum ex binis, ternis, quaternisve lentibus compoſitorum egregii effectus vera eſſe oſtendunt.

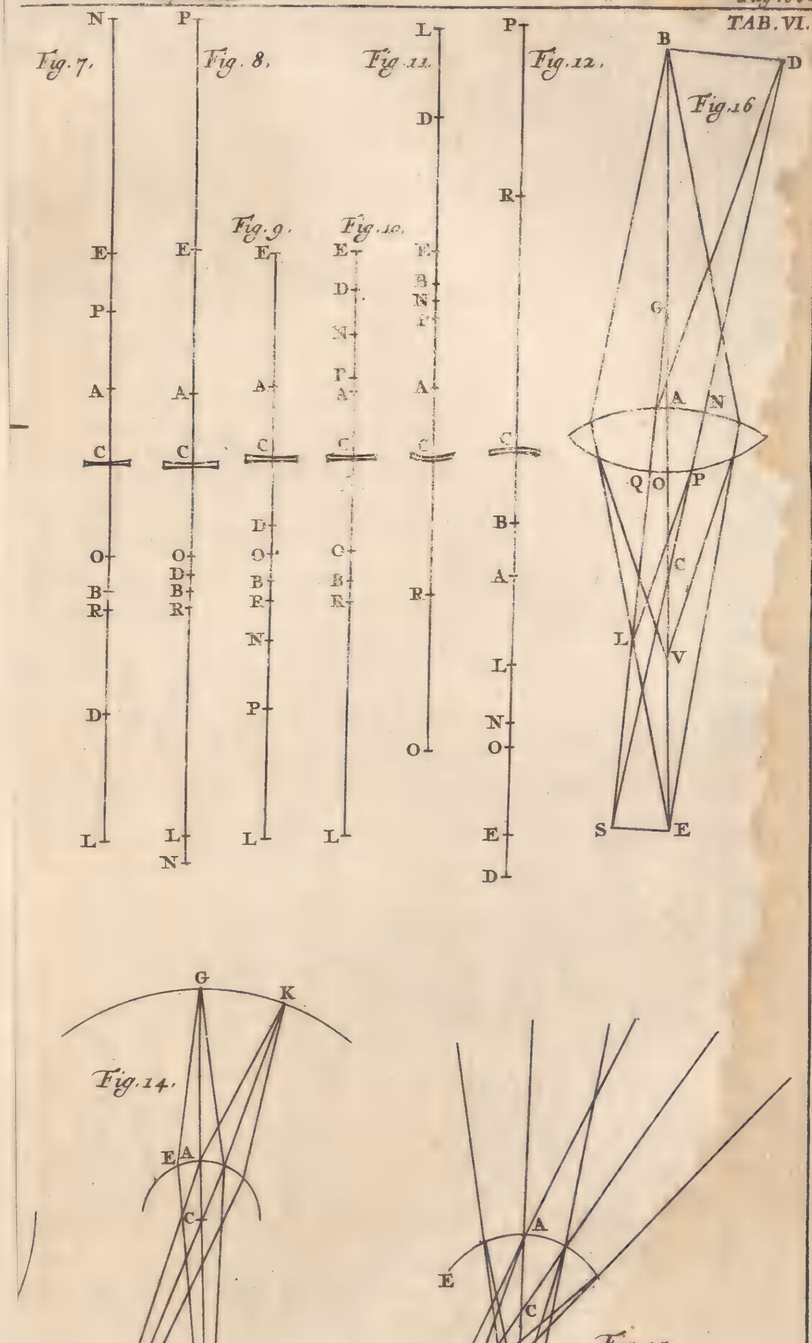
Propositio XXII.

In omni lente, duarum convexarum aut concavarum ſuperficierum, punctum quoddam eſt intus, per quod radius quilibet tranſiens ante & poſt lentem ſibi ipſi parallelus incedit. In meniſco autem, & in illa quæ minori cavo quam convexo conſtat, punctum ejusmodi extra lentem a parte ſphæræ minoris reperitur.

TAB. VIII. Fig. 1. 2. 3. 4. Sit lens quælibet iſtarum, cujus ſnperficies altera deſcripta ſit centro E, radio ED, altera centro F, radio FB, quorum FB ſit major altero: & jungatur FE, quæ ſecet lentem in D & B.

Quod ſi jam ſicut radius FB ad radium ED ita ponatur BL ad LD; & cadat punctum L; (ſi quidem duarum convexarum vel concavarum ſuperficierum fuerit lens) in ipſa linea BD, quæ lentis craſſitudinem definit; extra lentem vero, verſus ſphæram minorem, in meniſco & caſibus reliquis; dico radium omnem qui lentem penetrat ut PNMO, ita ut pars ejus NM intra lentem contenta tranſeat per punctum L, vel ad ipſum pertineat; ſibi ipſi, ante ingreſſum & poſt egreſſum ex lente, parallelum ferri, hoc eſt partem PN parti MO.

Jungantur enim FN, EM & intelligantur planæ ſuperficies in punctis N & M utrasque lentis ſuperficies ſphæricas tangentes. Quia igitur ut FB ad ED ita BL ad LD; erit & permutando, FB ad BL ut ED ad DL. Unde & BF ſive NF ad FL ut DE ſive ME ad EL. Cum itaque triangula NFL, MEL latera circa angulos E & F proportionalia habeant, angulosque æquales ad L, qui vel ipſi obtuſi ſunt, vel reliqui ad M & N (hoc enim neceſſario ita eſſe facile perſpicitur) ſimilia proinde triangula hæc


TAB. VI.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16

hæc eſſe neceſſe eſt. Quare & anguli lateribus proportionalibus comprehenſi æquales erunt, angulus nempe N F L angulo M E L; ideoque parallelæ inter ſe rectæ F N, E M. Hæ autem ad angulos rectos ſunt planis quæ ſuperficies lentis in punctis N & M contingere intelliguntur. Ergo & plana iſta inter ſe parallela erunt. Quamobrem cum radius N M æqualibus angulis ad illa inclinetur, neceſſe eſt eum æquali angulo flecti, ubi lentem egreditur atque ubi intrabat, hoc eſt, angulum P N M eſſe æqualem angulo N M O. Sunt autem alterni: itaque conſtat P N, M O eſſe parallelas, quod erat demonſtrandum. Eadem demonſtratio lenti convexo cavæ, æqualis utrimque curvaturæ applicata, radios omnes axi vel parallelos vel obliquos recta tranſire, nec directionem immutare oſtendit.

Lentes plano convexas & plano concavas hic non recenſuimus, in quibus tamen per hæc ipſa conſtat punctum L cadere in mediam lentis ſuperficiem ſphæricam.

Propositio XXIII.

Pictura cujusque viſibilis quæ fit in plano poſt lentem convexam, ad viſibile ipſum eam habet rationem, ſecundum diametrum, quam picturæ diſtantia a lente ad viſibilis ad ea diſtantiam.

Sit lens convexa A D C B. Viſibile vero linea recta K F, quam axis lentis mediam ſecet, atque ad angulos rectos in E. A punctis igitur K, E, F æque ac ab aliis omnibus, quæ in propoſita linea imaginari licet, radii ferantur in totam lentem A B C, qui poſt geminam refractionem, in utraque nimirum lentis ſuperficie, colliguntur in totidem punctis tabulæ I H G; nempe qui ex K in G, qui ex E in H, & qui ex F in I; quatenus quidem diſtinctam ponimus exiſtere hanc picturam. Quum igitur Tab. VII. Fig. 14.

 lux

lux a puncto K manans, omnia puncta quæ ſunt intra lentem ABC pervadat, fiet neceſſariò ut aliquis radiorum ex K manantium, atque in G collectorum, tranſeat per punctum lentis L, illud nimirum de quo egimus propoſ. ſuperiori, atque is radius ante & poſt lentem ſibi ipſi parallelus feretur; quumque ſimiliter aliquis tranſeat ab F ad I, apparet utrosque pro lineis rectis haberi poſſe in centro lentis ſeſe interſecantibus; non conſiderata videlicet lentis craſſitudine. Cumque hoc modo duos triangulos iſoſceles ſimiles efficiant, quorum baſes KF & IG; hæ utique eandem inter ſe rationem ſervabunt quam triangulorum ipſorum altitudines; hoc eſt, quam diſtantiæ baſium a lente ABCD. quod erat demonſtrandum.

De Aberrationibus ex figurâ.

Duæ in radiis obſervantur aberrationes. Prior ex figura oritur, ex diſſipatione vero poſterior, de qua poſtea. Ad priorem explicandam, præmittuntur ſequentes propoſitiones, ut Lemmata.

Propositio XXIV.

In minimis circuli ejusdem ſegmentis, altitudines ſeu diametri ſegmentorum eandem inter ſe rationem habere cenſendæ ſunt, quam quadrata baſium.

Tab. VII. Fig. 15

Sint ejusdem circuli exigua ſegmenta CAD, EAF, quæ utraque diameter circuli AB bifariam ſecet, ſintque ſegmentorum altitudines AG, AH. Dico rationem AG ad AH proximè eandem eſſe, quæ quadrati baſeos CD ad quadr. baſeos EF. Quia enim rectangulum BGA æquale quadrato GD: & rectangulum BHA æquale quadrato FH; apparet eſſe ſicut quadratum GD ad quadr. HF, ſive ut qu. CD ad qu. EF ita rectangulum BGA ad rectangulum BHA; Sicut autem

tem rectangulum BGA ad rectangulum BG, HA, quod pauxillo minus eſt rectangulo BHA, ita eſt AG ad AH. Ergo & AG ad AH exiguo majorem rationem habet quam quadratum CD ad qu. EF.

Sit AB diameter partium 20000000; arcus CAD $\frac{1}{36}$ circumferentiæ ſive 10 graduum; ſit DG partium 871557, cujus ſi FH dimidia ponatur erit ea 435778. At AG eſt 38053; cujus quarta pars 9513, cui ſi æqualis eſſet AH, jam eſſet eadem ratio AG ad AH quæ quadrati CD ad quad. EF. Nunc autem invenitur AH partium 9500, adeo ut differentia tantum ſit $\frac{13}{9500}$ ſive $\frac{1}{731}$ ipſius AH, ac tantum $\frac{13}{20000000}$ diametri AB.

Superficies vero convexæ aut concavæ lentium, quas in ſequentibus conſiderabimus, plerumque tantum $\frac{1}{100}$ vel $\frac{1}{200}$ partem circumferentiæ complectuntur, ut poſtea dicetur, in quibus proinde multo minus fallit dicta baſium altitudinumque proportio.

PROPOSITIO XXV.

In minimis circulorum inæqualium ſegmentis, æquales vel eaſdem baſes habentibus, altitudines ſegmentorum, diametris ipſorum circulorum, contraria ratione reſpondere cenſendæ ſunt.

Sint ſegmenta exigua inæqualium circulorum, ABC, ADC, eandem baſin AC habentia, ac bifariam diviſa recta DE, in qua diametri circulorum, BF quidem ejus ex quo ſegmentum ABC, DG verò minoris ex quo ſegmentum ADC. Dico ſicut BF ad DG ita proxime eſſe altitudinem DE ad BE. Cum enim rectangula FEB, GED inter ſe æqualia ſint, quippe quæ ſingula æquentur quadrato EC, erit proinde ut FE ad GE ita DE ad EB. Sed ut FE ad GE ita eſt proxime diameter FB ad diametrum GD, cum partes EB, ED minimæ ponan- TAB. VIII. Fig 5.

nan-

nantur totarum diametrorum reſpectu. Ergo etiam ut diameter F B ad diam. G D ita eſt proximè D E ad altitudinem B E.

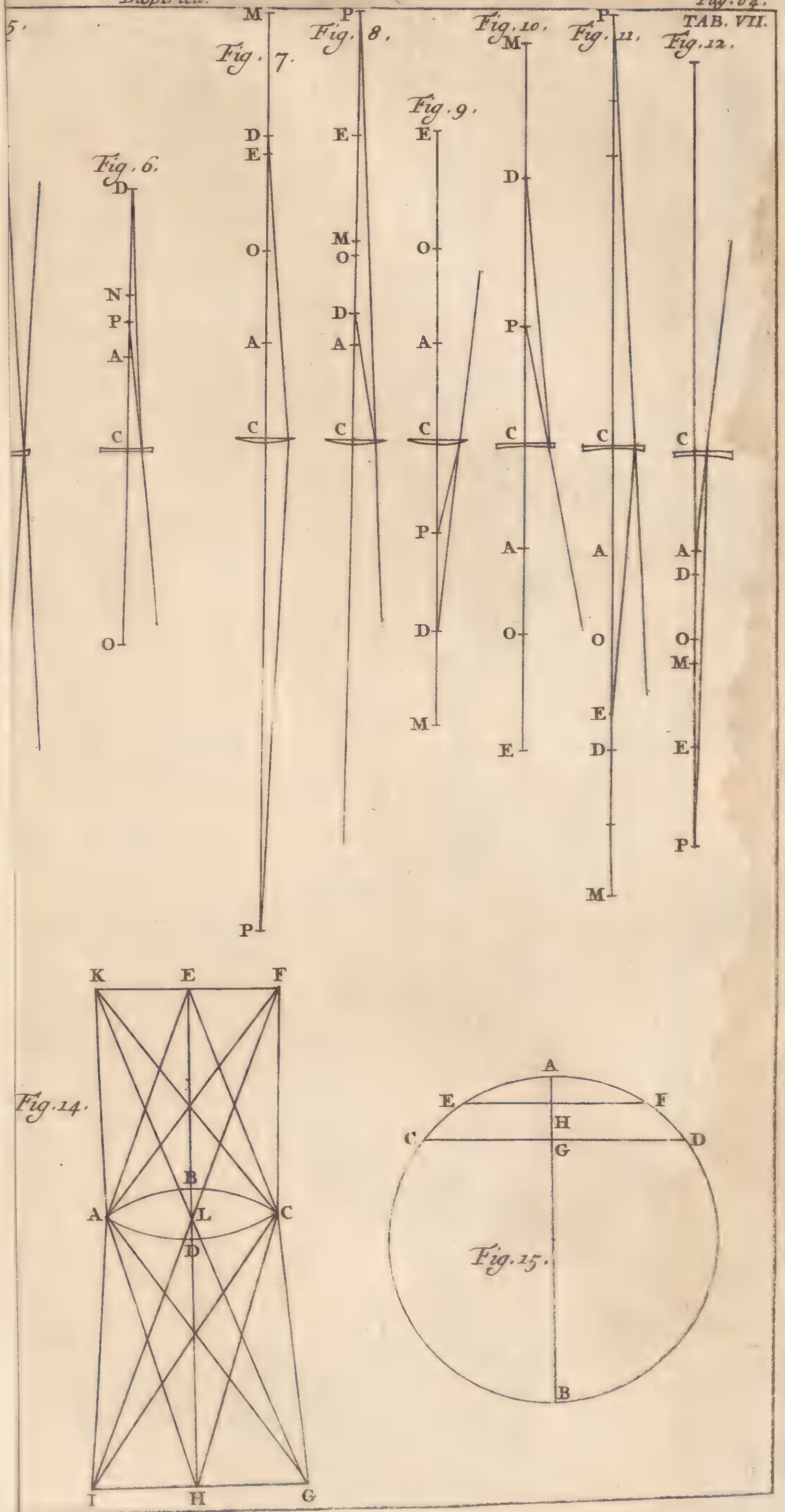
Sit arcus A D C rurſus $\frac{1}{36}$ circumferentiæ ſive 10. gr. & diameter D G partium 20000000; Erit E D partium 38053. Jam ſi diameter B F diametri D G dulpa ſtatuatur, hoc eſt, partium 40000000, invenietur E B partium 19000, quæ debebat eſſe dimidia E D, hoc eſt partium 19026. Itaque differentia tantum eſt $\frac{26}{19000}$ ſive $\frac{1}{731}$ ipſius E B, nec niſi $\frac{26}{40000000}$ diametri B F. Et ſumto minore arcu A D C, tanto exactius quadrabit dicta altitudinum ac diametrorum contraria proportio.

TAB. VIII. Fig 6. 7. *Craſſitudo lentis convexæ* dicatur intervallum quo inter ſe diſtant puncta media utriusque ſuperficiei, lateribus coeuntibus. Ita lentis A B C D cujus latera in unum circulum A C conveniunt, craſſitudo eſt B D, diſtantia nempe punctorum mediorum utriusque ſuperficiei.

TAB. VIII. Fig 8. 9. *Craſſitudo autem lentis cavæ* dicatur diſtantia circumferentiarum utriusque ſuperficiei, coeuntibus earum punctis mediis. Ita lentis D E F G H, cujus puncta media in E ſeſe contingunt, craſſitudo eſt D H vel F G, latus nimirum Cylindri utramque ſuperficiem comprehendentis.

Hoc modo enim in ſequentibus lentes conſiderabimus. Et quamvis convexæ lentes plerumque craſſitudinem aliquam in ambitu habeant, cavæ vero aliquam ſemper in medio. Eam tamen cenſebimus tantum omnium eſſe craſſitudinem, quæ ſupereſſet ſuperficiebus ſe mutuo, vel in ambitu vel in medio, contingentibus.

TAB. VII.



Propositio XXVI.

Lentes convexæ eandem foci diſtantiam habentes, cavæ vero eandem diſtantiam puncti diſperſus, ſi & latitudinem æqualem habuerint, etiam æquali erunt craſſitudine, & contra.

Sit primo lentium altera A B plano convexa, ſitque ſuperficiei A C B ſemidiameter convexitatis D C, craſſitudo lentis C E, foci diſtantia C F, quæ erit dupla C D. Lens autem altera utrimque convexa ſit G H, cujus latitudo eadem quæ lentis A B, & foci diſtantia M P æqualis C F. Dico igitur & craſſitudinem K M lentis G H æqualem eſſe E C craſſitudini lentis A B. TAB. VIII. Fig. 10. 11.

Sit enim in lente G H ſuperficiei G K H ſemidiameter convexitatis L K; ſuperficiei vero G M H ſemidiam. convexitatis M N. rectaque G H ſecet craſſitudinem lentis K M in O.

Quia igitur ut duæ ſimul L K, N M ad N M ita dupla L K ad foci diſtantiam M P*. quæ æqualis ponitur C F. Erit proinde ut duæ ſimul L K, N M ad N M ita dupla L K ad C F, ſive ita L K ad dimidiam C F hoc eſt, ad D C. Quia autem ut L K ad N M ita M O ad O K†. erit & componendo ut duæ ſimul L K, N M ad N M ita M K ad K O. Itaque & M K ad K O ut L K ad D C. Sed ut L K ad D C, ita quoque eſt C E ad K O‡, quia ſcilicet ſubtenſa G H æqualis A B; Ergo M K ad K O ut C E ad K O; ac proinde M K æqualis C E: quod erat oſtendendum.

* Prop. XVI.
† Prop. XXV.
‡ Prop. XXV.

Sit jam pro lente G H meniſcus, cujus ſuperficies cava G M H; craſſitudo autem meniſci K M erit id quo K O ſuperat M O. Poſitis itaque cæteris ut prius; quia ut exceſſus N M ſupra L K ad N M ita dupla L K ad foci diſtantiam M P*, quæ æqualis ponitur C F; Erit proinde ut TAB. VIII. Fig. 12.

* Prop. XVI.

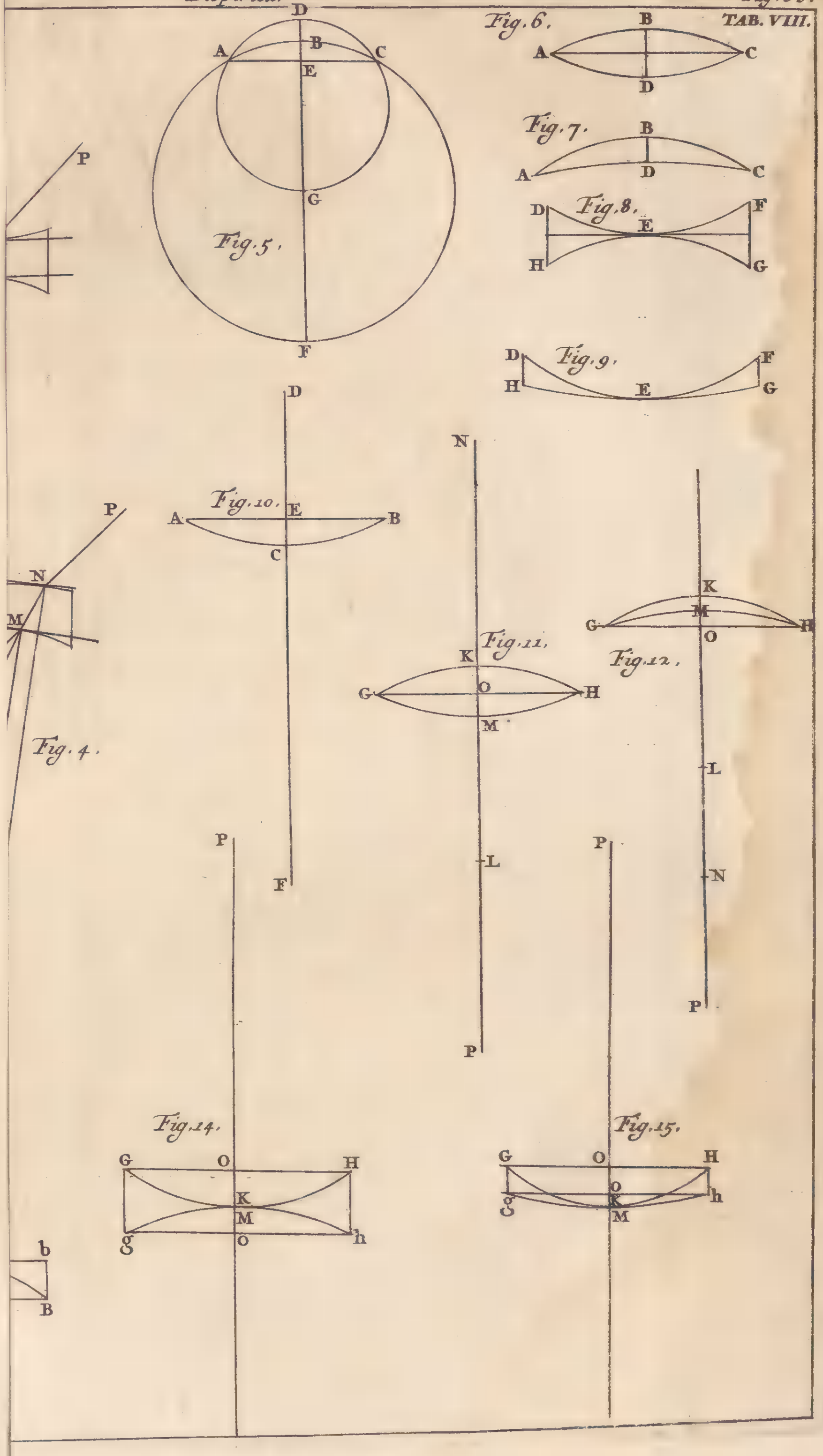
dictus exceſſus duarum NM, LK ad NM ita dupla LK ad CF, ſive ita LK ad dimidiam CF, hoc eſt, ad DC. Quia autem ut NM ad LK ita OK ad OM erit etiam ut exceſſus NM ſupra LK ad NM ita KM ad KO. Itaque & KM ad KO, ut LK ad DC. Unde porro ſicut prius in lente utrinque convexa oſtendetur quod MK æqualis CE.

Cum igitur quævis lens utrinque convexa vel meniſcus æqualem foci diſtantiam eandemque latitudinem habens atque lens plano convexa AB, etiam craſſitudinem ei æqualem habeat, ſequitur & omnes utrimque convexas, atque omnes meniſcos qui foci diſtantiam latitudinemque inter ſe æqualem habuerint, etiam pari craſſitudine futuros.

TAB. VIII. Fig. 13. 14. 15. Sit jam etiam lens plano cava ACB ba ſuperficie utraque contigua in C; ſitque rurſus ſuperficiei ACB centrum D, & CF diſtantia puncti diſperſus, quæ eſt dupla CD; craſſitudo autem ſit Aa vel CE. Lens autem altera, vel utrimque cava vel cavo convexa ſit GKH hMg æqualem ipſi AB latitudinem habens, punctique diſperſus diſtantiam PM æqualem FC. Harum autem lentium ſuperficies utræque ſeſe in puncto medio contingere ponuntur, ita ut puncta K & M in unum conveniant, ac craſſitudo lentis ſit, vel ſumma duarum KO, Mo, quæ altitudines utriusque ſphæricæ ſuperficiei referunt, vel earum differentia. Quæ craſſitudo ut æqualis oſtendatur craſſitudini CE lentis ACB ba, repetenda tantum eſt utraque præcedens demonſtratio, quarum prior convenit lenti utrimque cavæ, poſterior cavoconvexæ. Ubi obſervandum tamen ut pro foci diſtantia ſemper legatur diſtantia puncti diſperſus, & animadvertendum ſummam aut differentiam duarum KO, MO, hic eſſe Oo, cum illic fuerit KM.

Ex his vero rurſus ſequitur, veram quoque eſſe propoſitionem in quibusvis lentibus utrimque cavis, vel cavoconvexis.

PRO-


Fig. 4.
P
N
M
b
B
Fig. 5.
D
A
B
C
E
G
F
Fig. 6.
B
A
C
D
Fig. 7.
B
A
D
C
Fig. 8.
D
F
E
H
G
Fig. 9.
D
F
H
E
G
Fig. 10.
D
A
E
B
C
F
Fig. 11.
N
K
G
O
H
M
L
P
Fig. 12.
K
G
M
H
O
L
N
P
Fig. 14.
P
G
O
H
K
M
g
o
h
Fig. 15.
P
G
O
H
o
K
g
h
M

PROPOSITIO XXVII.

Oſtendere quomodo in lentibus aberrationes radiorum quæ ex figura ſuperficierum ſphærica oriuntur compendio inveniantur. Et, quænam lens ſphærica convexa melius radios parallelos colligat, inveſtigare.

Lentis ſphæricæ convexæ nomine eas intelligimus quæ radios parallelos concurrere faciunt, ſive duabus convexis ſuperficiebus conſtent, ſive convexa & plana, ſive convexa & concava. Harum vero æquales foci diſtantias habentium aliæ aliis perfectius radios parallelos verſus punctum illud qnod focus dicitur inclinant, ſumtis nimirum latitudinibus, ſeu aperturis lentium æqualibus. Quod licet in Teleſcopiorum rationibus parum referat, propter aliam aberrationem longe majorem atque alterius naturæ, de qua, ubi eo ventum erit, dicemus, habet tamen in Microſcopiorum examine & alibi utilitatem hæc cognitio, eoque non eſt prætereunda. Proportionem autem refractionis vitri ſeſqui-alteram in his ubique uſurpabimus, quæ quam proximè ejusmodi invenitur, ut in præcedentibus dictum fuit.

Incipiendo itaque a planoconvexa lente, atque eâ illius poſitione quâ ſuperficies plana radiis parallelis expoſita eſt, ubi calculi ratio omnium facillima eſt; Sit lens ejusmodi, cujus ſectio per axem ſegmentum circuli KBC, cujus circuli atque item ſuperficiei convexæ centrum ſit A, axis vero lentis ABD, ſecans bifariam arcum KC in B, & ſubtenſam KC in G, conveniatque ſuperficies convexa KBC cum plana KC in lentis margine, & propoſitum ſit examinare refractionem radii HC axi lentis paralleli atque ab eo remotiſſimi, quæ refractio ponatur eſſe CD, & conſtat quidem in hac lente tantum unam fieri in ſuperficie convexa CBK. Focus autem lentis E erit ultra punctum D, ut oſtenſum eſt prop. IX. Tab IX. Fig. I.

 In-

Invenieturque ſumendo A E triplam A B, ita enim A E ad E B habebit rationem ſeſquialteram, quæ hic eſt proportio refractionis. Inveniendum itaque eſt ſpatium D E, intra quod radiorum omnium parallelorum refractiones cum axe lentis conveniunt: etenim tanto quæque propius convenit quanto vicinior radius fuerit axi A B, ut oſtenſum propoſ. 1x. Jungatur A C, ſitque hæc ſive A B $= a$, C G $= b$, quarum utraque data eſt. A D vero ſit $= x$. Quia itaque A D ad D C habet rationem quæ refractiones metitur, erit D C $= \frac{2}{3} x$. Et ablato quadrato G C a quadrato C D, fiet quadratum G D $= \frac{4}{9} xx - bb$, & G D $= \sqrt{\frac{4}{9} xx - bb}$. Rurſus ablato eodem quadrato C G a quadrato A C, fiet quadratum G A $= aa - bb$ & A G $= \sqrt{aa - bb}$, qua addita ad G D $= \sqrt{\frac{4}{9} xx - bb}$ fiet tota A D ſive $x = \sqrt{\frac{4}{9} xx - bb} + \sqrt{aa\ bb}$. Unde invenitur $x = \frac{3}{5} \sqrt{9aa - 9bb} + \frac{3}{5} \sqrt{4aa - 9bb}$. Secundum quæ ſi A B ponatur pedum 6, ſive pollicum 72 & G C pollicis 1, invenitur x ſive A D paulo major quam $215\frac{968747}{1000000}$, qua ablata ab A E $= 216$, reliqua ſit D E paulo minor quam $\frac{31253}{1000000}$ unius pollicis. Itaque in lente hujusmodi, cujus foci diſtantia B E eſt 12 pedum, apertura vero K C duorum pollicum, radii omnes intra ſpatium D E cum axe conveniunt.

Dicatur autem intervallum iſtud D E, quo nempe radii extremi in quavis lente concurſus diſtat a foco lentis, *Aberratio radii extremi.*

Hanc porro in propoſita lente, alia quoque faciliori ratione reperiri ſciendum eſt: quandoquidem

In omni lente planoconvexa, cujus plana ſuperficies exterior eſt, aberratio radii extremi eſt quadrupla ſeſquialtera ſive $\frac{9}{2}$ craſſitudinis lentis; Exigua quidem differentiola, ſed quæ in illa lentium latitudine, quæ teleſcopiorum uſibus idonea eſt, nullius ſit momenti. Ita, in propoſita lente, ſi ſumatur D E $= \frac{9}{2}$ G B, inveniemus eam $\frac{31252}{1000000}$ unius pollicis proximè, cum ex priori calculo habuerimus $\frac{31253}{1000000}$.

In

In lente eadem inverſa, ut ſuperficies convexa primum radios inflectat, multo melior radiorum collectio invenietur. Eſt autem calculi ratio hujusmodi. Primo ſumitur BR tripla ſemidiametri BA, ut fiat R focus ſuperficiei convexæ KBC; deinde ponitur GE æqualis duabus tertiis GR; tumque erit E focus lentis KBC, ut conſtat ex propoſ. XIV. ex qua apparet inſuper foci diſtantiam GE proxime eandem quæ fuit ſuperiori lentis poſitu. Radius autem extremus HC axi parallelus a ſuperficie convexa KBC primum flectitur verſus P, ita ut CP ad PA habeat rationem quæ eſt refractionis, nempe 3 ad 2*. Deinde ex ſuperficie plana KC egrediens refringitur verſus D, ut PC ad CD rurſus habeat rationem quæ eſt refractionis†, ita ut CD proinde æqualis ſit AP. Ad inveniendam vero AP, poſitis ut ante AB $= a$; CG $= b$. AP vero $= x$; erit PC $= \frac{3}{2}x$. a cujus quadrato $\frac{9}{4}xx$ ſi auferantur quadrata PA $= xx$, & CA $= aa$, quod reſtat $\frac{5}{4}xx - aa$ æquabitur duplo rectangulo PAG, hoc eſt $2x\sqrt{aa-bb}$. Ex qua æquatione fit $x = \frac{4}{5}\sqrt{aa-bb} + \frac{4}{5}\sqrt{\frac{9}{4}aa-bb}$. Itaque inveſtigatâ ſecundum hæc AP, cui æqualem diximus CD, aufertur deinde ab hujus quadrato quadratum CG; unde relinquitur quadr. GD. ablata autem GD a GE, reſtat DE aberratio radii extremi.

Tab. IX. Fig. 2.

*Prop. II.

†Prop. III.

Eadem vero DE absque tanto calculi labore haberi poteſt, quia *In lente planoconvexa, cujus convexa ſuperficies radios parallelos excipit, aberratio radii extremi eſt $\frac{7}{6}$ craſſitudinis lentis.* atque eo tantum ſupputandi methodos deſcribimus, ut has regulas veras eſſe quivis per numeros examinare poſſit. Et in hac quidem lente poſita AB, ut ante, pollicum 72; CG pollicis, invenitur prædicto calculo DE $= \frac{81021}{10000000}$ unius pollicis proximè. Secundum regulam vero, hoc eſt, ſumtâ DE $= \frac{7}{6}$ craſſitudinis BG, fit ipſa proxime $\frac{81022}{10000000}$.

Patet autem hinc quanto minor aberratio ſit in eadem lente planoconvexa hoc modo collocata, quam ſi plana ejus

ejus ſuperficies radios parallelos excipiat; ſicut enim $\frac{7}{6}$ ad $\frac{9}{2}$ ita 7 ad 27, adeo ut aberratio ferè quadruplo minor ſit.

Poteſt etiam ſolius ſuperficiei convexæ KBC aberratio conſiderari, ut hic PR, cum R ſit focus illius ſuperficiei: Eſtque PR ſemper æqualis $\frac{4}{3}$ BG, ſive altitudinis convexi.

Tab. ix. Fig. 3. Eſto jam propoſita lens utrinque convexa, ſitque ſuperficiei IBC, quæ radios parallelos excipit, centrum A; ſuperficiei vero IMC centrum N, per quæ tranſiens axis lentis NA utrimque productus ſit. Datas autem ponimus ſemidiametros AB, NM, & ſemidiametrum lentis GC. Jam ſi E ponatur focus lentis IC, & ſumatur BR tripla BA, & MX tripla MN, debebit eſſe ut RX ad RN ita RM ad RE*. Dantur autem tres iſtæ priores RX, RN, RM. nam quia AB ſeu AC data eſt itemque CG, dabitur & AG. ſimiliterque propter datas NC, CG dabitur NG. Sed & AR datur, quippe dupla AB, & NX dupla NM. Ergo tota RX data erit, nec non RN & RM. Quare & quarta proportionalis RE data erit.

* Prop. xvi.

Ponamus jam porro radium extremum axi parallelum HC, poſt refractionem primam in ſuperficie IBC ita ferri, ut cum axe concurſurus ſit in P, altera deinde refractione in ſuperficie CMI flecti ſecundum rectam CD, quæ axi occurrat in D. Aberratio itaque radii HC eſt DE, quæ hoc modo invenietur.

Sit NZ parallela CP, atque ei occurrat producta CD in Z. Sit etiam CV perpendicularis ad NZ, & NF perpendicularis in PC productam. Primum itaque ex datis AB, CG invenitur AP, ſicut paulo ante in lente plano convexa. Eſt autem AP ad PC ut 2 ad 3, ergo & PC data erit. Ex datis autem AP & AR, datur PR; qua ablata ab RN, quam datam oſtendimus, relinquitur

PN.

PN. Sicut porro PC ad CG ita PN ad NF ſive CV, itaque & hæc dabitur.

Jam conſideranda eſt NZ tanquam axis ſuperficiei convexæ CYI, quæ radium axi parallelum FC ita flectit verſus Z, ut NZ ad ZC habeat rationem quæ eſt refractionis, hoc eſt, 3 ad 2; Unde ex datis NC & CV invenietur NZ, eodem modo atque ſuperius in prima poſitione lentis planoconvexæ. Jam vero propter triangula ſimilia ZND, CPD, erit ZN ad CP ut ND ad DP; & componendo, ZN una cum CP ad CP ut NP ad PD. datas autem oſtendimus ZN, CP, NP: ergo & PD hinc data erit. Datur autem & PR. Ergo & DR, a qua ſi auferatur RE jam ante inventa, relinquetur DE aberratio radii HC quæſita. Et hæc quidem methodus ad exactam ſupputationem adhibenda eſſet.

Invenimus autem & hic Regulam compendioſam qua, absque labore illo, lineam DE, ſicut in præcedenti lente planoconvexa, atque æque accuratè definire licet. Repertis enim tantummodo BG, GM, ex datis AB, NM, CG; ponendoque totam BM, hoc eſt, lentis craſſitudinem $\propto$ q. ſemidiametrum AB $\propto$ a; NM $\propto$ n. Erit DE $\propto$ $\frac{27aaq+6anq+7nnq}{\overline{6a+n}\,q}$ hoc eſt, ſicut ſexcuplum quadratum lineæ æqualis duabus AB, NM, ad viginti-ſeptulum quadratum AB, plus ſexcuplo rectangulo AB, NM, plus ſeptuplo quadrato NM, ita erit craſſitudo lentis BM ad aberrationem radii extremi DE. Quæ regula, ut & ſequentes quas dabimus, inventa eſt neglectis minimis, ſed neceſſario cum delectu.

Si itaque exempli gratia, lens IC fuerit æqualiter utrinque convexa, hoc eſt, ſi a, $\propto$ n, fiet DE $\propto$ $\frac{5}{3}$ craſſitudinis BM. Unde patet lentem utrimque æqualiter convexam, latitudine & foci diſtantia iisdem, cum lente planoconvexa, cujus convexum exterius ſitum ſit, non æque bene atque illam radios parallelos colligere: talium enim

nim lentium æqualis cum ſit craſſitudo, ut oſtenſum propoſ. XXVI, convenient radii in planoconvexa intra $\frac{7}{6}$ ſuæ craſſitudinis; at in hac æqualiter convexa intra $\frac{5}{3}$ ſuæ, hoc eſt, ejusdem craſſitudinis: quorum intervallorum proportio eſt ea, quæ 7 ad 10.

Quod ſi ſemidiameter A B ad N M ponatur ut 2 ad 5; hoc eſt, a partium 2, & n partium 5; fiet ex hac regula D E æqualis $\frac{7}{6}q$, ſive craſſitudinis lentis. Adeo ut hujusmodi lens æquiparanda ſit dictæ planoconvexæ. Atque ita facile in quibuslibet inæqualium convexorum lentibus inveſtigari poteſt, quanto quæque melior ſit.

Quæſita vero minimi determinatione, hoc eſt, quænam forma lentis faciat aberrationem D E reliquis minorem, invenio debere eſſe A B ad N M ut 1 ad 6; ac tum quidem fit D E æqualis $\frac{15}{14}$ craſſitudinis; adeo ut hæc lens optima omnium cenſenda ſit, quanquam planoconvexa non multum ei cedat.

Notandum autem, ſemidiametrum A B ſemper ſumi ad eam ſuperficiem pertinere quæ radios parallelos primum excipit. Nam hæc eadem lens optima, ſi invertatur, multo deterior fit, facitque aberrationem D E æqualem $\frac{145}{42}$ craſſitudinis ſuæ.

Porro ſi ex data lentis foci diſtantia, ac ſemidiametro convexi exterioris invenienda ſit aberratio D E radii extremi; ex præcedente regula habebitur alia hoc modo. Nempe ſi foci diſtantia ſit $= d$, & ſicut prius A B $= a$, N M $= n$, craſſitudo lentis $= q$. quoniam d eſt $= \frac{2an}{a+n}$ ut patet ex propoſ. XVI, erit $n = \frac{ad}{2a-d}$ quo ubique ſubrogato in locum n in Regula priori $\frac{27aaq+6anq+7nnq}{6\,\overline{a+n}^{\,q}}$ $=$ E D, fiet $\frac{27aaq-24adq+7ddq}{6aa} =$ E D.

In meniſco eadem ratio eſt ſupputandi, quæ in lente utrimque convexa, ſive convexa ſuperficies radios parallelos excipit, ſive cava; cujus utriusque caſus figuram hic

hic adſcripſimus; illud tamen obſervandum non ſummam ſed differentiam duarum NZ, CP eſſe hic ad CP, ut NP ad PD. Tab. IX. Fig. 4. 5.

Poſitis vero litterarum ſignificationibus iisdem, quæ prius, ut nempe ſemidiam. AB ſuperficiei exterioris IBC ſit a, ſuperficiei IMC ſemidiam. NM $= n$, & BM craſſitudo lentis $= q$. Regula ad inveniendam ED aberrationem radii extremi priore caſu eſt hujusmodi:

ED $= \frac{27aaq - 6anq + 7nnq.}{6\,\overline{n-a}^{q}}$ Poſteriori vero, ubi a major quam n, fit $= \frac{27aaq - 6anq + 7nnq.}{6\,\overline{n-a}^{q}}$

Secundum quæ, & meniſci quilibet inter ſe & cum lentibus utrimque convexis comparari poſſunt. Ut ſi, exempli gratia, in priore caſu, ponatur ſuperficiei cavæ ſemidiameter NM tripla ſemidiametri AB, hoc eſt, $a = 1$, $n = 3$. fiet ED $= 3\,q$, hoc eſt, tripla craſſitudinis BM. At in lente optima ſupra definita, cujus foci diſtantia ac latitudo eadem eſſet quæ meniſci IBCM, ac proinde eadem quoque craſſitudo*, aberratio DE tantum $\frac{15}{14}$ haberet craſſitudinis ſuæ; itaque apparet meniſcum hujusmodi fere triplo deterius radios parallelos colligere, quam lens illa omnium optima. Fig. 4.

* Prop. XXVI.

Sed nec ullus meniſcus tantum præſtat quantum lens planoconvexa, cujus ſphærica ſuperficies extrorſum collocatur; & tanto quisque pejor eſt, quanto magis cavam ſuperficiem alteram habuerit, eâdem ſcilicet manente foci diſtantia ac latitudine: quod in priore quidem caſu ſic fiet manifeſtum. Sit rurſus foci diſtantia $= d$. Ergo quia hæc æqualis eſt $\frac{2an}{n-a}$, ut patet ex propoſ. XVI., erit $a = \frac{dn}{2n+d}$, quo ſubſtituto ubique in locum a in Regula harum priori, fiet DE $= \frac{7ddq + 4dnq + 7nnq}{6nn}$, ſive $\frac{7ddq}{6nn} + \frac{2dq}{3n} + \frac{7}{6}q$. Ubi facile perſpicitur quo minor ſumetur n, hoc eſt, ſemidia-

midiameter N M, eo majorem fore D E. Et quantumlibet magna ſumetur n, ſemper D E majorem fore quam $\frac{7}{6}q$.

Secundo caſu, cum nempe cava ſuperficies meniſci extrorſum converſa eſt, quia foci diſtantia $d = \frac{2an}{a-n}$, erit $n = \frac{ad}{2a+d}$; quo ubique ſubſtituto in locum n in poſteriori regula fit $DE = \frac{27aaq+24adq+7ddq}{6aa}$ ſive $\frac{9}{2}q + \frac{4dq}{a} + \frac{7ddq}{6\,aa}$. Ubi manifeſtum eſt, quo minor ſumetur a, hoc eſt, ſemidiameter ſuperficiei cavæ, eo majorem fieri D E. Et quantumvis magna ſumetur a, ſemper D E majorem fore quam $\frac{27}{6}q$ ſive $\frac{9}{2}q$. adeo ut lens planoconvexa, licet plana ſuperficies extrorſum collocetur, ſemper tamen melior ſit meniſco, cujus cavitas itidem extrorſum converſa ſit. Oſtenſum enim eſt, eam lentem facere aberrationem $DE = \frac{9}{2}$ craſſitudinis ſuæ.

Propositio XXVIII.

Concavarum lentium quænam melius radios parallelos diſpergant inveſtigare.

Concavarum nomine omnes eas lentes intelligimus, quæ radios parallelos diſpergere aptæ ſunt, etſi alteram ſuperficierum planam, aut etiam convexam habeant. Earum vero tanto melius quæque diſpergere radios dicenda eſt, quanto propius ita eos inclinat ut tanquam ab uno puncto manare videantur, ſive ut refractiones eorum retro productæ intra minimum ſpatium cum axe lentis conveniant.

Tab. IX. Fig. 6. Sit primum lens planoconcava KBCOI, ſuperficie plana OI radios parallelos excipiente, centrum vero ſuperficiei concavæ ſit A, axis lentis ABE; radius autem axi parallelus extremus ſit HO, qui planam quidem ſuperfi-

perficiem irrefractus tranſibit. Ex cava autem egrediens ita frangatur ut pergat ſecundum C L, quæ retro producta conveniat cum axe in D. Punctum autem diſperſus lentis ſit E, quod invenitur ponendo B E duplam B A, ut conſtat ex prop. XI.

Ex qua etiam apparet, radios omnes parallelos qui minus ab axe diſtant quam H O, propius concurrere ad punctum E quam L C D, ſi nempe ſimiliter refractiones eorum retro producantur. Eſt itaque lentis hujus aberratio D E, quæ ut inveniatur, eadem eſt calculi ratio atque in lente planoconvexa. Producta enim H C verſus Q, factaque C G perpendiculari ad A B, junctaque C A, ſi putemus lentem planoconvexam eſſe K B C G, in quam cadat radius axi parallelus Q C, neceſſe eſt eum ita refringi in C, puncto ſuperficiei K B C, ut refractio ejus ſit in directum refractioni C L radii H C*. Itaque incedet ſecundum C D., cujus proinde concurſus cum axe A E, eodem calculo quo ſupra in lente planoconvexa inveſtigabitur. Quemadmodum igitur illic, ita & hic erit aberratio E D 2|2 $\frac{9}{2}$ craſſitudinis lentis O C, ſive B G. quæ craſſitudo invenitur, ut illic, ex datis A B, C G.

*Prop. 1.

At in eadem lente contrario modo collocata, ut nempe ſuperficies cava K B C radios parallelos excipiat, duæ ſunt radiorum refractiones. Radius enim H C, primum in C frangitur, ferturque inde ſecundum C X, quæ retro producta cum axe conveniat in P, ac rurſus ex plana ſuperficie egrediens in X pergit ſecundum X L, quæ retro producta convenit cum axe citra punctum P, puta in D. Eſt autem diſtantia B E puncti diſperſus lentis ſic poſitæ dupla rurſus B A: Inveniturque aberratio radii extremi E D hoc pacto.

Tab. IX. Fig. 7.

Primum refractio radii H C facta in ſuperficie cava K B C, nempe C X, in eandem rectam convenit cum refractione radii O C axi lentis paralleli, ſi ſuperficies C B K convexa foret, adeoque invenietur A P intervallum quo

diſtat concurſus productæ CX, a centro A, eodem modo, atque ſupra in lente planoconvexa; eſtque hic rurſus AP ad PC ut 2 ad 3. Ergo & PC dabitur. Sicut autem GP ad PC, ita BP ad PX. Ergo & hæc data erit, & ex eadem triangulorum ſimilitudine dabitur & BX. Jam vero cum ſecundâ refractione radius CX ita inflectatur in XL, ut concurrente ea cum axe in D, ratio PX ad XD ſit eadem quæ refractiones vitri metitur, nempe quæ 3 ad 2; dataque ſit PX. etiam XD dabitur, a cujus quadrato auferendo quadr. BX, habebitur quadr. BD, unde & ipſa BD, ac proinde & DE.

TAB. X. Fig. 1. Eſt autem ſicut in lente planoconvexa, cujus ſphærica ſuperficies exterior ponitur, ita & in hac lentis concavoplanæ poſitione aberratio ED proximè $\frac{7}{6}$ craſſitudinis CO ſive GB. Adeo ut hoc modo longe melius radios parallelos hæc lens cava diſpergere dicenda ſit, quam cum ſuperficie plana illos primum excipit.

Eſto jam lens utrinque cava IBCKB*i*. Sitque ſuperficiei IBC, quæ parallelos radios excipit, centrum A; alterius vero ſuperficiei *i*BK centrum N. per quæ tranſiens axis lentis NA utrimque productus intelligatur. Datis igitur ſemidiametris AB, NM, dabitur & BE diſtantia puncti diſperſus radiorum parallelorum. factis enim BR tripla BA, & MX tripla MN, conſtat eſſe ut RX ad RN, ita RB ad RE*; unde RE, ac proinde & EB, datam eſſe liquet.

*Prop. XVII.

Ponamus porro radium extremum HC, axi parallelum, poſt refractionem primam in ſuperficie IBC, ita ferri ſecundum CX, ut retroproductus conveniat cum axe in P. Altera vero refractione, in ſuperficie *i*MK, flecti eum ſecundum XL, quæ retro producta conveniat cum axe in D. Aberratio itaque radii extremi HC eſt DE, quam paulo alia ratione hic inveniri oſtendemus, quam in lente utrinque convexa. Sed prius animadvertendum eſt, licet ſuperficies *i*MK ad X producta intelligatur, at-

que

que ita paulo amplius pateat quam ſuperficies IBC, craſſitudinem tamen lentis eam hic ſtatui $G\gamma$ quæ eſt æqualis CK, parti nimirum rectæ HC inter ſuperficiem utramque interceptæ. Sicut & apertura lentis dupla CG cenſenda eſt, non vero diſtantia dupla ab axe puncti X.

Sit jam NZ parallela CP, atque ei occurrat producta XD in Z. ducatur deinde XV perpendicularis ad NZ, & NF ad PX productam.

Primum itaque ex datis AB, CG, inveniuntur AP, PC, ut modo in lente planoconcava. Ex datis autem AP, AR datur PR, qua ablata ab RN, quæ data eſt, relinquitur PN. Porro ſicut PC ad CG, quæ datæ ſunt, ita PN ad NF, cujus quadrato ſubtracto a quadr. NX, reliquum erit quadratum XF: Sicut autem PC ad PG (quæ data eſt, propter datas AP, AG) ita PN ad PF, a qua ſi auferatur inventa XF, ſupererit PX. Conſideratâ jam rurſus NZ tanquam axe ſuperficiei cavæ XM*i*, quæ radium CX ita flectit, ut producta XL ad Z, ſit NZ ad ZX ut 3 ad 2, invenietur ex data ſemidiametro NX & VX, quæ æqualis eſt inventæ NF, diſtantia NZ, eodem modo atque ſupra, in lente planoconvexa ac poſitione ejus prima. Propter triangula autem ſimilia DPX, DNZ, erit ut NZ ad PX ita ND ad DP, & componendo ut utraque ſimul NZ, PX ad PX ita NP ad PD. qua addita ad datam PR, & ablata ab utrisque RE, ſupererit ED quæ requirebatur. Et hæc quidem calculi ratio exacta.

Verum eadem ED, regulâ prorſus ſimili atque in lente utrinque convexa, invenitur abſque illo calculi labore. Nam poſita ut illic AB $\propto a$; NM $\propto n$, & craſſitudine lentis quæ hic eſt CK ſive $G\gamma \propto q$, fit ſemper ED $\propto \frac{27aaq + 6anq + 7nnq}{6a + n} - q$, tam prope nimirum, ut nullius momenti ſit differentia reſpectu ipſius ED.

Secundum hæc, omnes lentes utrimque cavæ inter ſe com-

comparari poſſunt, ac quanto quæque melius radios diſpergat reperiri. Optima autem ex minimi determinatione invenietur, quæ hic neceſſario eadem eſt atque in lente utrimque convexa; ut nempe ratio a ad n, hoc eſt, ſemidiametri AB ad NM, ſit ea, quæ 1 ad 6. Adeo ut hujusmodi lens ad corrigendam Myopum viſionem omnium optima cenſeri debeat. Nec non ad radios, qui ad unum aliquod punctum feruntur, parallelos efficiendos.

Sed quoniam in teleſcopiis lens anterior convexa non perfectè ad punctum unum radios inflectit, hinc fit, ut ſi cava quæratur quæ optime ad parallelismum eos reducat, atque ita ad oculum transmittat, nequaquam illa quam diximus rationis ſexcuplæ deligenda ſit, ſed aliæ minus perfectæ, quarum nempe vitiis compenſantur ac corriguntur vitia lentis convexæ.

Sunt autem iſtæ imperfectiores, ſed uſu meliores, quibus ſuperficies altera convexa, altera ex minori ſphæra concava, in quibus calculi methodus eadem plane quæ in lente utrimque cava. Duplex autem caſus; quia vel cava ſuperficies radiis parallelis obvertitur, vel convexa, ut in
Tab. X. Fig. 2.3. adjectis ſchematis videre eſt. In quibus obſervandum, non ſummam ſed differentiam duarum ZN, XP eſſe ad XP, ſicut NP ad PD.

Poſitis vero litterarum ſignificationibus iisdem quæ in lente utrimque cava, ut nempe ſemidiameter AB, ſuperficiei quæ primum radios accipit, ſit a, ſemidiameter ſuperficiei alterius NM ſit n; craſſitudo lentis CK, ſive Gγ dicatur q; Regula ad inveniendam aberrationem radii extremi ED, priori caſu erit iſta, $ED \; 2|2 \; \frac{27aaq - 6anq + 7nnq}{6\,\overline{n-a}^{\,q}}$. Poſteriori vero ubi a major quam n, erit hæc $ED \; 2|2 \; \frac{27aaq - 6anq + 7nnq}{6\,\overline{a-n}^{\,q}}$.

Quas apparet plane easdem eſſe quas ante in meniſcis dedimus. Poterimus autem, ſecundum has, comparationem

nem inſtituere lentium hujusmodi cavarum, & quanto quæque majorem aberrationem faciat definire. In univerſum vero oſtendi poteſt, lentem eandem convexoconcavam ita collocatam, ut in caſu horum poſteriore, ut nempe ſuperficies convexa radios parallelos accipiat, minus benè eos diſpergere, quam ſi aliter inverſa ſit. Si enim in Schemate horum utroque, lens eadem ſed diverſo poſitu intelligatur, ſitque proinde NM caſu poſteriore (*fig.* 3.) æqualis AB in priore, (*fig.* 2) ac utraque dicatur a; item AB in poſteriore (*fig.* 3.) æqualis NM in priori (*fig.* 2.), atque utraque dicatur n: manifeſtum eſt, poſteriore caſu fore jam ED $\propto$ $\frac{27nnq\ 6anq + 7aaq.}{\overset{\text{——}q}{6n-a}}$ At priore erat ED $\propto$ $\frac{27aaq - 6anq + 7nnq.}{\overset{\text{——}q}{6n-a}}$ Ergo cum n ſit major quam a, ideoque $27\ nn + 7\ aa$ major quam $27\ aa + 7\ nn$, apparet ED poſteriore caſu ſemper majorem fore quam priori. Atque idem in meniſco diverſimode collocato obtinere perſpicuum eſt.

Qua porro ratione Meniſcus quisque tanto pejus radios colligere oſtenſus fuit, quanto magis cavam ſuperficiem alteram habuerit, manente eadem foci diſtantia ac latitudine lentis eâdem, poterit & hic de lente convexoconcava oſtendi, tanto pejus eam radios parallelos diſpergere, quanto magis convexam alteram ſuperficiem habuerit. Etenim cum hic, priore caſu, ſit puncti diſperſus diſtantia ME, quæ dicitur d, æqualis $\frac{2an}{n-a}$ ideoque $a \propto \frac{dn}{2n+d}$, fiet ex priore regula, ſubſtituto ubique $\frac{dn}{2n+d}$ in locum a, DE $\propto$ $\frac{7ddq + 4dnq + 7nnq}{6nn}$ ſive $\frac{7ddq}{6nn} + \frac{2dq}{n} + \frac{7}{6}q$. Ubi patet, quanto minor ſumetur n, tanto majorem fore DE, ac ſemper majorem fore, quam $\frac{7}{6}q$.

Rurſus ſecundo caſu, cum ſit $d \propto \frac{2an}{a-n}$, erit $n \propto \frac{ad}{2a+d}$, quo ubique repoſito in locum n in poſteriore regula, fit DE $\propto$ $\frac{27aaq + 24adq + 7ddq}{6aa}$ ſive $\frac{9}{2}q + \frac{4dq}{a} + \frac{7ddq}{aa}$. Ubi apparet,

quo

quo minor ſumetur a, eo majorem iterum fieri DE: Eamque ſemper majorem fore quam $\frac{2}{3}q$. Et hæc quidem ad examinandam cujusque convexæ aut cavæ lentis, in colligendis aut diſpergendis radiis facultatem ac præſtantiam, quorum antequam utilitatem oſtendamus, Theoremata duo ſequentia præmittenda ſunt.

Propositio XXIX.

In lentibus diverſarum latitudinum, convexis aut concavis, quæ ſuperficies radiis expoſitas ex eadem ſphæra habuerint, itemque adverſas ſuperficies ex eadem ſphæra licet a priori diverſa, vel quæ alteram harum ſuperficierum planam habuerint; Aberrationes radiorum extremorum axi parallelorum ſunt inter ſe, ſicut lentium craſſitudines, ſive etiam ut latitudinum quadrata.

TAB. X. Fig. 4. CRaſſitudines lentium hujusmodi eſſe inter ſe ſicut quadrata latitudinum, facile oſtenditur ex demonſtratis propoſ. XXIV. Si namque ſint utrimque convexæ, ut primum par hic depictarum, ACDB, FHGK, quarum craſſitudines ſeu axes CD, HK. hic ergo ductis AB, FG, rectis quæ latitudines lentium definiant, ſecentque CD, HK in E & L; conſtat, quia ſegmenta ACBE, FHGL ſunt æqualium circulorum, fore eorum altitudines CE ad HL, ut quadr. AB ad quadr. FG*; tam prope nimirum in exiguis hujusmodi circulorum portionibus, ut nullius momenti ſit differentia. Eadem ratione & DE erit ad KL, ut quadr. AB ad qu. FG, ac proinde & tota CD ad HK, ut quadr. AB ad qu. FG.

*Prop. XXIV.

TAB. X. Fig. 5. In meniſcis autem, qui ſecundo loco hic ponuntur, concludemus & differentiam duarum CE, DE, eſſe ad differentiam duarum HL, KL, hoc eſt, craſſitudinem CD ad HK, ut quadr. AB ad quadr. FG.

In

In lentibus utrimque cavis, quarum ſuperficies A C B, a D b ſeſe contingere ponuntur, itemque F K G, f K g: quarumque craſſitudines E e & L l, eadem eſt demonſtratio, quæ in utrimque convexis. Tab. X. Fig. 6.

Et in cavoconvexis eadem, quæ in meniſcis.

Quod ſi vero vel convexarum vel cavarum lentium altera ſuperficies plana fuerit, manifeſta ex his, quæ dicta ſunt, eſt demonſtratio. Tab. X. Fig. 7.

Supereſt ut oſtendamus, aberrationes radiorum extremorum in unoquoque pari eſſe inter ſe, ut lentium craſſitudines; quod in planoconvexis & planoconcavis quidem ita ſe habere manifeſtum eſt, cum in his aberratio radii extremi ex ſupraſcriptis ſit vel $\frac{3}{2}$ craſſitudinis lentium, ſi nempe plana ſuperficies radios parallelos excipiat, vel $\frac{7}{6}$ ejusdem craſſitudinis, ſi ſphærica ſuperficies radiis dictis exponatur. At in lentibus reliquis mixtis, quum ex Regulis ſupra traditis appareat, manentibus iisdem ſemidiametris utriusque ſuperficiei, eandem etiam manere rationem craſſitudinis lentis ad aberrationem radii extremi, E D; ſequitur, eadem proportione, aberrationem hanc imminui qua decreſcit lentis craſſitudo; hoc eſt, ſecundum rationem quam habent latitudinum quadrata; Exempli gratia, cum in lente utrimque convexa dixerimus eſſe ſicut ſexcuplum quadratum compoſitæ ex ſemidiametris utriusque convexitatis ad vigintiſeptuplum quadratum A B, plus ſeptuplo quadrato N M, plus ſexcuplo rectangulo A B, N M, ita craſſitudinem lentis ad aberrationem E D; apparet, rationem quæ eſt inter has eandem manere, manentibus ſemidiametris A B, N M iisdem; ac proinde ſicut craſſitudines lentium talibus convexis præditarum, ita eſſe inter ſe earum aberrationes. Tab. IX. Fig. 3.

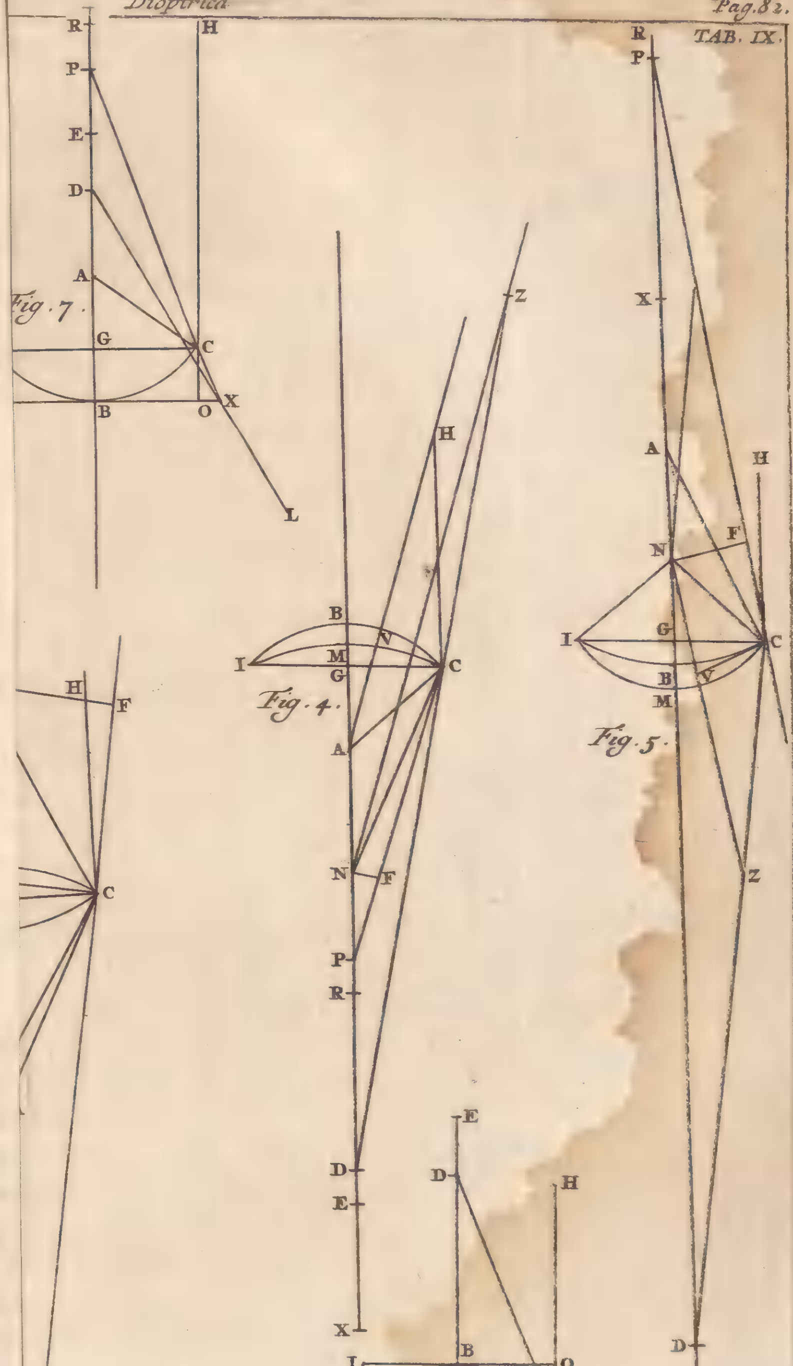
Propositio XXX.

In lente quavis convexa aut cava, aberrationes radiorum axi parallelorum ſunt inter ſe, ſicut quadrata diſtantiarum eorundem radiorum ab axe.

Tab. X. Fig. 8. IN cavis lentibus facilior hujus rei eſt demonſtratio, pendetque a proximè præcedenti. Sit enim lens cava ACBDCF, cujus axis CE: punctum diſperſus F: Radiusque axi parallelus in B punctum incidens ita diſpergatur, ut retro productus conveniat cum axe in G; alius vero radius parallelus axi, ſed propinquior incidens in H punctum diſpergatur, ita ut productus retro conveniat cum axe in K. Ut igitur appareat aberrationem EG eſſe ad EK, ſicut quadr. diſtantiæ puncti B ab axe, ad quadr. diſtantiæ puncti H; conſiderandum eſt ita ſe rem habere, ac ſi ſint lentes duæ diverſæ DBA, NHF, quarum dimidiæ latitudines ſint dictæ diſtantiæ punctorum B & H ab axe. Cumque ſphæricæ ſuperficies utrique lenti ſint eædem, patet ex prop. præcedenti, craſſitudines earum BD, HN, ita eſſe inter ſe ſicut quadrata illarum latitudinum. Sicut autem craſſitudines BD, HN, ita ſunt inter ſe & aberrationes EG, EK; Ergo & harum ratio eadem eſt quæ quadratorum, a diſtantiis punctorum B & H ab axe.

Tab. X. Fig. 9. Non abſimilis quoque demonſtratio eſt in lente planoconvexa, cum plana ſuperficies radiis parallelis oppoſita eſt. Si enim ſit lens hujuſmodi ACB, axem habens DE, focum E, in qua refringantur radii paralleli qui incidunt in puncta B & H, ſuperficiei convexæ, poſtquam planam AB irrefracti tranſierint: occurrant autem axi in G & K. Hîc igitur ductâ HN perpendiculari ad axem DC, rurſus tanquam duæ lentes planoconvexæ conſiderandæ ſunt, quarum craſſitudines DC & NC. Sicut autem

TAB. IX.



tem quadratum BD ad quadratum HN, ita eſt DC ad NC; & ſicut DC ad NC, ita aberratio EG ad EK, cum EG æquetur $\frac{9}{2}$ DC, & EK, $\frac{9}{2}$ NC. Ergo ſicut quadr. BD ad quadr. NH, ita quoque aberratio EG ad EK.

Sit autem nunc eadem lens contraria ratione diſpoſita, ut nempe radii paralleli incidant primum in ſuperficiem convexam ACB, cujus ſemidiameter ſit IC. Focus ergo E invenitur ſumta primum CR tripla CI, ac deinde poſita DE æquali $\frac{2}{3}$ DR. Ponatur radius extremus axi parallelus incidens in B, convenire cum axe in G, adeo ut aberratio ejus ſit EG, radius vero parallelus incidens in punctum H, feratur inde ſecundum rectam HP quæ ſecet ſuperficiem AB in S, ubi, facta altera refractione, conveniat cum axe in K, adeo ut aberratio radii hujus ſit EK. Oſtendendum eſt igitur, quod ſicut quadr. BD ad quadr. HN ita aberratio EG ad EK: ducatur HQ parallela SK, atque occurrat axi in Q. Sit etiam HT parallela axi CD, quæ ſuperficiei AB occurrat in T; ac denique producta KS occurrat ipſi HT in V.

Quod ſi jam conſideretur tanquam lens alia planoconvexa HCFN, ejus focus O invenietur ſumendo NO æqualem $\frac{2}{3}$ NR. Radius autem ejus extremus axi parallelus qui incidit in H, primaque refractione in ſuperficie BCA flectitur verſus punctum P, is neceſſario, poſt ſecundam refractionem, in ſuperficie plana HN feretur ſecundum HQ, quia hæc parallela eſt SK, ſecundum quam incedit refractus a ſuperficie BD. Eſſet itaque QO aberratio radii extremi lentis HCFN, quam conſtat eſſe ad aberrationem GE radii extremi lentis ACB, ſicut quadr. HN ad quadr. BD*. Quare ſi oſtendatur aberrationem EK radii HH, trans lentem ACB miſſi, æqualem eſſe aberrationi OQ, patebit etiam eſſe quemadmodum quadr. BD ad qu. HN, ita aberrationem EG ad EK. Illud vero ſic oſtenditur: quum PS ad SK habeat eamdem proxime rationem quam PD ad DK; ratio au- *Prop. præc.

tem PS ad SK ſit ut 3 ad 2 †., erit & PD ad DK ut 3 ad 2 proximè. Sicut autem PD ad DK, ita eſt HT ad TV, propter ſimilitudinem triangulorum SPD, SHT, & SKD, SVT. Ergo & HT ad TV proxime ut 3 ad 2; ac proinde HV proxime pars tertia HT. Sed HV æqualis eſt QK. Ergo & QK ſimiliter pars tertia HT vel ND. Cum vero ex conſtructione ſit RE pars tertia RD; & RO pars tertia RN; erit & differentia duarum RE, RO, nempe OE, pars tertia differentiæ duarum RD, RN, quæ eſt DN. Itaque apparet OE æqualem eſſe QK. Quare ſi utrique addatur OK, vel utrimque auferatur (nam & hoc contingere poteſt) erit & KE æqualis QO; quod oſtendendum ſupererat. Hæc autem intelligenda ſunt ita ſe habere, neglectis minimis differentiis quæ reſpectu ipſarum KE, QO nullius momenti ſunt. Qua ratione theorema, in cæteris quoque omnibus convexis caviſque lentibus, verum erit, ut calculo analytico comperimus.

† Prop. XX.

PROPOSITIO XXXI.

Oculi conſtructionem, & quæ ſit videndi ratio, explicare.

Tab. X. Fig. 10.

PErpenſis quæ ſuperius prop. XXI. expoſuimus, videtur hoc modo non abſurde oculum fabricari potuiſſe; nempe hemiſphærii figuram tribuendo parti ejus exteriori ABC, quæ tota ſit pellucida: fundum vero oculi alterum hemiſphærium faciendo DEF, priori oppoſitum, ſed idem centrum habens, ſemidiametrum vero ME triplam ponendo ſemidiametri MB, minoris hemiſphærii; ac totam deinde cavitatem DABCFED aqueo humore replendo. Hoc pacto enim radii, a quibuslibet rerum procul poſitarum punctis manantes, ut H, G, I, fractique in ſuperficie ABC, ad totidem puncta cavi hemiſphærii

DEF

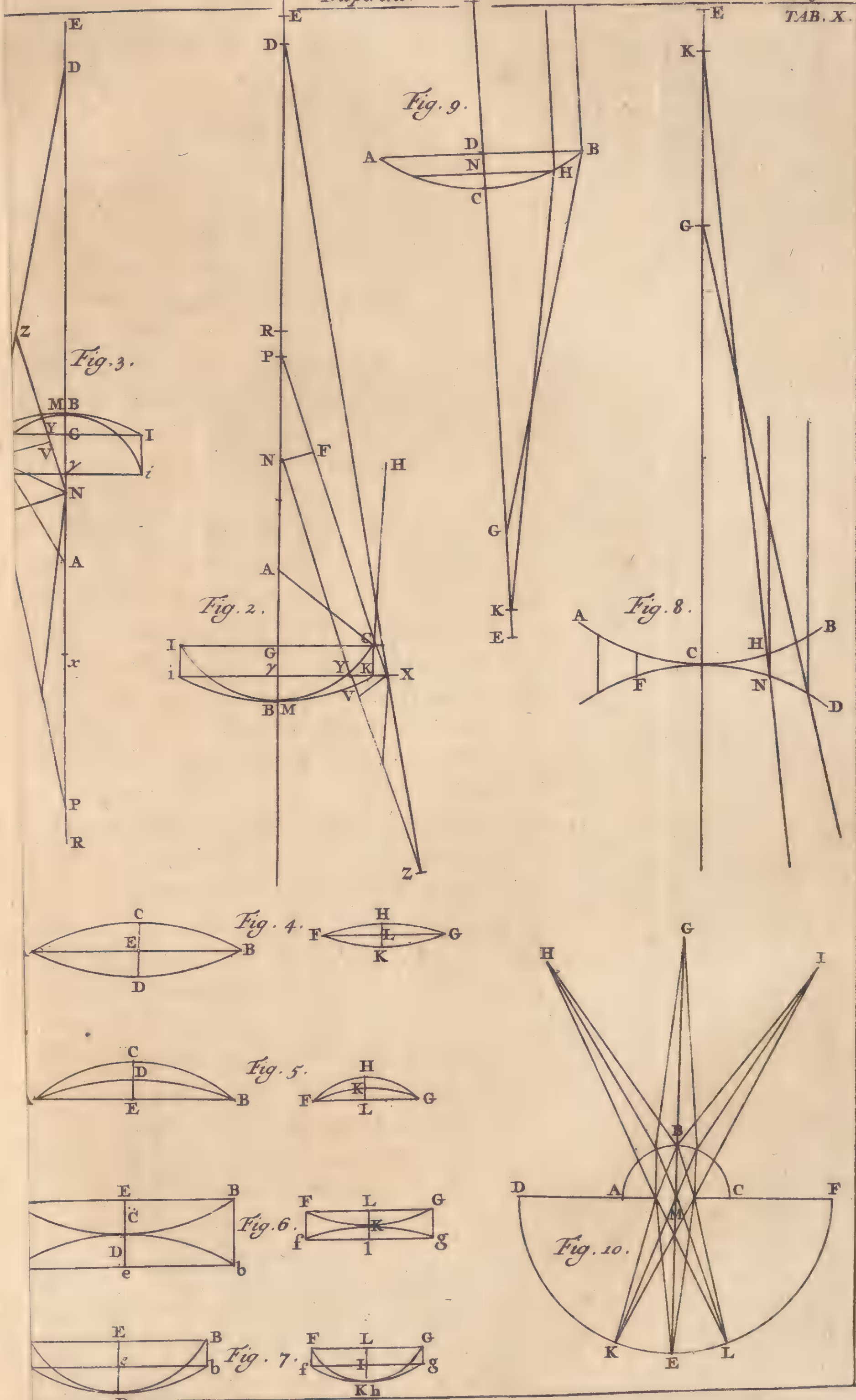
DEF collecti fuiſſent; nempe qui ex G in E, qui ex H in L, qui ex I in K. Quoniam autem non ſatis perfecta eſt, quæ fit a ſphærica ſuperficie, radiorum collectio, niſi eorum tantum qui axi proximi incedunt; oportune remedium ei rei adhiberi poterat obvelando totam hemiſphærii minoris baſim A C, præterquam circa centrum M, ubi foramen modicum relinquendum erat; hoc enim multo melius quam ſi exterior ſuperficies A B C contegatur, relicto circa B foramine; quia tunc ſuperficies A B C non æque bene comparata fuiſſet ad excipiendos radios a punctis H & I venientes, atque ad illos ex G, ad quos omnes nunc eodem modo ſeſe habet, facto foramine ad M. Hæc igitur oculi constructio non aliena prima fronte cenſeri poſſet; in qua tamen, aliqua prudenter mutaſſe ſummi Opificis providentiam, aliqua etiam neceſſario addidiſſe deinceps videbimus, etſi adeo ſubtili ratione in his verſata ſit, ut non in omnibus artificium ejus aſſequi liceat. Ac primum quidem, non totum hemiſphærium A B C adhibere voluit, ſed retenta parte ſuperiori, circa latera multum abſtulit, neque eo tamen ſpatium quod uno obtutu viſus comprehendit, anguſtius effecit. Cauſa autem auferendi erat, ut & hemiſphærii D E F partes circa D & F introrſum reduceret, atque ita oculum ad ſphæræ rotunditatem, quatenus id fieri poſſet, formaret. Volebat enim mobilem eſſe, ut in cavo quo continetur quaquaverſum convolvi poſſet. Figuram igitur exteriorem dedit hujusmodi, qualem ſchema hoc alterum exhibet, quod oculum hominis per axem diſſectum refert, duplicata omnium magnitudine quo clarius paterent. TAB. XI. Fig. 2.

Hîc corneæ pars pellucida eſt A B C; reliqua majoris ſphæræ & opaca A T Y C, quæ exteriorem oculi tunicam componit. Intra hanc duas alias Anatomici diſtinguunt, quarum intima, ex tenuiſſimis nervi optici V T fibris contexta, ac circa fundum oculi K E L albeſcens, retina dicitur. Cæterum cavitatem oculi non uno liquore, ſed

 tribus

tribus inter ſe diverſis complevit; quorum, qui ſpatio ABCFNORDA continetur plane fluidus eſt; qui vero ſpatio DRPNFLKD paulo craſſior, inſtar ovi albuminis; tertius autem, qui lenticulam conſtituit RONP, ſecundo liquori adhærentem, & filamentis DR, NF circum undique extentis affixam, durus quodammodo, ſicut albumen igni coctum; verum pellucidus plane, uti reliqui duo. Differt autem ab illis etiam refractione, quam aliquanto majorem habet, unde fit ut radii, qui extrinſecus a punctis H, G, I, venientes, atque in corneæ ſuperficie ABC fracti, jam convergebant, exiguam iterum refractionem patiantur in utraque lentis OP ſuperficie, qua quidem paulo magis adhuc convergunt, atque ita, ut in totidem punctis L, E, K, in fundo oculi referant illa, unde venerunt, puncta H, G, I. Ac fortaſſe quidem, ſecunda illa refractione in lente RN, ita radii diriguntur, ut recipiendæ rerum picturæ apta jam ſit cavitas ſuperficiei KEL, quæ alioqui è majori ſphæra eſſe deberet, ſicut in priori figura effiċta fuit. Verum & alia major fuit neceſſitas adhibendæ lentis hujus, nempe ut ejus auxilio æque ad res longinquas, ac in proximò ſitas, oculus adaptaretur; quod in noſtro illo ſuperius expoſito oculo deerat. Hoc autem fieri poteſt duobus modis; ut vel accedat propius ad corneæ ſuperficiem dicta lens cum res prope poſitæ contuendæ ſunt, vel ut in formam paulo convexiorem colligatur; vel etiam ut utrumque accidat. Quod ſi accedit ad corneam, id fieri oportet prementibus oculi latera muſculis, atque una humorem vitreum, cui lens RN inhærere dicta eſt. At ſi figuram mutare lens eadem dicatur, rotundiorque fieri cum ad res prope admotas reſpicimus, videntur preſſo a muſculis oculo remitti filamenta DR, NF, quæ prius undique eam tendentia planiorem efficiebant. Poteſt autem, ut jam dixi, & utrumque horum ſimul fieri. Porro pupillæ M locum, non ita ut nos ſupra, in centro convexitatis ABC ſta-

TAB. X.



ſtatuit, ſed propius paulo illi admovit, incertum qua de cauſa, niſi quod & hoc aliquid facere poteſt, quo ſuperficies retinæ KEL, ea qua nunc eſt cavitate, apta ſit recipiendis imaginibus, cum alioqui amplioris ſphæræ eſſe debuiſſet. Diametrum ſphæræ totius AL invenio unciam circiter eſſe pedis noſtri Lugdunenſis, qui pæne idem eſt ac vetus Romanorum; unciæ vero tres quintas habet diameter convexitatis corneæ ABC. Pupillæ M latitudo certam menſuram non habet; eſt enim, uti quivis experiendo explorare poteſt, major cum minor lux oculo affulget, ſoloque lucidæ rei aſpectu contrahitur, vel item, cum ea, quæ prope oculo admoventur, intueri conamur. Inſigni autem artificio ita fabricata eſt, ut, mutata magnitudine, ſemper ſibi conſtet rotunditas. Sed in hæc inquirere non eſt noſtri inſtituti; multoque minus quomodo, quæ in fundo oculi pictura viſibilium formetur, inde ad cerebrum mentemque noſtram perferatur; cumque inverſa ſit, rectas tamen res nobis videri faciat; utque oculis duobus, non tamen duplices; quæ & obſcuriora omnia arbitror, quam ut mortalium ulli perveſtigari queant.

Propositio XXXII.

Senum & Myopum oculis auxilium comparare lente vitrea.

Ex his, quæ de conſtructione oculi ac videndi ratione explicuimus, facile eſt porro colligere, quomodo affecti eſſe debeant oculi eorum, qui tantum remota diſtincte cernunt; vel qui tantum proxima, ut Myopes. Cum enim radiorum e propinquo puncto venientium concurſus, neceſſariò longius abſit a ſumma oculi ſuperficie, quam eorum qui a longe remoto adfluunt, non poterit, & longinquæ rei & propinquæ, in eodem oculo perfecta imago depingi,

pingi, niſi ea facultate præditus ſit, ut humoris cryſtallini vel figuram vel ſitum aliquatenus immutare poſſit, atque ita,nunc ad has nunc ad illas res ſe accommodet. Quare quibus ad omnia æque oculi valent, iis tales obtigiſſe certum eſt. Senibus vero,ac multis quoque citra ſenectutem rigidiores ſunt, parumque intus mobiles, quibus proinde, tantum qui e longinquo veniunt radii, aut certè a duorum vel trium pedum intervallo, accuratè in fundo oculi coguntur. At myopes ſeu luſcitioſi propinqua omnia, dummodo non ultra certum terminum, puta pedis duas tertias aut etiam minus, receſſerint, diſtinctè conſpiciunt; unde parumper forſan formam oculorum accommodare poſſunt diverſis viſibilium diſtantiis, ſed non eouſque ut radios parallelos, ſive a procul diſſita re venientes, in retina ad punctum colligant; Sed ob nimiam convexitatem ante eos colligant quam ad oculi fundum pervenerint. Et hæc quidem ita ſe habere eo ipſo manifeſtum eſt, quod vitium utrumque, admotis oculo certæ figuræ lentibus emendari poteſt. Myopi enim nimiam convexitatem minuit lens cava, Presbytis vero convexa contraria ratione medetur. Quarum itaque lentium figura, ut cujusque oculis quam aptiſſima inveniatur, primum conſtitutio eorum & defectus quantitas,hoc modo exploranda eſt.

Si ſeni auxilium quæratur, viſibile aliquod paulatim ab oculis ejus removere oportet, quod primum diſtincte illud absque incommodo ſuo cernat; atque eam diſtantiam ſignare, quia viſus conſtitutionem certo determinat. Sì enim dicta diſtantia ſit inventa A B, atque is ad quem pertinet poſitus in A, conetur videre punctum propinquum C; fiet, dirigendo oculum utrumque ad C, ut ſimul utrique, intrinſecus quidem, aliquantum mutentur ab ea diſpoſitione quam habebant ad longinqua conſpiciendum; ſed hoc tantummodo conſequentur,ut diſtincte contueantur ea quæ ſunt ad diſtantiam A B. Itaque lente ejusmodi opus eſt, quæ oculo admota radios ex C puncto ve-

venientes inflectat quaſi veniant ex B. Sit igitur ut BC ad CA, ita CA ad CO. Eritque tota AO ſemidiameter ſuperficiei lentis vitreæ utrimque æqualiter convexæ, quæ propoſitum efficiet. Vel idem quoque efficiet lens quævis, quæ focum, ſeu punctum concurſus parallelorum, habebit ad diſtantiam AO. Tab xi. Fig 3.

Quia enim ex conſtructione, CO eſt ad CA, ut CA ad CB; ſuntque CO & CB ad eamdem partem puncti C; O vero punctum concurſus parallelorum lentis in A; ſequitur ex propoſ. xx., radios a C puncto manantes, poſt refractionem in lente A, ita flecti, ac ſi venirent ex B. Quare oculo illi, quem diximus, cuncta intervallo AC remota, ejuſmodi lentium ope diſtincte percipientur.

Rurſus, ſi Myopi comparandum ſit conſpicillum, quo longinqua perfectè diſcernat, quærenda eſt tantum diſtantia maxima, ex qua viſibile admotum videat diſtinctè, atque ea ipſa erit longitudo ſemidiametri ſphæræ, ſecundum quam ab utraque parte lentem vitream excavare oportet. Vel ſi ab altera tantum parte cava, ab altera plana deſideretur, oportet ejus cavitatis ſemidiameter ſit prioris ſubdupla. Quævis enim harum lentium oculo admota efficiet, ut radii incidentes paralleli (tales enim cenſentur a longinquis punctis venientes) inflectantur, tanquam venirent a puncto diſperſus, cujus diſtantia ab oculo erit eadem, quæ illi diſtinctè videndi menſura erat, ut apertum eſt ex propoſ. xv. & xvii.

Propositio XXXIII.

Lentem vitream invenire, qua ſub aquis poſiti diſtincte videant.

Certum eſt, nec piſces ex aqua extractos, nec animalia cœtera ſub aquam demerſa, diſtinctè quidquam cernere poſſe. Urinatores enim ſub aqua vident

puidem, ſed diſtinctè videre nequeunt; at eo ferè modo, quo ſenex cum lentem valde cavam oculo apponit. In horum namque oculis, quoniam humor aqueus, qui corneæ tunicæ ſubjacet, fere eandem aquæ refractionem habet, ſicut experientiâ compertum eſt, neceſſe eſt, ſub aquam merſis, nullam in primo oculi introitu fieri radiorum extrinſecus incidentium refractionem; nec refert quidem, an corneæ ipſius refractio diverſa ſit, quia cum duabus ſuperficiebus conſtet parallelis, atque utrimque æqualis refractionis diaphano tangatur, radios omnes quaſi rectos transmittet. Radii itaque, qui oculo extra aquam poſito, ad corneæ ſuperficiem refracti, inde jam convergentes tendebant ad humorem cryſtallinum, ii nunc in eum paralleli deferentur; neque ſufficiet humoris cryſtallini refractio ad cogendos eos in fundo oculi, ſicut ſolet, ſed ulterius ſitum erit eorum concurſus punctum: unde videndi confuſio. Piſcibus autem extra aquam magna continget in exteriore oculo refractio, quæ ſub aquis vel nulla erat, vel certe multo minor; atque ita in eorum oculis concurſus radiorum fiet antequam ad fundum pervenerint, unde nihil niſi confuſe conſpicere eos poſſe conſequitur. Cœterum, hominis viſus ſub aqua ut emendetur, ejusmodi lens invenienda eſt, quæ oculo admota radios æque convergentes ad humorem cryſtallinum transmittat, atque a ſuperficie oculi exteriore venire ſolent extra aquam agentibus. Quod quidem facile eſt, cùm refractionis vitri ſub aqua, ſciamus eam eſſe proportionem, quæ 9 ad 8 (quæ nempe componitur ex proportione refractionis vitri in aere, quæ eſt 3 ad 2, & aquæ in aere inverſa, quæ eſt 3 ad 4. Hoc enim cum experientiæ conſentit, tum rationi phyſicæ, quam in Libro de Luce expoſuimus. Quandoquidem, poſita celeritate lucis in aqua ad celeritatem ejus in aere, ſicut 3 ad 4; itemque celeritate in aere ad celeritatem in vitro, ſicut 3 ad 2, ſequitur celeritatem in aqua ad celeritatem in vitro eſſe, ut 9 ad 8)

cum-

cumque & corneæ tunicæ, qua diaphana eſt, convexitatem cognitam habeamus. Eſt enim ſphæricæ ſuperficiei portio, cujus diameter $\frac{3}{5}$ unciæ pedis noſtratis, ſeu Romani veteris, ut in oculi deſcriptione annotavimus.

Sit jam igitur A C exterius oculi convexum, cujus ſemidiameter A B, & ponatur ratio refractionis humoris aquei eadem quæ eſt aquæ, id eſt 4 ad 3. Igitur ſumtâ B D triplâ ſemidiametri A B, certum eſt radios parallelos, oculo extra aquam poſito, ita flecti ad ſuperficiem A C, ut cogantur ad diſtantiam A D*. Demerſo autem oculo nulla ad A C fit refractio; quare opponenda ibi eſt lens vitrea, quæ, refractione ſua ſub aqua, radios parallelos axi A B colligat in puncto D. Sit ea lens E A K, ſuperficie una plana, altera vero, quæ proxime oculo admoveatur, convexa ſemidiametro H A. Si igitur hac lente radii paralleli colliguntur ad punctum D, habebit H D ad D A proportionem refractionis, ut conſtat ex propoſ. XIV. Eſt autem proportio hæc, refractionis nempe vitri ſub aqua, quæ 9 ad 8. Itaque H D ad D A, ut 9 ad 8. & dividendo H A ad A D, ut 1 ad 8. Sed D A eſt ad A B, ut 4 ad 1, ſive ut 8 ad 2. Ergo exæquo H A ad A B, ut 1 ad 2. Erat autem A B $\frac{3}{10}$ unciæ. Ergo H A $\frac{3}{20}$ unciæ, atque ita nota jam eſt forma lentis E A K. Quod ſi vero in locum ejus aliam deſideremus, æqualiter utrimque convexam, apparet ejus ſuperficies utrasque ejusdem fore convexitatis, cujus eſt corneæ ſuperficies A C; hoc eſt, a ſphæra, cujus diameter habeat unciæ $\frac{3}{5}$.

TAB. XI. Fig. 4.

*Prop. VIII.

Propositio XXXIV.

Perſpicillum, ex datis duabus lentibus compoſitum, cuilibet viſui accommodare.

A punctis ſingulis rei viſæ ad totam oculi pupillam, radios manare conſtat; qui quidem pro parallelis habentur cum procedunt a procul remotis. Itaque cum, recta oculi conſtitutione gaudentibus, ita ſponte ſua diſponantur, ut longinqua diſtinctè cernant, hoc eſt, ut radios parallelos ſibi incidentes colligant in unum retinæ punctum; ſequitur, iis ita lentes collocari debere, ut radii a punctis ſingulis rei viſæ venientes, poſtquam utramque lentem penetrarint, denuo fiant paralleli. Tab. XI. Fig. 5. 6. Quamobrem ſi lens convexa ponatur AB, axem habens BE, & radii a rei viſæ puncto exeuntes ejus refractione cogantur ad punctum E, quod erit in foco lentis A, ſi viſibile longinquum fuerit; ſi vero propinquum, invenietur per prop. XX. fuerit autem lentis alterius DD foci diſtantia GE, ſi convexa ſit; ſi vero cava, diſtantia puncti diſperſus. His inquam poſitis, accipienda eſt dicta diſtantia EG a puncto E verſus lentem A, ponendaque lens cava in puncto G; vel eadem diſtantia accipienda verſus alteram partem a puncto E, atque in termino G ponenda lens conxexa. Sic enim utroque caſu fiet, ut penetrata lente, DD radii paralleli ad oculum perveniant, ut conſtat ex prop. XVI. & XVII. atque ita diſtincta continget viſio ei, qui bona eſt oculi formatione.

Si vero Myopi aptandum ſit idem perſpicillum, qui viſibile ad diſtantiam FH demum diſtinctè cernere poſſit, ſumatur FL æqualis diſtantiæ GE, qua focus ſuus, aut punctum diſperſus abeſt a lente DD, hæc enim data eſt: Et auferatur quidem FL ab FH, ſi lens DD cava ſit, addatur vero, ſi convexa. Et ut HL ad LF, ita ſit LF ad

ad aliam; dico huic æquale ſumendum eſſe intervallum GF, ſecundum quod minuenda eſt utroque caſu longitudo perſpicilli, quæ prius erat GB, ut Myopi conveniat.

Poſita enim lente DD in F, & ſumtâ FK æquali FL, quia HL ad LF, ut LF ad FG, ſive ut FK ad KE; erit & HF ad FL, ſive FK, ut FE ad EK. Et permutando HF ad FE, ut FK ad KE, quare & HE ad EF, ut FE ad EK. Cum itaque punctum E ſit ad quod, vel a quo tendentes radii occurrunt lenti DD, punctum vero K ſit illud, quo pertinent refractiones parallelorum a parte oppoſita venientium*; ſequitur radios ad E, vel ab E venientes, ita flecti a lente DD, ut inde ferantur tanquam egreſſi a puncto H. Unde recte ſe habebit perſpicillum, ad diſtinctam viſionem Myopi præſtandam.

* Prop. xx.

PROPOSITIO XXXV.

Quæ, vel ob interpoſitas lentes, vel ratione diſtantiæ, confuſè ſpectantur, diſtincta reddi poſſunt, vel addita lente una juxta oculum, vel oppoſita ibidem lamina cum foramine minimo; dummodo non in ipſo maximæ confuſionis puncto, oculus poſitus fuerit. Utracunque vero correctio adhibeatur, eadem magnitudine & poſitu viſibile ſpectabitur.

SI enim, ab unoquoque rei viſæ puncto egreſſi, radii ad oculum ferantur, tendantque velut ad punctum poſt oculum, facile ex ſupra demonſtratis intelligitur, cujusmodi cava lente reddantur paralleli. Item, ſi divergentes, ac tanquam ex puncto ante oculum egreſſi adveniant, quomodo convexa lente ad paralleliſmum redigantur; utroque vero caſu viſio efficitur diſtincta. Sed hoc idem quoque conſequemur, oppoſito ad oculum minimo

foramine; quia tunc velut uni tantum radiorum, qui a ſingulis rei viſæ punctis innumeri alioqui ad pupillam feruntur, tranſitus datur. Ponantur enim radii ab extremis rei viſæ punctis profecti, ad oculi pupillam A B accidere tanquam ex punctis F, G, venientes. Et objiciatur ante oculum foramen in lamina exiguum C, nonniſi ſingulos veluti radios F C, G C admittens, qui occurrant oculi fundo in punctis H & I. Itaque hic pingentur puncta rei viſæ ſingula, unde manarunt radii F A, F C, F B; & G A, G C, G B. Et propter excluſos cœteros radios præter F C, G C, diſtincta erit pictura, eoque & viſio.

Tab. XI. Fig. 7.

Rurſus iisdem poſitis, ſed ablatâ lamellâ perforatâ, ſit hujus loco lens oculo proxima D E, quæ diſtinctam viſionem efficiat. Dico, eadem qua prius magnitudine, eodemque poſitu, ſpectatum iri viſibile. Quia enim per mediam lentem D E, cujus craſſitudo tanquam nulla cenſetur, radii F C, G C, rectis lineis penetrant †, manifeſtum eſt, eos eodem modo intra oculum ferri, atque ante per foramen C tranſeuntes, atque idcirco oculi fundo in iisdem punctis H, I occurſuros. Cum autem, ob interpoſitam lentem D E, diſtincta viſio fieri ponatur, neceſſe eſt, omnes radios ex G venientes, ad unum punctum in fundo oculi convenire, atque ita quoque omnes ex F venientes. Igitur omnes a puncto G egreſſi convenient in I, & omnes ex F egreſſi convenient in H, atque idcirco pingentur neceſſario extrema illa rei viſæ puncta in H & I. eoque non alia apparebit ejus latitudo, objectu lentis D E, ac foraminis minimi, nec non poſitus quoque idem; quæ fuere demonſtranda.

Tab. XI. Fig. 8.

† Prop. XXII.

Itaque, cum in ſequentibus apparentem magnitudinem definiemus, etiam iis caſibus quibus confuſa viſio contingit, intelligenda erit ea magnitudo, quæ cernitur correcta confuſione, ſeu lente, ſeu minimo foramine, ut jam diximus.

De

De effectu Lentium, quoad magnitudinem & ſitum apparentem.

Viſionis Phænomena, ratione magnitudinis objectorum, ſitus & ſimilium, pro varia poſitione oculi, objecti, & lentium, ſunt diverſæ. Aliæ autem concernunt viſionem ſimpliciter in unâ, vel pluribus lentibus, aliæ vero eamdem collatam cum alia viſione. Omnem earum diverſitatem ſequentibus Propoſitionibus includemus.

PROPOSITIO XXXVI.

Oculo conſtituto inter lentem convexam & focum ejus, viſibile quodvis per lentem ſpectatur ſitu recto, & auctum magnitudine; habetque magnitudo apparens ad veram, ſi viſibile longinquum eſt, rationem eam, quam diſtantia inter lentem & focum, ad diſtantiam inter focum & oculum; ſi vero propinquum, rationem compoſitam ex eadem quæ dicta eſt, & ex ratione diſtantiæ inter oculum & viſibile, ad diſtantiam inter viſibile & punctum dirigens; Si vero in foco lentis oculus ſtatuatur, viſibilia longinqua in infinitum augentur; propinqua vero, ſecundum rationem quam habet diſtantia eorum ab oculo, ad diſtantiam oculi a lente.

Esto lens convexa A B, cujus medium punctum, ſeu umbilicus A, focus O. Oculus vero D, in axe lentis A O poſitus. Viſibile vero linea N M, lenti parallela, cujuſque medium E ſit in eodem axe; quantum enim linea hæc, vel ejus pars E N, augebitur trans lentem ſpectata, tantum quoque aliud quodvis viſibile, eo loci poſitum, ſecundum diametrum augeri neceſſe eſt. Porro duabus D O, D A, ſit tertia proportionalis D P, eritque P punctum oculo D reſpondens. Quia enim radii, ex puncto D pro- TAB. XII. Fig. 9.

prodeuntes a lente A B, ita inflectuntur ut pergant inde tanquam venientes ex P, per prop. xx. Viciſſim quoque, qui ad P tendentes incidunt in lentem A B, concurrunt ad punctum oculi D. Ducatur N P recta ſecans lentem in B, (ſecabit enim, quia punctum N per eam conſpici ponimus) & jungatur B D. Itaque, per punctum lentis B cernetur punctum N, quum radius N B refringatur verſus punctum oculi D, neque alius quiſquam eorum, qui ex N promanant. Punctum autem E, per medium lentis A, apparere manifeſtum eſt, quia, cum in axe lentis ſitum ſit, radius E D irrefractus ad oculum pervenit.

Patet itaque primùm, viſibile N M conſpici ſitu erecto, quum punctum B ſit ad eandem partem axis E A O, ac punctum N, quod ibi refertur. Liquet etiam, B A ſpatium eſſe, quod in lente occupat imago lineæ N E. At vero ducta N D rectâ, quæ ſecet lentem in C, apparet A C fore ſpatium, quod occuparet idem viſibile E N in ſuperficie, quæ refractionis expers eſſet. Itaque ratio B A ad C A, definit proportionem magnitudinis apparentis ad veram: atque apparet quidem B A ipſa C A majorem eſſe, cum B A ad N E ſit, ut P A ad P E; C A vero ad eandem N E, ſicut D A ad D E; ratio autem P A ad P E major, quam D A ad D E, quia P A ad A E major, quam D A ad A E; eſt enim P A major quam D A, quia D cadit hic neceſſario inter A & P. Ergo jam & recto ſitu, & auctum magnitudine, viſibile cerni per hæc conſtat.

Nunc porro oſtendendum, cum viſibile N M longinquum eſt, habere B A ad C A rationem eam, quam A O ad O D; cum vero propinquum, rationem compoſitam ex A O ad O D, & ex D E ad E P. Prius autem ex poſteriori ſequitur; ac proinde hoc primùm demonſtrabimus. Ratio B A ad C A componitur ex ratione B A ad N E, & N E ad C A; quarum ratio B A ad N E eſt eadem, quæ P A ad P E: ratio vero N E ad C A eadem, quæ E D

ad AD. Habet igitur BA ad CA rationem eamdem compoſitæ ex rationibus PA ad PE, & ED ad AD, hoc eſt, rationem quam habet rectangulum PA, ED ad rectangulum PE, AD: hæc autem componitur ex ratione ED ad EP, & PA ad AD, ſive AO ad OD, nam, ex conſtructione, cum ſit PD ad DA, ut AD ad DO, etiam componendo erit PA ad AD, ut AO ad OD. Ergo ratio BA ad CA componitur ex ratione AO ad OD, & ED ad EP.

Porro, cum longinquum intelligitur viſibile, ratio ED ad EP eſt ratio æqualitatis, quæ proinde compoſita cum ratione AO ad OD, eam nec auget nec diminuit. Itaque tum ratio BA ad CA erit eadem, quæ AO ad OD. Atque hæc quidem demonſtranda erant oculo, inter lentem focumque ejus, conſtituto.

Ponatur autem nunc oculus in ipſo foco O, & ſit propinquum viſibile NM, ducatur NB parallela axi EA, quæ occurrat lenti in puncto B, & jungatur BO, itemque NO ſecans lentem in puncto C. Quia igitur radius NB parallelus eſt axi lentis AB, eum neceſſe eſt refringi verſus focum O, ubi oculus ponitur. Quamobrem, punctum N ſpectabitur per ſolum lentis punctum B. Sed punctum E medium NM ſpectatur, uti prius, in centro lentis A. Igitur erectum apparet viſibile NM; & magnitudo apparens ad veram rurſus eam rationem habet, quam BA ad CA. Verum ut BA, hoc eſt, NE ad CA, ita EO ad AO; ergo auctum cernitur ſecundum rationem EO ad AO.

TAB. XI. Fig. 10.

Quod ſi vero longinquum fuerit viſibile, jam ratio EO ad AO, erit tanquam infinitæ inæqualitatis majoris, ac proinde infinita continget ampliatio.

Eſt autem animadverſione dignum, hoc oculi poſitu, eâdem ſemper magnitudine cerni viſibile NM, quantum-

cunque a lente receſſerit; ſemper enim punctum N, in eodem puncto B, percipietur.

PROPOSITIO XXXVII.

Poſito oculo in axe lentis convexæ, ſed ita ut ultra focum ab ea diſtet, viſibile ad alteram partem lentis ſitum, ſed citra punctum reſpondens, erectum & majus ſpectatur. Ulterius vero quam punctum reſpondens a lente remotum, videbitur inverſum, & majus vel minus pro diverſa ipſius, atque oculi a lente diſtantia. Ratio autem magnitudinis apparentis ad veram, ſe habebit, eodem modo atque in Theoremate præcedenti.

Tab. XI. Fig. 11. 12. Ponatur, ut ſupra, lens AB, & focus ejus O. Oculus autem in puncto axis D, diſtans a lente ultra focum. Et duabus DO, DA, ponatur tertia proportionalis DP, ſecundum prop. xx. Erit igitur P punctum oculo reſpondens, quum ſicuti radii ex D procedentes diriguntur a lente verſus punctum P, ita viciſſim, qui ex P veniunt, dirigantur ad oculum D.

Tab. XI. Fig. 11. Sit jam viſibile, ut antea, recta MN, quam mediam dividat axis lentis in E, ſitque primo ſitum inter lentem AB, punctumque reſpondens P, & ducatur ex P, per terminum N, recta PNB, lenti occurrens in B, & jungatur BD. Ducatur autem & recta ND ſecans lentem in puncto C. Manifeſtum itaque eſt, per punctum lentis B, appariturum viſibilis terminum, quod conſpiceretur in C, ſi radius ND ſine refractione transmitteretur; punctum vero E, utroque modo, per A cerni neceſſe eſt, quia radius ex E ad D nullus pervenit præter EA, qui utramque lentis ſuperficiem ſecat ad rectos angulos, ideoque irrefractus permeat.

Conſtat itaque hic viſibile cerni ſitu erecto, quum puncta N & B ſint ad eaſdem partes axis PAD. Rurſusque ratio

ratio apparentis magnitudinis ad veram erit ea, quæ B A ad C A. Quare, cum B A ſit major quam C A (nam BA major eſt quam N E, & N E major quam C A) auctum magnitudine conſpicietur viſibile N E.

Porro in caſu altero, ſit viſibile M N poſitum ultra punctum correſpondens P, & eadem conſtruantur quæ prius. Igitur per punctum lentis B, rurſus aſpicietur punctum N & E per A. Sed ſi N fuerit reipſa ſuperius puncto E, nunc cernetur inferius, quia ad contrarias partes axis E A D ſita ſunt puncta E & B. Itaque inverſum jam apparebit viſibile M N. Ratio autem apparentis incrementi rurſus, ut in caſu priore, erit ea quæ B A ad C A; ideoque demonſtrandum eſt, rationem hanc, cum viſibile propinquum eſt, componi ex rationibus A O ad O D, & E D ad E P. Cum verò longinquum, quod tantum poſteriore caſu locum habet, eandem eſſe quæ A O ad O D. Quæ quidem demonſtratio eadem eſt, quæ in Theoremate præcedenti. Itaque manifeſtum eſt, poſteriore caſu majora cerni viſibilia longinqua, quando A O major fuerit quam O D, & minora, cum minor, cumque æqualis, æqualia. Sed viſibili propinquo, ut ſciatur quando auctum vel diminutum ſpectari debeat, videndum utrum major ratio A O ad O D, quam E P ad E D, an minor, an æqualis; nam prout hæc ſe habuerint, ratio quoque compoſita ex ratione A O ad O D, & E D ad E P, hoc eſt, ratio B A ad C A erit majoris vel minoris inæqualitatis, vel denique æqualitas ipſa. Tab. XI. Fig. 12.

Manifeſtum autem utroque caſu, quod quanto propius accedet viſibile ad punctum reſpondens P, manente oculo & lente, tanto major erit ratio apparentis ad veram magnitudinem; creſcente nimirum ratione D E ad E P, at ratione A O ad O D eadem manente; adeo ut poſitum in puncto ipſo P augeri debeat in infinitum.

Propositio XXXVIII.

Poſito oculo poſt lentem cavam, viſibilia omnia erecta videntur, & vero minora; habetque magnitudo apparens ad veram, ſi viſibile fuerit longinquum, rationem eam quam diſtantia inter lentem & punctum diſpergens ad diſtantiam hujus ab oculo. Si vero propinquum, rationem compoſitam ex illa quæ dicta eſt, & ex ratione diſtantiæ inter oculum & viſibile, ad diſtantiam viſibilis a puncto directionis.

TAB. XII. Fig. 1. Esto lens cava AC, cujus axis AO; punctum diſpergens O; oculus vero in axe poſitus ſit D. Viſibile vero ad alteram partem lentis MEN, ita ſitum ut in Theor. præcedenti. Et fiat duabus DO, DA, tertia proportionalis DP, ſumenda in partem eandem ac duæ reliquæ. Erit P punctum, quo tendentes radii flectuntur a lente AC verſus oculum D, quoniam qui veniunt ab D in eamdem lentem, ita flectuntur quaſi procedant a puncto P*. Ducatur recta NP ſecans lentem in B, & jungatur BD; ac denique recta ND ſecet lentem in C. Percipietur ergo punctum N in puncto B, lineaque NE occupabit in lente intervallum BA, quæ occuparet intervallum CA, ſi loco lentis eſſet ſuperficies refractionis expers.

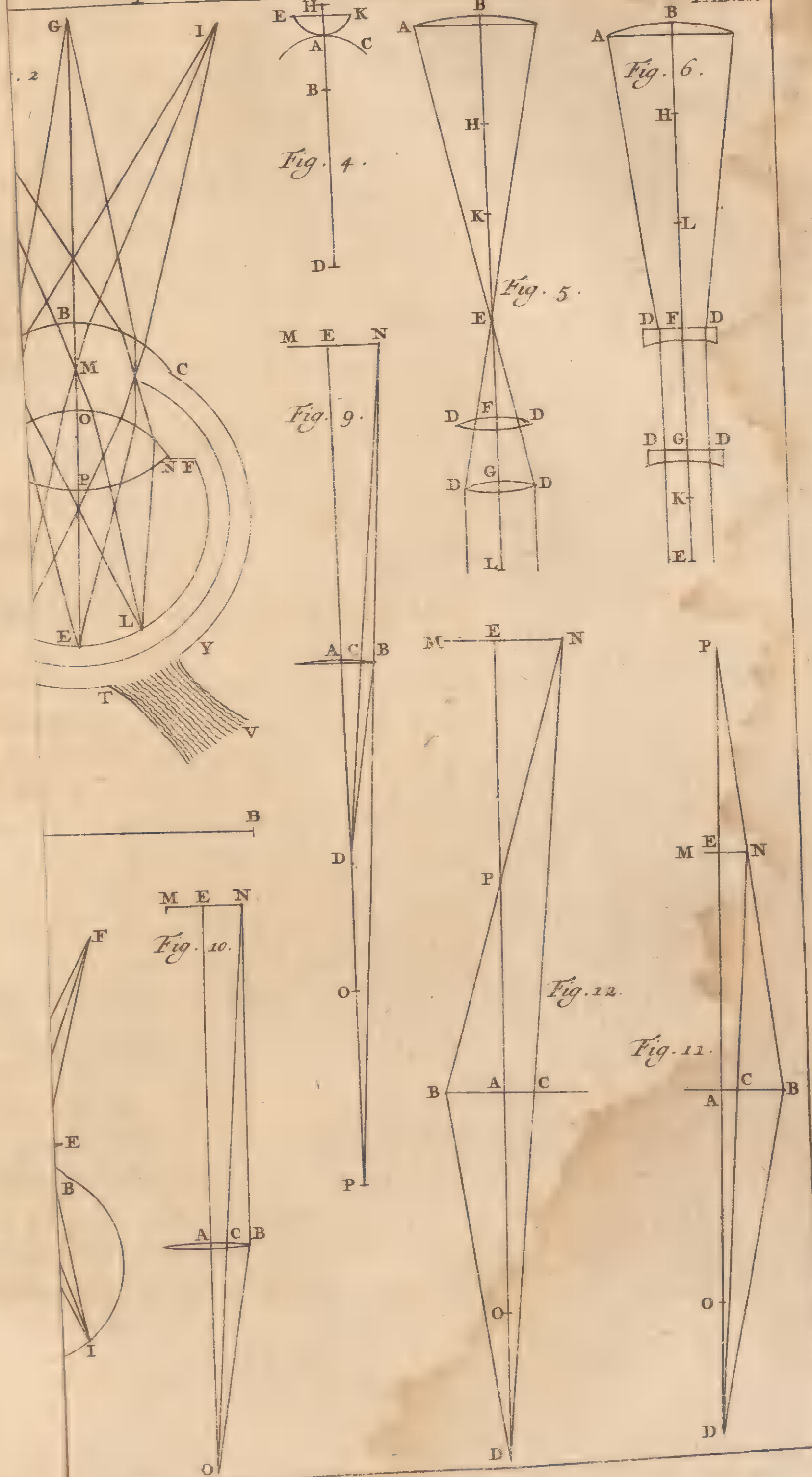
* Prop. xx.

Ac primum quidem apparet, erectum ſpectari debere viſibile MN, cum punctum ejus N ſpectetur in lente AC ad eamdem partem axis, ubi revera ſitum eſt; quod quidem neceſſario fieri liquet, eo quod punctum P, ulterius quam A, diſtet ab NE.

Quod autem magnitudine diminutum ſpectabitur, ſic conſtabit. Ratio EA ad AP, major eſt quam EA ad AD. Unde, & componendo, ratio EP ad PA, major ratione ED ad DA. Sicut autem EP ad PA, ita eſt

NE

TAB. XI.



NE ad BA; at ſicut ED ad DA, ita EN ad CA. Ergo major ratio NE ad BA, quam NE ad CA; ideoque BA minor quam CA. Ratio autem magnitudinis apparentis ad veram eſt ea, quæ BA ad CA, itaque illam magnitudinem, hac minorem, eſſe conſtat.

Porro, quod ratio BA ad CA, cum viſibile longinquum eſt, eadem fiat, quæ diſtantiæ lentis a puncto diſperſus ad diſtantiam hujus ab oculo, hoc eſt, quæ AO ad OD; cum vero propinquum, eadem compoſitæ ex jam dicta ratione, & ex ratione DE ad EP: hæc utraque iisdem verbis demonſtrantur, ac in Propoſitione XXXVI.

Manifeſtum vero hinc eſt, manente oculo & lente cava, quo magis removebitur ab ea viſibile, eo magis diminui rationem apparentis ad veram magnitudinem, quippe ratione DE ad EP magis ac magis accedente ad æqualitatem.

Manifeſtum quoque, ſi oculus D ſit lenti proximus, etiam punctum P proximum fieri, adeo ut æque ratio AO ad OD, ac DE ad EP, tunc habendæ ſint pro ratione æqualitatis. Quamobrem nec longinqua nec propinqua, tunc minora conſpicientur, quam lente remota.

Propositio XXXIX.

Datis duabus lentibus, & poſitione earum, tam inter ſe quam inter oculum & viſibile, invenire qua proportione illud augeant vel imminuant, & utrum, ſitu erecto an everſo, referant.

Duarum lentium quattuor ſunt conjugationes, nam vel convexa eſt utraque, vel utraque cava; vel cava, quæ propior eſt oculo, altera convexa; vel contra.

Sint igitur primum propoſitæ lentes duæ, convexa A, & concava B, ita ut hæc oculo propior conſiſtat. Sit autem TAB. XII. Fig. 1. 3. 4. 5. 6.

tem oculus ad C, in communi duarum lentium axe conſtitutus; viſibile vero D F ſit linea recta eidem axi ad angulos rectos, ab eoque in E bifariam diviſa. Et oporteat invenire rationem magnitudinis per utramque lentem conſpectæ ad eam, quæ ſine lentibus perciperetur. Quia autem datæ ſunt lentes, datur & convexæ focus G, radiorum a parte viſibilis advenientium, & concavæ punctum diſperſus H. Igitur primum inveniatur duabus C H, C B, tertia proportionalis C K, verſus H ſumenda. Deinde duabus K G, K A, tertia proportionalis K L, ſumenda verſus G, niſi contingat punctum K incidere in G, quo caſu proportionalis K L omittenda. Dico, jam rationem apparentis magnitudinis trans lentes ad eam, quæ nudo oculo ſpectaretur, habere rationem compoſitam ex rationibus H B ad H C, & A G ad G K, & E C ad E L; vel, in caſu excepto, ubi deeſt E L, ex rationibus H B ad H C, & E C ad A K.

Ducatur enim recta per L, D, ſecans lentem A in M, vel in caſu quo deeſt L, agatur D M axi lentium parallela. Deinde ducatur M K ſecans lentem B in N, & jungatur N C. Et tandem ex F ad oculum C protendatur recta F C, ſecans eandem lentem B in O. Quoniam igitur lentis convexæ A focus eſt G, eſtque K G ad K A, ut hæc ad K L, ſequitur, radios, qui a puncto K venientes occurrunt lenti A, ita flecti, ut pertineant inde ad punctum L. Unde viciſſim, qui a puncto L exeunt, vel ad ipſum feruntur, occurrentes lenti ab altera parte, concurrent ad punctum K. Rurſus, quia proportionales ſunt C H, C B, C K, eſtque H punctum diſperſus lentis B radiorum a parte A venientium; Conſtat radios a C puncto venientes, flecti a lente B, ut inde pertineant ad punctum K. Unde viciſſim, qui ab altera parte occurrunt lenti B, tenduntque ad punctum K, ita inflectentur, ut concurrant ad punctum C. Patet itaque, radium D M, qui per punctum rei viſibilis D ducitur ad lentem A, pertinet-

tinetque ad punctum L, eum eſſe, qui poſt refractionem in lente utraque, primum in M, deinde in N pervenit ad oculum C; a quo itaque cernetur punctum D in puncto N lentis B, occupabitque recta DE in lente B partem BN. Recta autem EF, ipſi ED æqualis, ſi nulla in lentibus refractione cerneretur, occuparet in eadem lente B partem OB, quoniam FOC recta eſt linea. Itaque ratio magnitudinis apparentis per lentes ad veram eſt ea, quæ rectæ BN ad BO.

Ratio autem BN ad BO, componitur ex rationibus BN ad AM, & AM ad ED, & ED ad BO; quarum ratio prima BN ad AM, eſt eadem quæ BK ad AK. Secunda vero AM ad ED, eadem quæ AL ad EL; aut, in caſu quo DM eſt parallela EA, eadem cum ratione æqualitatis. Et denique, tertia ratio ED vel FE ad BO, eadem quæ EC ad BC. Igitur ratio BN ad BO componetur ex rationibus BK ad AK, & AL ad EL, (cujus loco, in caſu excepto, eſt ratio æqualitatis) & ex ratione EC ad BC. Ratio autem compoſita ex ratione BK ad AK, & EC ad BC eſt eadem compoſitæ ex BK ad BC, & EC ad AK. Igitur ratio BN ad BO, componetur ex rationibus BK ad BC, & EC ad AK, & AL ad EL, & in caſu excepto, ex duabus prioribus tantum, cum ratio æqualitatis rationes, quibuscum compoſita eſt, non augeat nec imminuat. Rurſus vero ratio compoſita ex EC ad AK, & AL ad EL eadem eſt compoſitæ ex EC ad EL, & AL ad AK. Igitur ratio BN ad BO, compoſita erit ex rationibus BK ad BC, & AL ad AK, & EC ad EL; quia autem CH ad CB, ut CB ad CK, erit quoque CH ad HB, ut CB ad BK: & invertendo, ratio HB ad CH, eadem quæ BK ad BC. Item, quia KG ad KA, ut KA ad KL, erit & KG ad AG, ut KA ad LA; & invertendo, ratio AG ad GK, eadem quæ AL ad AK. Itaque ratio BN ad BO, apparentis nempe magnitudinis

TAB. XXI. Fig. 9.

ad

ad veram, componetur ex rationibus HB ad HC, & AG ad GK, & EC ad EL; & in caſu excepto, ex rationibus HB ad HC, & EC ad AK, quod erat demonſtr.

Notandum vero, ſi lens cava B ita poſita ſit inter lentem A, focumque ejus G, ut diſtantia BG ſit æqualis BH, quæ eſt inter lentem B & punctum ſuum diſperſus, quæ poſitio ordinaria eſt teleſcopii hujusmodi, qua nempe paralleli ad oculum feruntur radii a ſingulis rei viſæ punctis manantes, quod eadem tunc ſemper erit magnitudo apparens rei longinquæ, quocunque loco oculus C poſt lentem B ſtatuatur: ac ratio ejus ad veram magnitudinem, ea quæ AG ad GB, vel BH. Cum enim oſtenſum ſit, rationem apparentis magnitudinis ad veram, componi ex rationibus HB ad HC, & AG ad GK, & EC ad EL; cumque hic ratio EC ad EL ſit æqualitatis, eo quod viſibile longinquum ponatur; eoque punctum E cenſeatur infinitè remotum, tam a C, quam ab L, cujus hic definita eſt diſtantia, componetur ergo ratio apparentis magnitudinis ad veram, e rationibus HB ab HC & AG ad GK. Quia autem, ut CH ad CB, ita CB ad CK, erit etiam, ut CH ad CB, ita HB ad BK, hoc eſt, ita GB ad BK, quia GB æqualis HB. Itaque & CH ad HB, ut BG ad GK, & convertendo, BH ad HC, ut KG ad GB. Proinde ratio apparentis ad veram magnitudinem componitur ex rationibus AG ad GK, & GK ad GB, hoc eſt, erit eadem ac ratio AG ad GB, vel BH.

Conſtat igitur in Teleſcopio, quod covexo & cavo vitro inſtructum ſit, eſſe magnitudinem apparentem rerum procul diſſitarum, ad eam quæ nudo oculo percipitur, ſicut foci diſtantia lentis convexæ, ad foci diſtantiam puncti diſperſus a lente cava. Quod etiam in ſequentibus oſtendetur.

Porro ex ſola inſpectione ſchematum ad caſus ſingulos, apparet utrum erectum cerni debeat viſibile, an everſum. Nem-

Nempe omnibus caſibus erectum appariturum, præterquam in illo caſu, ubi nimirum focus G lentis A cadit inter ipſam & punctum K, ſimulque viſibile remotum eſt ultra punctum L; ſic enim punctum D ſpectatur per punctum N lentis B, quod ad alteram partem axis E B ſitum eſt, ideoque viſibile everſum ſpectari neceſſe eſt. TAB. XII. Fig. 5.

Proponatur nunc convexa lens utraque, & rurſus lentis A ſit focus G; lentis vero B focus H, uterque a viſibili F E D adverſus. Oculus vero in C. Et continuè proportionales C H, C B, C K; itemque K G, K A, K L, & reliqua ſimiliter, uti prius, conſtruantur. Et omnia, quæ modo de convexa & cava lente dicta fuere ad apparentem magnitudinem attinentia, etiam his lentibus convenient, eademque erit demonſtratio. Niſi quod hic poteſt poni oculus C in puncto H, quo caſu punctum K non invenitur, ſed ſumenda eſt A L æqualis A G, & ex puncto D ducenda recta D L M occurrens lenti A in M, unde parallela facienda M N axi A B, quæ occurrat lenti B in N, & jungenda N C. Demonſtratioque erit hujusmodi. Ratio B N ad B O, nempe apparentis magnitudinis ad veram, componitur ex rationibus B N, ſeu A M ad D E & D E ad B O. Quarum A M ad D E eadem eſt quæ A L ad L E: & D E ad B O eadem quæ E C ad B C. Ergo ratio B N ad B O componetur ex rationibus A L ad L E, & E C ad B C, hoc eſt, ex rationibus A L ad B C, & E C ad E L. Unde ſi viſibile longinquum fuerit, quia tunc ratio E C ad E L eſt æqualitatis, ſupererit ſola ratio A L ad B C, quæ erit apparentis magnitudinis ad veram. Eſt autem A L foci diſtantia lentis A, quippe æqualis A G, & B C foci diſtantia lentis B. TAB. XIII. Fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. TAB. XIII. Fig. 5.

Quando autem punctum K incidit in centrum lentis A, quod contingit quando oculus C ita poſitus eſt, ut ſumta, duabus C H C B, tertia proportionali C K, ea æquetur diſtantiæ C A: etiam punctum L eodem incidet, rationque magnitudinis apparentis ad veram componetur, TAB. XIII. Fig. 6. 7.

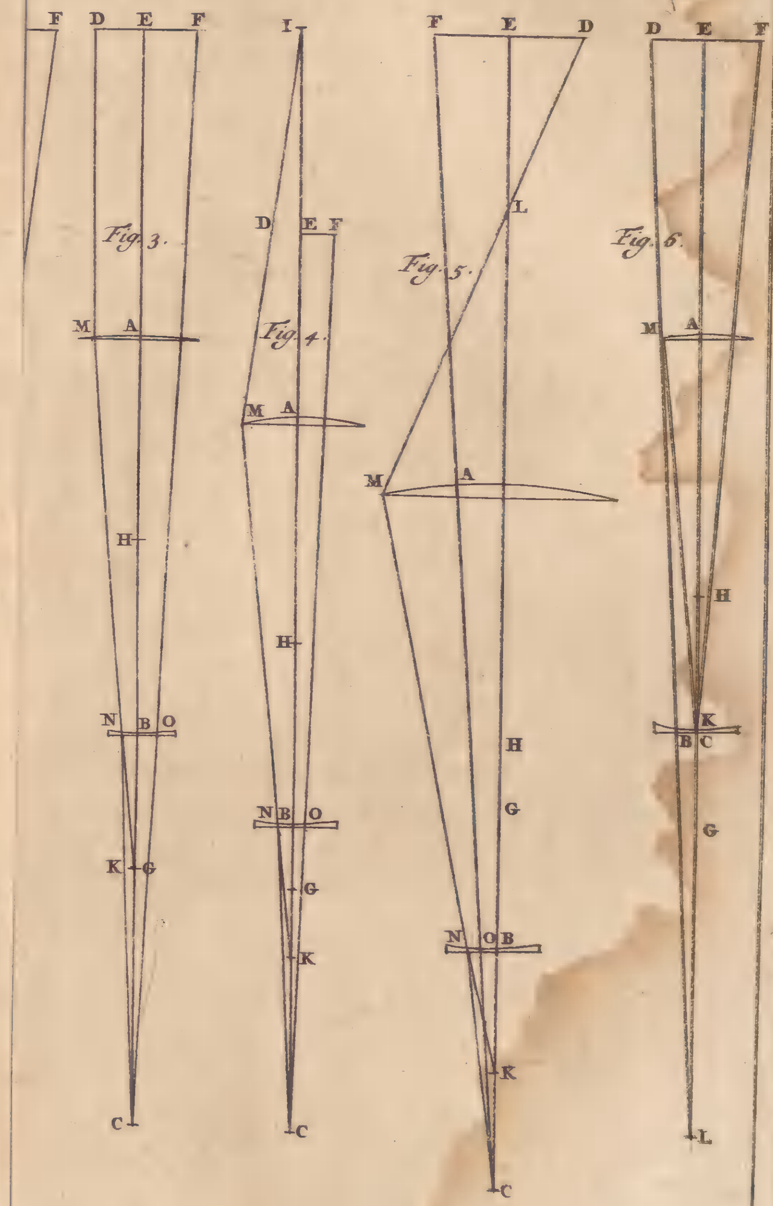
tantum ex rationibus HB ad HC, & EC ad EL, quia ratio tertia AG ad GK jam eſt æqualitatis. Et hæc quidem oculi diſpoſitio utilis eſt in teleſcopiis ac microſcopiis, quia magna rei viſæ pars uno intuitu ſic percipitur, totam lentem B complente imagine, etiam ſi lentis A minima fuerit apertura.

TAB. XIII. Fig. 8. Quandocunque autem foco G lentis A, cadente inter ipſam lentemque B, diſtantia GB æqualis erit BH, qua diſtat a lente B focus ſuus H: erit ratio apparentis ad veram magnitudinem rei longinquæ, ubicunque oculus C in axe lentium ponatur, ea quæ AG ad GB, hoc eſt, ea quæ foci diſtantiarum lentis exterioris atque interioris, ſive oculo proximæ. Sicut ante in compoſitione lentis convexæ cum cava oſtenſum eſt. Demonſtratio enim eadem quæ illic habetur, etiam huic caſui accommodata eſt. Hæc vero ordinaria eſt teleſcopii ex duabus convexis diſpoſitio, qua nempe fit ut, qui nullo viſus vitio laborant, res remotas diſtincte contueantur.

De cætero, utrum erecto ſitu, an everſo viſibile ſpectetur, ex figuris cujusque caſus, hic quoque manifeſtum eſt. Nempe, ubi puncta N & D reperiuntur ad eandem partem axis AB, erectum ſpectabitur viſibile; ubi vero ad contrarias axis partes inverſum erit, atque apparet utrumque horum variis caſibus contingere poſſe, de quibus ſigillatim inquirere operæ pretium non eſt. Cum eadem omnia, etiam poſtea, absque tot compoſitarum rationum ambagibus, oſtenſuri ſimus.

PRO-

TAB. XII.



Propositio XL.

Theorema.

Si per lentes quotlibet viſibile conſpiciatur, iisque manentibus, oculus & viſibile viciſſim loca permutent: Eâdem, hoc, quâ prius magnitudine, apparebit.

Esto primum lens unica A, poſita inter oculum in D, & viſibile in E. dico ſi oculus tranſeat in E, & viſibile in D, lente A non mota, quod eadem ſic magnitudine ſpectabitur, atque cum oculus erat in D, & viſibile in E. Tab. XIII. Fig. 11. 12. 13.

Sit enim O focus lentis A, ſeu punctum quo pertinent radii paralleli venientes a partibus E. Et duabus DO, DA, ſit tertia proportionalis DP, ſumta verſus O. Eſt igitur punctum P oculo in D conjugatum. Quapropter, per Propoſ. xxxvi. aut xxxvii. aut xxxviii. oculo in D conſtituto, ratio magnitudinis apparentis ad veram viſibilis in E, erit ea quæ componitur ex rationibus AO ad OD, & DE ad EP. Per hæc eadem, cum oculus ponetur in E, & viſibile in D, ſumta $A\omega$, æquali AO, & duabus $E\omega$, EA, tertia proportionali $E\pi$, erit ratio magnitudinis apparentis ad veram viſibilis in D, compoſita ex rationibus $A\omega$ ad ωE, & ED ad $D\pi$.

Itaque, cum utraque poſitione vera magnitudo ſit prorſus eadem, oportet oſtendere rationem magnitudinis apparentis, ad veram utrobique eamdem eſſe. Hoc eſt rationem compoſitam ex rationibus AO ad OD, & DE ad EP, quæ eſt ratio rectang. AO, DE ad rectang. OD, EP, eſſe eamdem rationi compoſitæ ex rationibus $A\omega$ ad ωE, & ED ad $D\pi$, hoc eſt rationi rectang. $A\omega$, ED ad rectang. ωE, $D\pi$. Atqui priores termini rationum ſunt æquales, hoc eſt, rectang. AO, DE æquale rectang. $A\omega$, DE, quoniam AO æqualis $A\omega$; Ergo opus

opus tantum eſt oſtendere, quod rectang. OD, EP æquale rectang. ωE, Dπ. Quia ergo DO ad DA, ut DA ad OP erit & DO ad OA ut DA ad AP; & permutando OD ad DA, ut OA, ſive ωA ad AP; quare & OD ad OA, ut ωA ad ωP. Rurſus, cum ſit Eω ad EA, ut EA ad Eπ, erit Eω ad ωA, ut EA ad Aπ, & permutando Eω ad EA, ut ωA, ſive OA, ad Aπ, quare & Eω ad ωA, ut OA ad Oπ. Erat autem ut ωA ad ωP, ita OD ad OA. Ergo ex æquali, in perturbata proportione, erit Eω ad ωP, ut OD ad Oπ. Ideoque & Eω ad EP, ut OD ad Dπ. Quare rectang. Eω, Dπ æquale rectang. EP, OD, quod erat oſtendendum.

De ſitu vero, quod ſimilis utraque poſitione appareat, id quidem, ſi lens cava ſit, manifeſtum eſt. Quoniam omnia, per hanc ſpectanti, erecta apparent per Prop. XXXVIII. In convexa autem oſtendetur hoc modo.

Tab. XIII. Fig. 14. Primum, ſi oculus in D inter A & O ſitus fuerit, erectum conſpicit viſibile in E, quæcunque fuerit AE diſtantia per Prop. XXXVI. Et viciſſim, tranſlato oculo in E, viſibili in D, cadet punctum oculo conjugatum π ultra D, quoniam in continua ſunt proportione Eω, EA, Eπ, ideoque πA major quam Aω, ſive AO. Ergo viſibile in D ex E ſpectabitur erectum, ſicut in E ex D.

Tab. XIII. Fig. 15. Rurſus poſito oculo in D extra AO, cadet punctum conjugatum P ad alteram lentis partem. Et ſi quidem viſibile in E inverſum ſpectatur ex D, fit hoc, quia E ſitum eſt ultra P. Tunc vero, quia puncto P conjugatum eſt D, (eſt enim conjugatio reciproca) & diſtat punctum E ulterius a lente quam P, cadet punctum ipſi E conjugatum, quod eſt π, citra D. Ideoque ex E videbuntur, quæ in D ſunt, ſitu everſo, ſicut ex D, quæ in E. Quod ſi punctum ipſi D conjugatum ulterius a lente abſit quam E, hoc eſt, ſi viſibile in E oculo in D ſpectatum fuerit erectum, cadet ſimili ratione punctum π, ipſi E conju-

ga-

gatum, ultra D, atque idcirco erectum tunc conſpicietur viſibile in D ex E, ſicut & in E poſitum ſpectabatur ex D. Quæ quidem erant oſtendenda.

Proponantur nunc lentes duæ A & B, ſitque viſibile in E ſpectatum oculo in C. Dico, eâdem magnitudine ſpectatum iri, ſi oculus in E ponatur, & viſibile in C. Sit enim lentis A focus G, & H lentis B, & oculo in C conjugatum punctum K, pertinens ad lentem B, ut ſint videlicet in continua proportione CH, CB, CK. Item puncto K conjugatum punctum ſit L pertinens ad lentem A, ut ſint in continua proportione KG, KA, KL. Itaque cum ex C conſpicitur viſibile in E poſitum, ratio apparentis ad veram magnitudinem eſt ea, quæ componitur ex rationibus HB ad HC, AG ad GK, & EC ad EL, ut oſtenſum fuit Propoſ. xxxix. Similiter poſito oculo in E, & viſibili in C, & notato γ in foco lentis A, & θ in foco lentis B; & puncto $\varkappa$ ipſi E conjugato ad lentem A, ut ſint in contin. Prop. Eγ, EA, E$\varkappa$, & puncto λ conjugato ipſi $\varkappa$ ad lentem B, ut ſint in contin. Prop. $\varkappa\theta$, $\varkappa$B, $\varkappa\lambda$. Componetur magnitudinis apparentis ad veram ratio, ex rationibus Aγ ad γE, Bθ ad $\theta\varkappa$, & CE ad Cλ. Eſt autem vera magnitudo utraque poſitione eadem. Igitur oſtendendum, quod compoſita ex tribus hiſce rationibus, eadem eſt compoſitæ ex tribus illis. Eſt autem ratio ex prioribus tribus compoſita, quæ ſolidi ex HB, AG, EC ad ſolidum ex HC, GK, EL. At ratio ex tribus poſterioribus, ea quæ ſolidi ex Aγ, Bθ, CE ad ſolidum ex γE, $\theta\varkappa$, Cλ. Eſtque ſolidum ex HB, AG, EC æquale ſolido ex Aγ, Bθ, CE, quum lineæ ſingulæ ſingulis ſint æquales, nempe HB ipſi Bθ, & AG ipſi Aγ & CE utrimque eadem. Igitur opus tantum erit oſtendere, quod ſolidum ex HC, GK, EL, æquale ſit ſolido ex γE, $\theta\varkappa$, Cλ. Id vero ſic oſtendemus. Quoniam eſt CH ad CB, ut CB ad CK, erit & CH ad CB, ut HB, ſive Bθ, ad BK, ideoque, TAB. XIII. Fig. 16. 17.

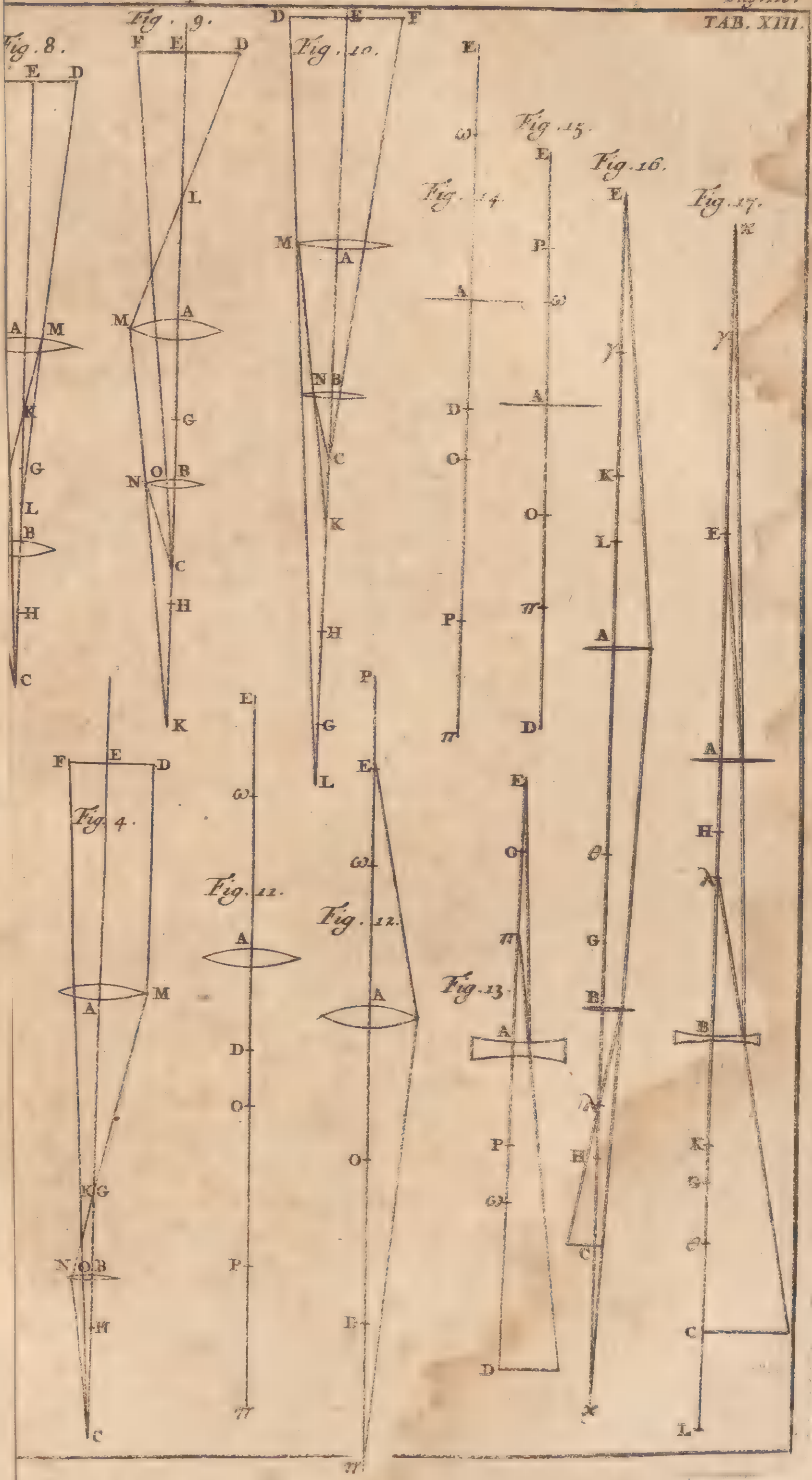
ut CH ad HB, ita quoque $B\theta$ ad θK. Similiter cum ſit $\kappa\theta$ ad κB, ut κB ad $\kappa\lambda$, erit $\kappa\theta$ ad κB, ut θB, ſive BH ad $B\lambda$, ideoque $\kappa\theta$ ad $B\theta$, ut BH ad $H\lambda$. Erat autem $B\theta$ ad θK, ut CH ad BH. Igitur ex æquo, in prop. perturbata, erit $\kappa\theta$ ad θK, ut CH ad $H\lambda$. Quare, & $\theta\kappa$ ad κK, ut CH ad $C\lambda$, & permutando $\theta\kappa$ ad CH, ut κK ad $C\lambda$. Rurſus, quoniam $E\gamma$ ad EA, ut EA ad $E\kappa$, erit $E\gamma$ ad EA, ut γA ſive AG ad $A\kappa$, ideoque, ut $E\gamma$ ad γA, ita AG ad $G\kappa$. Similiter, quia KG ad KA, ut KA ad KL, erit KG ad KA, ut GA, ſive γA, ad AL; ideoque, ut KG ad AG, ita γA ad γL: & erat AG ad $G\kappa$, ut $E\gamma$ ad γA: Ergo ex æquo, in perturbata prop., erit KG ad $G\kappa$, ut $E\gamma$ ad γL. Quare, & KG ad $K\kappa$, ut $E\gamma$ ad EL, & permutando & invertendo $E\gamma$ ad KG, ut EL ad $K\kappa$. Ratio autem EL ad $C\lambda$ componitur ex rationibus EL ad $K\kappa$, & $K\kappa$ ad $C\lambda$; quarum EL ad $K\kappa$ eadem eſt quæ $E\gamma$ ad KG; altera vero $K\kappa$ ad $C\lambda$ eadem quoque oſtenſa fuit, quæ $\theta\kappa$ ad CH. Ergo ratio EL ad $C\lambda$ componetur ex rationibus $E\gamma$ ad KG, & $\theta\kappa$ ad CH, ac proinde eadem erit quæ rectang. ſub $E\gamma$, $\theta\kappa$ ad rectang. ſub KG, CH. Ideoque ſolidum ſub EL, KG, CH æquale erit ei, quod ſub $C\lambda$, $E\gamma$, $\theta\kappa$. quod erat oſtendendum.

Propoſitis vero tribus pluribusve lentibus, demonſtratio ad præcedentium ſimilitudinem conſcribi poterit.

Per hæc igitur, quando de apparente viſibilium magnitudine & ſitu inquirere volemus; itemque an diſtincta futura ſit viſio; hæc tria ſimul cognoſcere poterimus, ſi eo modo rationem ineamus, ac ſi viſibile in oculi loco fuerit conſtitutum, & hic viciſſim in illius locum ſucceſſerit. Omnia enim ex progreſſu flexuque radiorum facile apparent. Ut ex. gr. in fig. propoſit., quum Radii ex ſingulis punctis E viſibilis promanantes, poſt refractionem in lente A pertineant ad punctum κ; deinde vero poſtquam lentem B tranſierint ad punctum λ, facile hinc colligetur, utrum oculo in C diſtincta ſit futura viſio, an ſecus.

PRO-

TAB. XIII.


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 4.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

Propositio XLI.

Theorema.

Manente oculo & viſibili, quocunque loco inter utrumque lens convexa ſtatuatur, cujus foci diſtantia major ſit quarta parte intervalli quod inter oculum & viſibile, erectum hoc conſpicietur; Et maximum tunc apparebit, cum medio loco inter viſibile & oculum lens ſtatuetur. Si vero foci a lente diſtantia dicti intervalli quarta parte minor fuerit, etiam inverſum quandoque viſibile conſpicietur; eritque inverſarum ſpecierum minima, cum lens medium intervalli locum tenebit.

POſitus eſto oculus in D, viſibile in E, & lens convexa quovis loco inter utrumque, ut in A, focus autem lentis ſit O, & diſtantia AO primum major quarta parte intervalli DE. Oſtendendum eſt in primis, quod viſibile in E erectum conſpicietur. Hoc autem uno caſu manifeſtum eſt, ſcilicet ſi tam propinqua oculo lens collocetur, ut is inter ipſam & focum conſiſtat per Theorem. prop. XXXVI. At cum ulterius ab oculo diſtabit, ſic demonſtrabitur. Sit oculus in D, punctum conjugatum P, faciendo nimirum, ut duabus DO, DA ſit tertia proportionalis DP, & ſumatur ipſi AO æqualis Aσ. Ergo, quoniam DO ad DA ut DA ad DP, erit & DO ad DA, ut OA, ſive Aσ, ad AP, quare & DO ad OA, ut Aσ ad σP; itaque DO & σP ſimul ſunt non minores duabus ſimul OA, Aσ. Sed hæ duæ ſimul majores ſunt dimidia DE, cum ſint ſingulæ quarta parte majores; ergo additis OD & σP, erit tota DP major quam DE. Ergo punctum oculo conjugatum P cadit ultra viſibile in E, ideoque erectum hoc ſpectari neceſſe eſt per Theor. prop. XXXVII. Tab. XIV. Fig. 1. 2. 3. 4.

Porro

Porro demonſtrandum, quod cum locus lentis intervallum DE bifariam dividit maximum, apparebit viſibile in E. Sit igitur A medium inter D & E, ubi primo lens conſtituta ſit, deinde & alio quovis loco in α poſita intelligatur, oculo D propinquior; vel in β tantundem ab oculo remotior. Quod ſi igitur, poſita lente in α, oſtendatur minus apparere viſibile quam eadem poſita in A; etiam poſita in β, minus apparebit ex prop. XL præc., quia nempe tranſponendo lentem ex α in β, idem fit ac ſi ipſa manente in α, oculus & viſibile invicem loca D & E permutent. Horum vero prius iſtud ſic oſtendemus. Sit ω punctum focus lentis in α poſitæ, & ſumatur $\alpha\lambda$ æqualis $\alpha\omega$, ſitque oculo in D conjugatum punctum π ad lentem in α pertinens, poſita nimirum, duabus $D\omega$, $D\alpha$, tertia proportionali $D\pi$. Itaque, ſpectando viſibile per lentem in A, ratio apparentis ad veram magnitudinem, erit ea quæ componitur ex rationibus AO ad OD & DE ad EP, per prop. XXXVI. XXXVII. & inſpiciendo per lentem in α, ratio magnitudinis apparentis ad veram componetur ex rationibus $\alpha\omega$ ad ωD, & DE ad $E\pi$. Eſt autem vera magnitudo poſitione utrâque eadem, quoniam oculus & viſibile manere dicuntur; itaque oſtendere oportet, majorem eſſe rationem compoſitam ex rationibus AO ad OD & DE ad EP, quæ eſt rectang. AO, DE ad rectang. OD, EP, quam compoſitam ex rationibus $\alpha\omega$ ad ωD, & DE ad $E\pi$, hoc eſt, quam rationem rectang. $\alpha\omega$, DE ad rectang. ωD, $E\pi$. Priores autem rationum termini æquales ſunt, rectang. ſcilicet AO, DE, rectang. $\alpha\omega$, DE, quoniam $A\omega$ æqualis AO. Ergo oſtendendum, quod rectang. OD, EP minus eſt rectang. ωD, $E\pi$. Quoniam igitur AD æqualis AE & AO æqualis $A\sigma$, erit & OD æqualis σE. Item, quia AO æqualis $\alpha\omega$, demtâ vel additâ communi αO, erit αA æqualis $O\omega$, eadem ratione erit $\lambda\sigma$ ipſi $A\alpha$ æqualis, ac proinde quoque ipſi $O\omega$. Quoniam ergo paulo ante oſten-

tenſum fuit, quod DO ad OA, ut Aσ ad σP, erit rectang. DO, σP æquale rectang. OA, Aσ, hoc eſt, quadr. OA. Et eſt rectang. DO, σE æquale quadr. OD, quia σE æqualis oſtenſa eſt ipſi DO. Itaque exceſſus rectang. DO, σP ſupra rectang. DO, σE, hoc eſt, rectang. DO, EP æquale exceſſui quadr. AO ſupra quadr. OD. Etenim manifeſtum eſt, quod AO excedit OD, quoniam AO major eſt quarta parte totius ED, ideoque major dimidiâ AD. Et manifeſtum quoque, quod rectang. DO, σP excedit rectang. DO, σE, nam ſi O cadit inter A, D, cadet σ inter A, E; & P ante lentem ultraque viſibile in E, quoniam erectum conſpici oſtenſum fuit. Rurſus, cum D inter A, O, etiam E inter A, σ, & P cadit poſt lentem. Semper ergo his caſibus, E inter σ & P ſitum eſt, unde major σP, quam σE, & proinde rectang. OD, σP excedit rectang, OD, σE. Porrò, quoniam Dω ad Dα, ut Dα ad Dπ, etiam Dω ad Dα, ut ωα ſive αλ ad απ, unde & Dω ad ωα, ut αω ad λπ, Ergo rectang. Dω, λπ æquale qu. ωα. Eſt autem, in primo & ſecundo caſu, (*fig.* 1. 2.) rectang. ωD, Eπ æquale exceſſui rectang. ωD, λπ ſupra rectang. ωD, λE. Ergo idem rectang. ωD, Eπ æquale exceſſui quadrati ωα, h. e. qu. OA ſupra rectang. ωD, λE. In tertio autem & quarto caſu, rectang. ωD, Eπ æquale duobus ſimul rectang. ωD, λπ, & rectang. ωD, λE; Ergo hic idem rectang. ωD, Eπ æquale eſt rectang. ωD, λE cum qu. ωα, hoc eſt, cum qu. OA. Oſtenſum autem, quod rectang. DO, EP æquale exceſſui quadr. OA ſupra qu. OD. Apparet itaque, in 3. & 4. caſu, (*fig.* 3. 4.) quod rectangulo ωD, Eπ minus eſt rectangulum DO, EP, quod erat demonſtr. In 1. autem & 2. caſu ſeparatim idem oſtendetur hoc modo. Quoniam in 1. eſt Dω minor quam DO, erit major ratio ωO ad Dω quam ωO ad DO, hoc eſt, quam σλ ad σE. Oſtenſum enim, quod DO 2|2 Eσ. quodque Oω 2|2 σλ. Itaque componendo, major ratio OD ad Dω, quam λE ad Eσ Quare majus erit rectang. OD, Eσ, h. e., qu. OD

quam rectang. $D\omega$, λE. Unde minor eſt exceſſus quadr. A O ſupra quadr. O D, quam ejusdem quadr. A O ſupra rectang. $D\omega$, λE. Erat autem priori horum exceſſuum æquale rectang. O D, E P. Alteri vero æquale rectang. ωD, $E\pi$. Ergo illud, quam hoc minus eſt. In ſecundo autem caſu, quoniam $D\omega$ major eſt quam D O, erit major ratio $D\omega$ ad $O\omega$, quam D O ad $O\omega$, h. e., quam σE ad $\sigma\lambda$. Proinde, per converſionem rationis, erit minor ratio ωD ad D O, quam σE ad $E\lambda$, ideoque rectang. D O, $E\sigma$, h. e., qu. D O majus rectang. ωD, $E\lambda$: Unde reliqua ſimiliter concludemus, ut in caſu præcedenti. Nempe quod rectang. O D, E P minus eſt rectangulo ωD, $E\pi$. Quod demonſtrare oportebat.

Tab. XIV. Fig. 5. Quinto autem caſu, cum O incidit in D, etiam σ cadit in E. Et tum quidem per lentem in A poſitam, inſpiciendo apparentis magnit. ad veram, ratio eſt ea quæ E D ad D A per prop. XXXVI., hoc eſt, dupla. At inſpiciendo, per eandem tranſpoſitam in α, dicta ratio ut antè, eſt ea quæ rectang. $\alpha\omega$, D E, ad rectang. ωD, $E\pi$. Eſt autem hic rectang. $\alpha\omega$, D E æquale duplo qu. $\alpha\omega$, quia D E dupla A O, vel $\alpha\omega$. Eſt & rectang. ωD, $E\pi$ æquale rectang. ωD, $\lambda\pi$ una cum rectang. ωD, λE, quorum ſolum rectang. ωD, $\lambda\pi$ oſtenſum fuit æquale qu. $\alpha\omega$. Itaque rectangulum $\alpha\omega$, D E minus eſt, quam duplum rectang. ωD, $E\pi$. Et minor proinde jam ratio apparentis ad veram magnitudinem, quam dupla, qualis erat poſita lente in A.

Tab. XIV. Fig. 6. Denique, ſi ω incidat in D, erit ratio augmenti poſitâ lente in A, ut in præcedentibus, ea quæ componitur ex rationibus A O ad O D & D E, ſive ωE ad E P; at lente poſitâ in α, ratio augmenti erit ea, quæ $E\omega$ ad $\omega\alpha$ per prop. XXXVI. Componitur autem ratio $E\omega$ ad $\omega\alpha$ ex rationibus $E\omega$ ad E P & E P ad $\omega\alpha$, quarum E P ad $\omega\alpha$ minor eſt, quam A O ad O D. Nam oſtenſum fuit in præced. quod $P\sigma$ ad σA, ſeu $\omega\alpha$ ſicut A O ad O D; & eſt P E minor quam

quam P σ, quia E cadit inter P & σ, ut oſtenſum itidem eſt ſuperius. Itaque compoſita ex rationibus E ω ad E P & E P ad ω A, minor eſt compoſitâ ex rationibus ω E ad E P & A O ad O D. Hoc eſt, ratio augmenti, poſita lente in α, minor quam cum eadem ponitur in A.

Eſto nunc diſtantia A O, quæ eſt inter lentem & focum, minor quarta parte intervalli D E, quod inter viſibile & oculum. Itaque primùm oſtendere oportet, quod lens eo loco poni poteſt ut inverſum conſpiciatur viſible. Quoniam ergo A O minor eſt quartâ parte D E, ſuperabitur rectang. ſub A O, D E a $\frac{1}{4}$ quadrati D E, hoc eſt a rectang. D A E certo exceſſu. Ponatur autem A α, cujus quadr. iſto exceſſu minus ſit, & conſtituatur lens in α, dico inverſam exhibitum iri viſibilis in E ſpeciem. Sint enim reliqua conſtructa, ut in caſibus prioribus. Quia igitur D E bifariam æqualiter ſecta eſt in A & inæqualiter in α, erit quadr. A α æquale exceſſui rectang. D A E ſupra rectang. D α E. Idem vero quadratum A α minus eſt exceſſu rectang D A E ſupra rectang. ſub D E, A O ex conſtr. Itaque hic exceſſus quam ille major eſt, ideoque rectang. ſub D E, A O minus erit rectang. D α E. Quare minor ratio D E ad E α, quam α D ad A O, ſeu $\alpha\omega$ Et, per converſionem rationis, major ratio E D ad D α, quam α D ad D ω. Sed eſt π D ad D α, ut α D ad D ω. Ergo π D minor eſt quam E D. Eſt autem π punctum oculo in D conjugatum ad lentem in α. Itaque, per prop. XXXVII., inverſum apparere neceſſe eſt viſibile. quod erat oſtendendum. Poterat ergo & ultra medium A lens conſtitui, ut inverſam ſpeciem exhibeat, tanto quidem intervallo, quanto citerior eſſe poteſt; idque conſtat per XL. TAB. XIV. Fig. 7.

At in ipſo A medio conſtitutam, inverſa quoque viſui offerre ſic fiet manifeſtum. Quoniam ſcilicet in continua ſunt proport. D O, D A, D P; eſtque D O major dimidiâ D A, quia A O eſt minor dimidiâ D A, erit & D A major dimidiâ D P, ideoque D P minor quam D E. Eſt

autem P punctum oculo conjugatum ad lentem in A. Ergo & hic inverſum exhibet viſibile in E poſitum.

Supereſt ut oſtendatur, minus ſpectari viſibile per lentem in A medio poſitam, quam per eandem in α. De quo conſtabit, ſi contra quam in præcedentibus oſtenſum fuerit, quod rectang. O D, E P majus eſt rectang. ω D, E π. Quum igitur hîc cadat P inter σ & E, erit rectang. O D, E P æquale exceſſui rectang. O D, σ E ſupra rectang. O D, σ P, hoc eſt exceſſui qu. O D ſupra qu. O A; nam rectang. O D, σ E ſuperius æquale oſtenſum fuit qu. O D, & rectang. O D, σ P æquale qu. A O. Rectang. verò ω D, E π, æquale erit exceſſui rectang. ω D, λ E ſupra rectang. ω D, $\lambda\pi$, hoc eſt, exceſſui rectang. ω D, λ E ſupra qu. A O; nam oſtenſum quoque fuit, quod rectang. ω D, $\lambda\pi$ æquale qu. $\alpha\omega$ ſive A O. Eſt autem qu. O D majus rectang. ω D, λ E, nam hoc eodem modo oſtenditur, quo in caſuum præcedentium primo; Ergo exceſſus qu. O D ſupra qu. O A, hoc eſt, rectang. O D, E P, majus eſt exceſſu rectang. ω D, λ E ſupra quadr. O A, hoc eſt, rectangulo ω D, E π: quod erat oſtendendum.

Propositio XLII.

Theorema.

Manente oculo & viſibili, ſi lens cava inter utrumque conſtituatur, quò propinquior erit loco inter oculum & viſibile medio, eo minorem hujus ſpeciem efficiet; & minimam omnium cum medium tenebit ipſum.

Tab. XIV. Fig. 8. Esto viſibile in E poſitum, oculus in D, ſitque punctum M intervalli D E medium; Et primùm lens cava conſtituatur in A inter M & D, deinde autem in α, inter A, D, ita ut diſtantia α M major ſit quam A M. Oportet oſtendere, quod minor erit ſpecies viſibilis in E per

per lentem in A ſpectati, quam per eandem in α. Sit O punctum diſperſus lentis in A. Sed ω cum eſt in α, & omnia ſimiliter conſtruantur ac in theorem. præcedenti. Itaque, eâdem argumentandi ratione, devenietur eo, ut oſtendere oporteat, rectang. OD, EP majus eſſe rectang. ωD, Eπ, cum illic oſtenſum fuerit minus. Quia ergo DA minor eſt quam AE, & AO æqualis Aσ; erit utraque ſimul DA, AO, hoc eſt DO, minor utraque AE, Aσ, hoc eſt Eσ. Tres autem hæ Aα, Oω, σλ manifeſtò inter ſe ſunt æquales, ſicut & in præcedentibus. Itemque rectang. DO, σP, & rectang. ωD, λπ, ut illic, ſingula æqualia qu. AO. Eſt autem hic exceſſus rectang. OD, σE ſupra rectang. OD, σP æqualis rectang. OD, EP: & exceſſus rectang. ωD, λE ſupra rectang. ωD, λπ æqualis rectang. ωD, Eπ. Ergo oſtendendum eſt, quod exceſſus ille quam hic major eſt; quod erit manifeſtum, ſi oſtendatur rectang. OD, σE majus rectang. ωD, λE, cum rectang. OD, σP & ωD, λπ inter ſe æqualia dicta ſint. Quia ergo Dω minor eſt quam DO, erit major ratio Oω ad ωD, quam Oω ad OD. Sed hæc etiam major eſt quam σλ ad σE; nam dictum eſt, quod σλ æqualis Oω; quodque σE major quam DO. Ergo major ratio Oω ad ωD, quam σλ ad σE. Et componendo, major OD ad Dω, quam λE ad Eσ. Quamobrem majus quoque rectang. OD, Eσ, rectangulo Dω, λE, quod reliquum erat oſtendere.

Quod ſi vero ipſi MA intervallo ad alteram partem puncti medii M æquale ſumatur, ac in eo lens conſtituatur; Eâdem magnitudine cernetur viſibile atque per lentem in A, ut oſtenſum eſt propoſ. XL. Proinde conſtat, tanto exilius conſpici, quanto propior erit lens puncto medio M. Ex quo denique manifeſtum eſt, minimum conſpici viſibile, cum in ipſo M puncto lens conſtituitur. Quæ fuere demonſtranda.

Propositio XLIII.

Theorema.

Manente diſtantia oculi a lente convexa, ſi inter lentem & focum oculus ſitus ſit, quo magis viſibile removebitur, eo minori conſpicietur magnitudine. Si verò ultra focum oculus a lente diſtet, abſcedens viſibile augebitur, quamdiù erectum apparet; inde verò, ſi porrò removeatur, decreſcet inverſa imago. Quod ſi in foco lentis conſtitutus fuerit oculus, quacunque viſibilis a lente diſtantiâ, eâdem ſemper magnitudine cernetur.

Tab. XIV. Fig. 9. POnantur quæ in præcedenti prop. XXXVI. & XXXVII; (nempe in quâ de augmento unius lentis convexæ.) Primùm itaque, quoniam oculo citra focum a lente diſtante, punctum conjugatum P cadit poſt lentem & oculum, manifeſtum eſt, quo magis viſibile NN removebitur, eo minorem fore AB; recta enim ducta eſt NBP. Verùm, DA diſtantia oculi a lente eadem manere ponitur; ergo minuitur angulus ADB recedente viſibili, quapropter minui ſpeciem ejus neceſſe eſt.

Tab. XIV. Fig. 10. Oculo autem ultra focum remoto, quoniam punctum P cadit ante lentem, apparet quandiu viſibile NN erectum ſpectatur, hoc eſt, quamdiu non ultra P diſtat; tanto majorem fore AB, quanto popius ad P viſibile acceſſerit. Ergo tanto major quoque fiet angulus ADB, quia diſtantia AD non mutatur.

Tab. XIV. Fig. 11. Sed, poſtquam everſo ſitu ſpectari ceperit, remotum videlicet ultra punctum P, quantò ulterius ibit, tantò minor fiet AB, ideoque & angulus ADB.

Tab. XIV. Fig. 12. Poſito autem oculo in foco lentis ipſo, nullum inveniri punctum conjugatum diximus, ſed rectam duci NB axi EA parallelam. Igitur quæcunque viſibilis diſtantia æquè

æquè magna eſt AB, ideoque & angulus ADB. Quare eâdem ubique magnitudine viſibile conſpicietur. Quæ fuere demonſtranda.

Propositio XLIV.

Theorema.

Manente diſtantia lentis ab aſpectabili; ſi fu rit hoc lenti propius quam focus ſuus, quo magis oculus a lente diſtabit, eo minori magnitudine conſpicietur. Si verò ultra focum a lente diſſitum fuerit aſpectabile, removendo oculum a lente, augebitur quandiu erectum apparebit. Inde verò, ſi porrò receſſerit oculus, everſa ſpecies diminuetur. Quod ſi ad focum lentis ſitum ſit, quacunque oculi a lente diſtantiâ, æquali magnitudine conſpicietur.

CUjus demonſtratio evidens eſt, ſi id, quod prop. XL. de permutatione loci mutua inter oculum & rem viſam dictum fuerit, applicetur Theorematі.

Propositio XLV.

Theorema.

Si loco conſpicilli duarum lentium, ejuſmodi adaptetur ex ſolido materiæ diaphanæ fruſto, cujus altera ſuperficies convexa ſit, altera cava, eâdem proportione viſibilia augebit longinqua, atque conſpicillum duarum lentium. Scilicet augmenti ratio ea erit, quæ diſtantiæ ſuperficiei convexæ a foco ſuo, ad diſtantiam foci a cava, cui oculus admotus fuit.

ESto talis ſpecilli continui ſuperficies convexa AM, ex ſphæra cujus N centrum. Superficies vero BQ cava centro P; Et focus ſuperficiei AM, ſeu concurſus paral- TAB. XIV. Fig. 13.
lelorum,

lelorum, ſit G punctum; at R punctum diſperſus ſuperficiei B Q radiorum parallelorum, qui intra ſolidum feruntur. Porrò viſibile longinquum ſit D E D. Itaque oſtendendum, cum oculus ſuperficiei B applicabitur, ea proportione viſibile D E D augeri, quam habet A G ad G B.

Ponatur prius oculus in C, non adhuc ſuperficiei B Q prope admotus, & tribus hiſce C R, C P, C B ponatur quarta proportionalis C K, ſecundum prop. XII. p. 5. Ergo quoniam radii ex C puncto ſi egrederentur, refracti in ſuperf. B Q, pertinerent ad punctum K, ideo viciſſim, qui intra diaphani ſoliditatem ita feruntur, ut tendant ad K, pertinebunt poſt refractionem in ſuperficie B ad punctum C. Eadem ratione, ſi tribus hiſce K G, K N, K A collocetur quarta proportionalis K S, fiet ut radii ad punctum S tendentes, refractique in ſuperficie A M, tendant ad punctum K. Jungatur D S ſecans ſuperficiem A M in M, deinde M K ſecans ſuperficiem B Q in Q, & connectantur Q C. Recta vero D C ſecet ſuperficiem B Q in O. Itaque radiorum ex puncto viſibilis D, is, qui ſecundum rectam D M, flectetur ab M verſus K, ſed iterum refractus in Q, perveniet ad oculum in C. Quare conſtat, in puncto Q ſuperficiei B Q, ſpectari punctum D; quod ſpectaretur in O, ſi loco ſpecilli, una tantùm ſuperficies B poneretur refractionis expers. Eſt igitur ratio magnitudinis apparentis ad veram oculo in C conſtituto, ea quæ Q B ad O B. Ratio autem Q B ad O B compoſita eſt ex rationibus Q B ad M A; & M A ad E D; & E D ad O B, quæ ſunt eædem rationibus K B ad K A; S A ad S E; & E C ad B C. Et eſt ratio compoſita ex rationibus S A ad S E, & E C ad B C, eadem compoſitæ ex rationibus S A ad B C & E C ad S E. Itaque ratio Q B ad O B componetur ex rationibus K B ad K A, S A ad B C, & E C ad E S; ratio autem compoſita ex rat. K B ad K A & S A ad B C, eſt eadem compoſitæ ex rat. K B ad B C & S A ad K A; reliqua vero E C ad E S eſt ratio æqualitatis,

ſitatis, quoniam viſibile DED longinquum ponitur. Ergo ratio QB ad OB compoſita eſt ex ratione KB ad BC, & SA ad KA. Quia verò ex conſtr. eſt CR ad CP, ut CB ad CK, erit PR ad RC, ut KB ad BC. Item, quia KG ad KN, ut KA ad KS, erit NG ad GK, ut SA ad AK. Igitur ratio QB ad OB componetur ex rat. PR ad RC & NG ad GK, oculo adhuc in C conſtituto. Cum verò ſuperficiei BQ oculus contiguus ponetur, cadet C in B, item K in B, quare tunc erit ratio PR ad RC, ſeu RB eadem quæ eſt refractionis, ac proinde eadem rationi AG ad NG. Ratio verò NG ad GK, erit NG ad GB. Ergo tunc ratio QB ad OB, quæ eſt ratio magnitudinis apparentis ad veram, erit compoſita ex rat. AG ad NG, & NG ad GB, hoc eſt, erit ea quæ AG ad GB; quod erat demonſtr.

Oportet autem ſuperficiem BQ certâ ratione cavam eſſe, ſi diſtincta viſio requiritur. Nam alioqui, etſi magis minusve cava eſſet, aut plana aut convexa quoque, idem prorſus contingeret augmentum, ſi modo oculus prope admotus ponatur. Nam ſemper eâdem demonſtratione oſtendetur magnitudinis apparentis ad veram, eſſe rationem eandem, quæ AG ad GB.

Hiſce verò nequaquam conſentiunt ea, quibus Carteſius Teleſcopii inventum explicare contendit, ſimilem huic tubum proponens ſolidum. Vult enim cavam ſuperficiem ejuſmodi eſſe, ut radios a ſingulis viſibilium punctis procedentes, & per ſuperficiem tubi exteriorem transmiſſos, ita inflectat ac ad oculum mittat, tanquam ſi a propioribus punctis advenirent: Et quam rationem habuerit diſtantia horum punctorum propinquiorum ad diſtantiam ipſius viſibilis, eandem reciprocè magnitudinis apparentis ad eam quæ ſolis oculis perciperetur, definit. Hoc autem quomodo verum ſit, quum ſenum oculis ea conveniat teleſcopii conſtitutio, ut radii convergentes aut certè paralleli ad oculum deferantur, non autem quaſi ex pun-

ſcto aliquo propiori manantes. Et notum eſt tamen, non minus ſenibus quam qui viſu pollent, ſpecierum magnitudines multiplicari.

Porro illud quoque in eâdem Carteſii explicatione abſurdum, quod eam ob cauſam majora omnia videri ait, quoniam, ex diverſis rei viſæ punctis, venientes radii decuſſentur in exteriori convexa tubi ſuperficie, qui, tubo non adhibito, ad pupillam oculi decuſſarentur; quoniam enim ſi plana aut concava eſſet, loco convexæ ſuperficiei nihilominus decuſſatio ſimilis ibi contingeret, efficietur æquè etiam, inverſo tubo, majora omnia conſpici debere. Quod iis quæ ſuperius demonſtrata fuerunt, atque ipſi adeo experientiæ adverſatur.

Propositio XLVI.

Diſpoſitis, in linea recta oculum & viſibile jungente, lentibus aut ſuperficiebus quotvis & quibuslibet, communem axem habentibus eandem lineam rectam, percipiet oculus, poſt omnium refractiones, aliquam viſibilis partem, etiamſi veluti ad punctum reductus fuerit, dummodo hoc punctum non ſit, quô poſt refractionem concurrunt radii a puncto viſibilis, quod in axe eſt, egreſſi.

Tab. XIV. Fig. 14. Sit recta FE axis communis, in quo oculus ad A punctum, lentes ad B & C. Inveniatur porro ex prop. xx. punctum F, ad quod pertinentes radii, ut GF, flectantur refractione lentis B per HA ad punctum oculi A. Itemque inveniatur punctum D, ad quod pertinentes radii, ut DG, flectantur refractione lentis C in GF; ut pertineant ad punctum F, atque ita porro ſi plures fuerint lentes ſuperficiesve. Poteſt autem infinitè diſtare punctum F vel D, quibus caſibus axi paralleli fiunt radii GF, vel DG. Quod ſi jam viſibile ad punctum D poſitum eſſet,

ſet, apparet oculum fore in puncto concurſus radiorum e puncto D venientium, eoque unum hoc viſibilis punctum tantummodo infinitè tunc expanſum cerni. Ponimus autem hîc oculum eſſe extra hoc concurſus punctum. Ergo punctum D cadit, vel ultra, vel citra locum rei viſibilis, quæ nempe ſit in E vel K.

Quoniam igitur ita duci poteſt FHG, ut quamlibet exigui fiant anguli ſinguli GFC, GDC, ſeu EDN, apparet effici poſſe, ut rectæ FHG, GDN, non extra lentes B, C aberrent. Harum verò poſtrema GDN, neceſſariò partem aliquam rectarum EM, vel KL axi perpendicularium intercipiet, velut NE vel KO, quas oculus comprehendet angulo BAH. Itaque aliquam viſibilis partem cernet; quod erat demonſtr.

Quod ſi infinitè diſtet punctum D, tunc DG axi parallela intercipiet rurſus partem rectarum EM vel KL. Si verò F infinitè diſtat, fit FG axi parallela, nec id quicquam in demonſtratione mutat.

Propositio XLVII.

Si inter oculum & rem viſam quotlibet lentes aut ſuperficies diaphani interjaceant, & a puncto rei viſæ, quod ſit in omnium axe communi, manantes radii, trajectis iisdem lentibus aut ſuperficiebus paralleli exeant; quocunque intervallo poſt ipſas oculus ſtatuatur, eadem apparebit rei viſæ magnitudo, idemque poſitus.

Sit axis communis quotlibet lentium, vel ſuperficierum ſphæricarum ABC, res viſa linea AF, axi ABC perpendicularis, in qua punctum F tam propinquum ſit ipſi A, ut oculo in K aut C, quibuslibet nempe duobus axis punctis, collocato & ad punctum redacto, in conſpectum venire poſſit: hoc enim poſſibile eſſe ex prop. antecedente conſtat. Dico, utroque oculi poſitu, eâdem TAB. XIV. Fig. 15.

 magni-

magnitudine apparituram lineam AF. Quum enim a puncto A manantes radii, trajectis interpoſitis diaphanis, inter ſe fiant paralleli; etiam ab F puncto egreſſi inter ſe paralleli exibunt *; quorum DC ad oculum in C poſitum pergat, LK ad oculum poſitum in K. Quia igitur inter ſe paralleli ſunt radii DC, LK, æquales erunt anguli BKL, BCD, atqui oculo in K ſpectatur recta AF angulo BKL, oculo vero in C ſpectatur eadem AF angulo BCD. Ergo utrobique æquali angulo, ideoque pari magnitudine. Sed & ad eandem axis partem cadere apparet rectas CD, KL, cum ex punctis C, K parallelæ exeant. Ergo, ſive ex C, ſive ex K, idem poſitus percipietur lineæ AF. Quæ erant demonſtr.

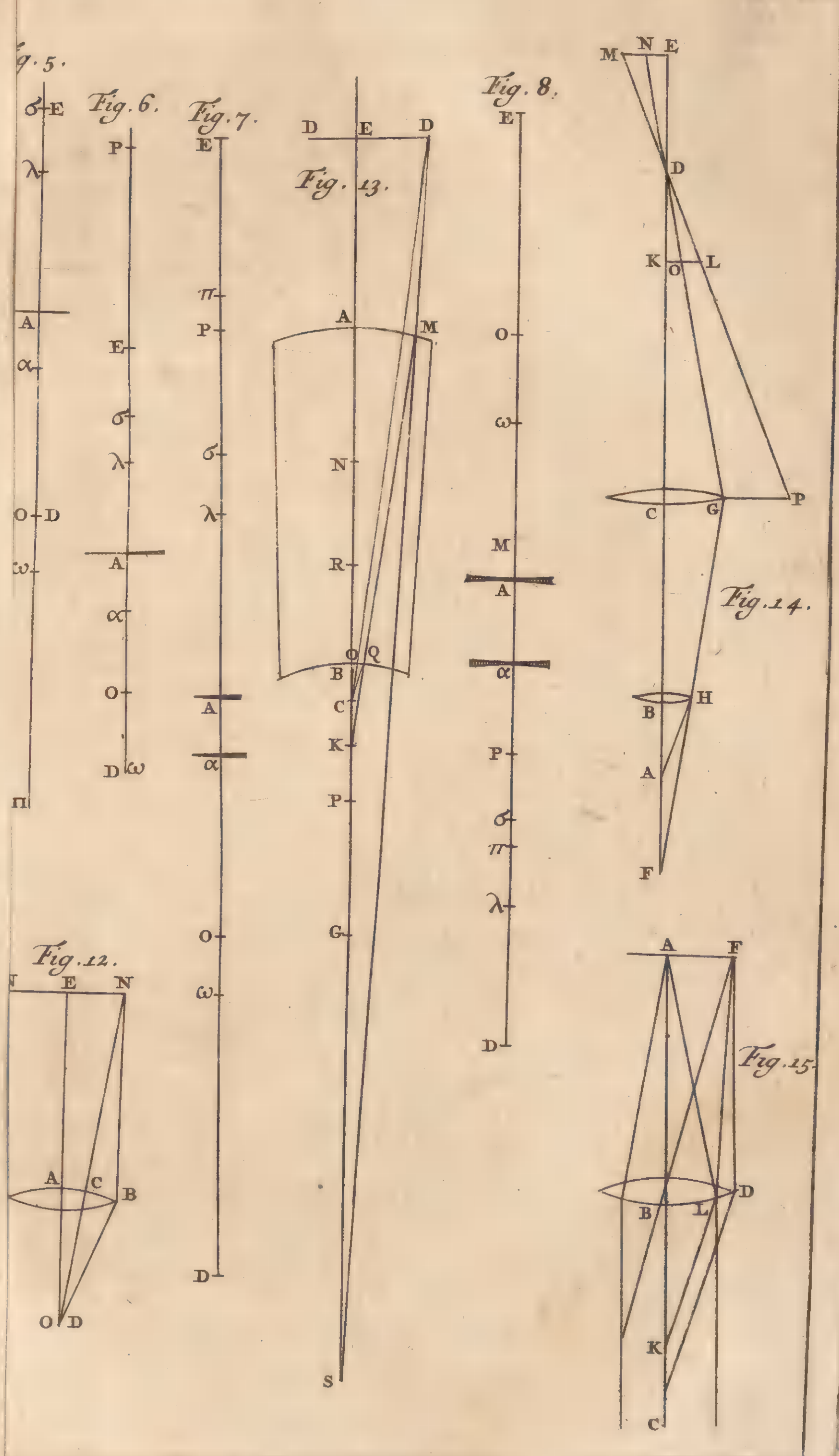
* Per prop. XXI.

DE TELESCOPIIS.

PRimum ac præcipuum eorum, quæ in hac refractionum doctrinâ tractantur, Teleſcopiorum eſt ratio; magni inprimis inventi, cujus præſtantiam pro dignitate nemo ſatis deprædicaverit. Ut enim utilitates cœteras prætercam, de quibus poſtea dicetur, quantum hoc eſt in cœleſtium contemplatione ad ea viam aperuiſſe, quæ nulla alia ratione inveſtigari poterant: Unde & rerum naturæ mirabilia multa patuerunt, & totius denique mundi conſtitutio, ut qua regione tellus hæc noſtra, nosque qui eam incolimus poſiti ſimus, multò quam ante certiùs, compertum comprobatumque ſit. Qua cognitione nihil mihi majus meliusve hominum ſolertiâ perfectum eſſe videtur. Quod ſi quis tantâ induſtriâ exſtitiſſet, ut, ex naturæ principiis & Geometriæ, hanc rem eruere potuiſſet, eum ego ſupra mortalium ſortem ingenio valuiſſe dicendum crederem. Sed hoc tam longè abeſt, ut, fortuitò reperti artificii, rationem non adhuc ſatis explicare potuerint Viri doctiſſimi.

Sunt qui inventionis, ſed, uti dixi, fortuitæ, primæ laudem

TAB. XIV.



laudem Jacobo Metio Batavo Alcmariæ civi tribuunt. Mihi verò certò compertum eſt ante ipſum teleſcopia fabricaſſe Artificem quendam Medioburgenſem apud Zelandos circa annum hujus ſæculi nonum, ſive is fuerit, cujus Sirturus meminit, Joh Lippersheim nomine, ſive, cui Borellus in libello de vero Teleſcopii repertore primas defert, Zacharias. Hi tunc non majores ſeſquipedalibus tubos factitabant. Utroque verò multo prior rudimenta artis tradiderat Joh Baptiſta Porta Neapolitanus, cujus exſtant de rebus Dioptricis, & Magia Naturali libri, totis 15. annis ante editi, quam in Belgio noſtro teleſcopia exorirentur. In quibus libris de ſpecillis (ut vocat) ſuis memorat res procul poſitas quaſi propinquæ eſſent oſtendentibus, deque conjunctione cavarum & convexarum lentium. Nihil tamen magnopere eum profeciſſe, hoc ipſum probat, quod tanto tempore ars jam cœpta non ultra inclaruit, neque ipſe Porta quidquam in cœlo obſervavit eorum quæ poſtea apparuerunt. Hoc inde eſt quod caſui, fortuitiſque experimentis originem inventi deberi conſtat. Neque enim hic vir, licet Mathematicarum aliquatenus gnarus, reconditas rationes, quibus ars ea pro fundamentis utitur, comprehenderat, ut meditatione eam eruere poſſet, multoque minus illi, quos ante memoravi, homines opifices ac ſcientiarum rudes. Fortunâ vero & caſu eodem perventum nihil mirum eſt, cum frequens uſus eſſet, jam a trecentis atque amplius annis utriusque generis lentium, quibus ſeorſim adhibitis vitia oculorum emendantur. Ut potius mirandum ſit, tamdiu rem obviam latuiſſe.

Cœterum, ut primùm Teleſcopiorum Belgicorum fama ſparſa erat, continuò Gallileus ſimilia illis, ac brevi multo præſtantiora effecit, quibus celeberrima illa cœli phænomena omnium primus intuitus eſt: Lunæ montes vallesque, Solis maculas, & ex his converſionem ejus in ſemetipſum, Planetas Jovis comites, Phaſes Veneris quales

Lunæ, variasque ad aſpectum magnitudines; Viam lacteam minutis ſtellulis refertam, unde candoris cauſa; Differentiam ſtellarum inerrantium inter & planetarum diametros, atque illarum numerum antiquitus cognito multò majorem. Idem Gallileus Saturni quoque phænomena obſervaverat, quâ licebat in illa perſpicillorum ſuorum parvitate, veras autem planetæ figuras adſecutus non erat, ſed neque quisquam alius multis poſt ipſum annis. Etſi enim magnitudine multum creverant tubi, parum tamen virtute & efficacia proceſſerant. Nos autem magis auſpicato rem eandem aggreſſi, cum quæ ad refractiones radiorum attinent jam perſpecta haberemus, ipſique nobis lentes effeciſſemus ac teleſcopia pedes viginti & amplius longa, his Saturni formas non ante viſas deprehendimus, cauſamque earum, annulum globo circundatum, nullo in cœteris planetis exemplo. Item comitem Saturno planetam exiguum reperimus, dierum ſexdecim periodo circumeuntem, quæ omnia ante annos 26. libro ſingulari conſcripta edidimus. Noſtris autem obſervationibus excitati Aſtronomi atque artifices, majora ſubinde teleſcopia paraverunt, in quibus optima, quæ a Joſepho Campano Romæ fabricata. Quorum opera feliciter decennio poſt, duos alios, præter noſtrum illum, Comites apud Saturnum reperit Dom. Caſſinus. Idemque in Jovis ac Martis ſideribus maculas quasdam obſervavit, ex quarum motu, etiam globorum quibus inerant, converſiones certis periodis definivit.

Et hactenus quidem adhuc proceſſit nobile hoc artificium, hæcque ſumma eſt eorum quæ de rebus cœleſtibus terrarum incolis revelavit. Quæ magna ac præclara eſſe quis niſi plane ſtupidus non agnoſcit? Quanta verò ad naturæ contemplationem lux hinc exorta ſit, quis non Philoſophiæ ſtudiis initiatus intelligit? Certe gratari ſæculo huic noſtro poſſumus propter tantarum rerum nunc demum acquiſitam ſcientiam: quam quo non pretio redemiſſent

miſſent Viri illi eximii, non longo annorum intervallo hinc excluſi, Copernicus, Regio-montanus, Braheus. Veteres autem illi ſapientiæ cultores, Pythagoras, Democritus, Anaxagoras, Philolaus, Plato, Hipparchus, quas non exteras terras peregrinando pervagati eſſent hujusmodi naturæ ſecretorum noſcendi amore, utque talibus frui poſſent ſpectaculis? Fortaſſe autem, & alia plura ac nova præter ea quæ diximus propediem exſpectanda ſunt, poſtquam, nupero invento noſtro, ingens incommodum ex nimia tuborum mole ac pondere ortum, atque adeo ipſos tubos ſuſtulimus, ut nihilo difficilius, nunc centenum vel ducentorum pedum teleſcopia, quam antea decempedalia, tractentur. Utique, cum & expoliendarum ampliſſimarum lentium artem plures jam excolere cœperint, cujus Nos quoque ſtudium longo tempore intermiſſum repetiimus, nec pœnitendo ſucceſſu. Sed jam ad cauſas proprietatesque factitii hujus oculi pergamus, quas non ſatis feliciter hactenus expoſitas habemus.

Quod enim hic præ cœteris requirebatur, ut, datâ lentium formâ ac poſitu, ex his modus menſuraque amplificandæ rei viſæ definiretur, id hactenus præſtitum non eſt. Nam neque Keplerus hoc docuit, etſi multâ laude dignus ob ea quæ in Dioptricis primus explicuit; Neque illo felicior fuit Carteſius, immò, ut vere dicam, a via potius aberravit in his, quæ de ratione & effectu teleſcopii demonſtranda ſuſceperat. Quod vix credibile de tanto Viro, tamque in his rebus verſato, tamen dicendum fuit, ne quis fruſtra ea intelligere laboret, e quibus nulla ſana ſententia elici poteſt. Cum verò alii multi poſt eum in eodem argumento operam inſumſerint, nihilo magis tamen idem Problema, quod in his omnium præcipuum eſt, abſolverunt. Ab eo nunc nos ordiemur, idque in ſingulis teleſcopiorum generibus expediemus.

Oſtendimus autem in ſuperioribus, in univerſum datâ formâ & poſitu duarum quarumlibet lentium, itemque oculi

oculi loco, quomodo augmenti ratio cognoſcatur. At quia nunc illos tantum caſus, quos Teleſcopia requirunt, exequi volumus, brevius idem conficiemus. Ac primùm quidem in illo teleſcopiorum genere, quod e convexa & cava lente componitur, omniumque primum fuit inventum. Requirunt verò primò eam lentium poſitionem teleſcopia omnia, ut diſtincta viſio ſequatur. Ut verò auctiora referant quæ ſpectantur, neceſſe eſt, in his quæ duabus lentibus conſtituuntur, ut exterior convexa ſit; ejus verò, quæ eſt oculo propior, e minori ſphæra ſit, ſive convexitas, ſive cavitas.

Propositio XLVIII.

Teleſcopium ex convexa & cava lente compoſitum, viſibilia longinqua diſtinctè ac recto ſitu videri facit, amplificatque ſecundum rationem foci diſtantiæ lentis convexæ, ad diſtantiam puncti diſperſus lentis cavæ.

Tab. XV. Fig. 1. 2.

Sit utriusque lentis axis communis AO; lens verò exterior convexa A, cujus punctum concurſus radiorum parallelorum, a viſibili longe remoto venientium, ponatur O punctum. Cava autem ſit D, quæ ſic collocetur inter lentem A & focum ejus O, ut punctum diſperſus radiorum parallelorum a parte eâ, ubi eſt O, in ipſam incidentium, cadat in idem punctum O. Et huic lenti proximus primò ſtatuatur ſpectantis oculus.

Radii igitur a puncto rei longinquæ egreſſi cenſentur paralleli incidere in lentem A, ii quidem, qui ex puncto in axe producto procedunt, cogerentur ad punctum O; ſed rurſus paralleli evadent operâ lentis D, ita, ut dictum eſt, collocatæ, uti ex ſupra demonſtratis conſtat. Parallelos enim radios ad oculum pervenire volumus, ut bonâ oculi conſtitutione fruentibus teleſcopium aptetur; Nam de Myope dicemus poſtea. Similiter verò a punctis longinquis

quis extra axem poſitis manantes colligerentur, quique ad puncta ſua prope O, ſed & hi, lentis D refractione, evadent denuo paralleli, quamvis ad axem A D obliqui, ſecundum prop. XXI; quos radios tamen in figurâ non expreſſimus, vitandæ confuſionis gratiâ.

Jam ex demonſtratis prop. XXXV. patet, eandem fore amplificationem & poſitum manente lente utraque, atque cum loco lentis D foramen exiguum ſtatuetur; tunc verò magnitudinis apparentis ad veram ea eſt ratio, quæ A O ad O D, ut oſtenſum prop. XXXVI. Et ex eâdem viſibile erectum ſpectatur. Ergo eadem hîc fiunt teleſcopio ex lentibus A, D compoſito. Quod ſi verò retrocedat oculus ab lente D, eadem remanet rei viſæ magnitudo apparens ex prop. XLVII., nec vera mutatur, quia viſibile longinquum ponitur. Ergo eadem quæ prius manet amplificatio. Sed & poſitus idem ex eâdem prop.

Quod ſi Myopi aptandum ſit hujusmodi teleſcopium, paulò propius admovendam eſſe conſtat lenti A lentem ocularem D, unàque oculum ſpectatoris; quoniam ſic fiet ut, non jam paralleli, ut antea, radii perveniant ad oculum, ſed divergentes. Hinc verò paulò minus augmentum continget Myopi quàm prius, cum punctum O maneat, eoque intervallum D O creſcat, ratio verò augmenti ſit ſemper ea quæ A O ad O D.

Et hæc quidem primarii theorematis breviſſima eſt demonſtratio. Cujus partem eam, quæ ad amplificationem rei viſæ attinet, aliter quoque demonſtrabimus, ut nihil opus ſit prop. XXXVI. Poſitis igitur, ut ante, lentibus A C & D, & puncto O, fiat duabus D O, D A, tertia proportionalis D P, ponenda in eandem partem ac D O. Jam radii quilibet ad punctum P tendentes, ut E C P, & a lente A C refracti, cogentur ad punctum D lentis hîc poſitæ centrum ex prop. XX. Ponamus iſtum E C P radium eſſe unum ex iis qui a dextro Lunæ latere egrediuntur, cum centrum Lunæ ſit in producto axe D A. Et conſtat TAB. XV. Fig. 3.

quidem hunc rectâ lineâ C D F ad oculi pupillam perventurum, quia per centrum lentis D tranſit, cujus mediæ craſſitudo pro nullâ habetur, & duæ ejus ſuperficies ibidem pro parallelis. Diximus autem, omnes a puncto illo Lunæ procedentes inter ſe parallelos ad oculum deferri. Itaque ſic omnes recipit oculus, ut radio C D F paralleli incedant; ac propterea punctum illud in Lunæ latere videt eo loco quo tendit recta D C, quæ cum in eandem partem axis tendat, ad quam ſitum eſt punctum Lunæ, unde radii advenere, apparet erectas exhiberi res viſas. Porrò angulus A D C definit ſemidiametrum Lunæ teleſcopio auctæ. Sed angulus C P A eſt is, quo nudo oculo iſte ſemidiameter comprehenditur, quia radium E C P a dextro Lunæ latere exire diximus, radium vero H A P, a centro ejus, nam ſive e puncto P, ſive ex G Luna ſpectetur nudo oculo, eodem angulo apparet propter maximam diſtantiam. Itaque amplificatio contingit ſecundum rationem anguli A D C ad A P C, quæ cenſetur hic eadem ac rectæ P A ad D A; Sed quia ex conſtructione eſt D O ad D A, ut D A ad D P, erit invertendo & componendo A O ad O D, ut P A ad A D. Ergo jam amplificationis ratio eſt, quæ A O ad O D; quod erat demonſtrandum.

Apparet autem hîc nihil referre quantum ad amplificationem, quo loco poſt lentem oculus conſtituatur.

Tab. XV. Fig. 4. Ponantur rurſus lentes A C & D, ut ante, & ſit A Q, in axe earum producto, æqualis A O. Accipiamus jam, ex radiis iis qui a puncto lateris dextri Lunæ adveniunt, radium R Q C, qui per Q punctum tranſiens (aliquis enim eò tranſibit) occurrat lenti A C in C. Is hinc parallelus fiet axi A D, & refractione alterâ lentis cavæ diverget, ac ſi veniret a puncto L, & ad oculum feretur ſecundum rectam L I F, ut, nempe diſtantia L D ſit æqualis D O, quia tunc L eſt punctum diſperſus parallelorum in lentem D incidentium.

Proportio autem auctæ magnitudinis facilè jam hîc colligitur,

ligitur. Quia enim radii, a puncto in latere Lunæ dextro egreſſi, perveniunt paralleli ad pupillam CF, poſtquam utramque lentem pervaſere, omneſque propterea paralleli fiunt radio LIF, quem conſtat eſſe eorum unum, percipietur illud Lunæ punctum ſecundum rectam IL, ac proinde angulo ILD ſemidiameter Lunæ comprehendetur. At verò angulus, quo ſemidiameter ſpectabitur oculo nudo, ſive ex D ſive ex Q, eſt RQH, ſive CQA. Ergo ratio augmenti eſt ea, quæ anguli DLI ad AQC, hoc eſt, quæ rectæ AQ ad LD, propter æquales AC, DI. Sed AQ eſt æqualis AO, & LD æqualis DO. Eſt ergo ratio augmenti ea, quæ AO ad OD; quod erat oſtend.

Poteſt idem rurſus demonſtrari ex interſectione radiorum, quæ in A centro lentis AC contingit, ſequendo nimirum radium RA, unum in hac figurâ eorum qui ex Lunæ dextro latere adveniunt, qui recto curſu lentem hanc penetrabit, cum pro nullâ habeatur ejus craſſitudo, per prop. XXII. Deinde, occurrens lenti cavæ in I, ita ejus refractione diverget, ac ſi a puncto M exiret, quod invenitur ponendo duabus AO, AD tertiam prop. AM, ut conſtat ex prop. XX. Itaque rurſus hìc, radii qui a puncto in latere dextro Lunæ adveniunt, quoniam, poſt utriuſque lentis refractionem, paralleli ad oculum feruntur, ut ſupra fuit animadverſum, debebunt omnes ipſi MIF paralleli ferri. Eoque punctum illud conſpici ſecundum rectam FIM. Unde jam intelligitur rationem amplificationis fore eam, quæ anguli DMI ad DAI, ſeu HAR. Eſt autem ang. DMI ad DAI, ut AD ad DM, hoc eſt, ut AO ad OD, quia proportionales factæ AO, AD, AM. Itaque rurſus conſtat propoſitum. TAB. XV. Fig 5.

Hac viâ cauſas Teleſcopii melius inveſtigaſſet Carteſius, quàm ex interſectione radiorum, quæ fit in ſuperficie lentis exterioris, quâ interſectione ille utendum putabat, quod

quod tamen haudquaquam neceſſe eſſe, ex iis quæ hîc oſtenſa ſunt, ſatis liquet. At nunc multiplici errore laborat ejus expoſitio quæ in Dioptricis legitur, uti & ſchema ipſum; neque ex iis unquam proportionem amplificationis elicere potuit; cujus ignoratione, majorem quoque multò quàm rei natura patitur, de teleſcopii efficacia ſpem concepit. Putabat enim, ſi artificum induſtria præſtare poſſet quod ars docet, fore, ut res tam particulares & minutas in Aſtris videremus, quàm ſunt eæ quas vulgò in terra percipimus. Cum tamen non neſciverit, eâdem proportione quâ res viſæ amplificantur, etiam diametrum lentis exterioris ſuperare debere pupillæ latitudinem, ut lucida omnia teleſcopio æque ac nudo oculo ſpectentur. Nam, licet jam quarta parte hujus claritatis contenti ſimus, invenio tamen, aperturam illam lentis exteriorem Terræ diametro majorem eſſe debere, ſi quis, res in Jove tanquam 40. pedibus diſtantes ſpectandas, præbere poſtulet; Ut appareat aliud quàm manuum induſtriam hic requiri.

Quænam autem ſit amplitudo anguli viſorii, ſeu ſpatii quod uno intuitu exhibet Teleſcopium ex convexâ & câva lente conſtructum, ſic definietur.

A pupillæ magnitudine præcipuè pendet amplitudo anguli viſorii in hiſce teleſcopiis, idque experiri licet. Nam, ſi oculum teleſcopio admotum claudas primùm, quo pupilla multùm dilatetur, ut in tenebris ſolet, dein aperias, primò intuitu latiori orbe viſibilia comprehendes quàm paulò poſt, quia ſtatim contrahetur orbis ob arctatam fulgore lucis pupillam. Quòd, ſi lamellam cum exiguo foramine oculo opponas, minori etiam copia rerum viſibilium frueris.

Veruntamen, ſi minimum foramen efficias, non pro ratione ejus exilitatis orbis lucidus arctabitur, ſed tunc aper-

apertura lentis convexæ amplitudinem ejus definit, quæ proinde non ultra certam quantitatem decreſcet, niſi & lens convexa amplius coarctetur. Quorum ratio explicatu facilis eſt. Si enim lens convexa ſit EF, cava B, cui applicita pupilla primò latitudinem habeat CD, ducanturque ab oppoſitis punctis C, D, quæ ſunt in pupillæ circumferentiâ, rectæ CAH, DAG, per centrum lentis convexæ A tranſeuntes; hæ definient *angulum viſorium* GAH, quo, quicquid rerum viſibilium comprehenditur, uno obtutu conſpicietur: quoniam per centrum lentis A, radii a punctis G, H venientes, absque inflexione penetrant ad C & D; ideoque adſpectabilia intra angulum GAH comprehenſa, non poſſunt quin ad oculum radios emittant. Imo etiamſi pupilla pauxillo anguſtior ſit quàm DBC; nam ductâ GAK, ut AK ſit æqualis AO, junctâque EK, dummodo EK in pupillam incidat, cernetur viſibile comprehenſum angulo GAH; obſcurè verò puncta extrema quo tendunt rectæ AG, AH, quia particula tantùm radiorum, quos in lentem EF mittunt, pupillam ingreditur. Atque hinc fit ut, quantumvis in anguſtum apertura lentis EF contrahatur, nihil aut minimùm tantùm diminuatur anguli viſorii amplitudo; dummodo pupillæ orbis non coarctetur. Diminutâ autem hâc pupillæ latitudine, atque ad unum velut punctum redactâ, anguli viſorii amplitudo fit ea, quæ anguli EPF; poſitâ EF aperturâ lentis convexæ, & puncto P invento, ut in prop. XXXVI, ut nempe BO (ea eſt diſtantia lentis cavæ a foco convexæ) BA, & BP ſint proportionales. Nulli enim radii, per lentem A tranſmiſſi, ad punctum oculi B pervenire poſſunt, niſi qui, priusquam in lentem illam inciderent, tendebant ad punctum P. Eorum verò maximus angulus EPF, aperturâ lentis A præfinitur.

TAB. XV. Fig. 6.

Propositio XLIX.

Teleſcopium e duabus convexis lentibus compoſitum, procul poſita diſtinctè, ſed everſa oſtendit, amplificatque ſecundùm rationem foci diſtantiæ lentis exterioris ad foci diſtantiam interioris.

Tab. XV. Fig. 7. 8. Sit lens exterior convexa AC, interior D, axis communis utrique recta AD; focus lentis AC ſit O. Altera verò convexa D ita collocata intelligatur, ut idem punctum O ſit ipſi focus, ſeu punctum concurſus radiorum axi AD parallelorum, qui venirent a parte eâ ubi eſt oculus G. Oſtendendum eſt, his poſitis, res longè diſſitas diſtinctè & everſas ſpectari, & augeri ſecundùm rationem AO ad OD.

Fig. 7. Duplex autem rurſus deſcribenda eſt figura, in quarum alterâ radii extrinſecus venientes, axi HA paralleli, refractione lentis AC cogantur ad focum ejus O, atque inde ulterius tendentes ad lentem D, denuo paralleli fiant axi AD, atque ita ad oculum in G poſitum perveniant. Rurſus etiam, ſicut ſuperiori propoſitione, cogitandum hunc parallelorum complexum ab uno rei procul diſſitæ puncto venire, quod ſit in axe HAD, velut a centro Lunæ, ab aliis verò punctis ejus ſimiles manare radios parallelos in lentem AC, velut e latere Lunæ dextro, qui ad priores inclinentur, & hinc refracti cogantur ad punctum extra axem juxta O, ubi ſeſe interſecantes, atque ad lentem D delati, denuo paralleli evadant, inter ſe nempe, non autem axi AD, atque ita ad oculum perveniant. Hinc itaque conſtat viſionem diſtinctam fieri.

Fig. 8. Altera porrò figura, ſitum viſibilis everſum, & rationem augmenti oſtendet. Ubi poſitis, ut ante, lentibus convexis AC & D, & inter ipſas foco utriusque communi O, ſit porrò, ut in ſecundâ demonſtr. Teleſcopii ſuperioris,

perioris, diſtantia A Q æqualis A O. Et reliqua quoque demonſtratio ferè eodem modo procedet. Seligatur enim ex radiis, qui e puncto in latere Lunæ dextro adveniunt, radius R Q C qui per punctum Q tranſit. Is, refractione lentis A C, ibit per C I parallelam A D, & rurſus a lente D refractus tendet ſecundùm rectam I F L ad punctum L, ita ſumtum, ut diſtantia D L ſit æqualis D O. Quia autem radii a latere Lunæ dextro poſtquam per utramque lentem tranſierunt, paralleli perveniunt ad oculum, ut ante diximus, eorum verò unus eſt I F L, ſequitur, eos omnes ipſi I F L parallelos in oculum incidere, eoque illud Lunæ punctum percipietur ſecundùm rectam F I; quæ, cum ad partem oppoſitam vergat ejus, unde hi radii advenere, apparet ſitum Lunæ inverti, ut dextra ſiniſtris, eoque & ſupera inferis mutentur. Porrò, cum centrum Lunæ ſecundùm rectam D A conſpiciatur, erit apparens angulus ſemidiametri Lunæ I L D. Nudo autem oculo idem ſemidiameter angulo H Q R, ſeu A Q C comprehenditur. Ergo ratio amplificationis eſt, quæ anguli D L I ad A Q C, hoc eſt, quæ A Q ad D L, propter æquales A C, D I, hoc eſt, ea quæ A O ad O D; quare conſtat propoſitum.

Hîc verò nihil quoque referre apparet, quantùm ad apparentem magnitudinem, quo loco poſt lentem D oculus collocetur. Sed, ut multa uno intuitu oculus comprehendat, ad punctum L, vel prope ipſum optimè conſtituetur, quoniam apparet etiamſi minima ſit pupillæ latitudo, totam tamen lentem D, quatenus aperturam lentis A C non excedit, (ſolet autem intra menſuram conſiſtere) imaginibus plenam ſpectari.

Oſtendemus autem ſequenti demonſtratione, dari punctum paulò ultra L a lente D diſtans, ubi ſi collocetur oculus, totam lentem D picturatam aſpiciet, etiamſi minimæ fuerint tum pupillæ, tum lentis A C apertura.

Diſpoſitis enim, ſicut ante, lentibus A C, D, ut focus earum

TAB. XV. Fig. 10. earum communis ſit punctum O. Statuatur duabus A O, A D, tertia proportionalis A G. Unde punctum G ultra L diſtabit a lente D, cum D L, D O ſint æquales. Erit autem ad G ponendus oculus, ut fiat quod dictum eſt.

Si enim, ut in tertiâ demonſtratione teleſcopii ex convexâ & cavâ compoſiti, ſequamur rurſus radium R A, unum eorum qui ex puncto in dextro rei viſæ latere adveniunt, quique incidit in centrum lentis A C, is rectâ lineâ hanc penetrabit, ſecundùm prop. XXII., cum pro nulla habeatur ejus craſſitudo. Deinde, lenti D occurrens in I, cogetur hujus refractione ad punctum G, quod eſt pupillæ medium, propterea quòd proportionales ſunt A O, A D, A G. Itaque, quicquid angulo D A I, ſive H A R, oculo nudo comprehenditur, ſpectabitur in lente D; adeo ut campi (ut vocant) amplitudo jam pendeat a latitudine lentis D, licet aperturæ lentis A & pupillæ ſint veluti puncta: atque ita quoque omnino, ſi utraque magis pateat. Sciendum verò, neque lentem D nimis amplam eſſe adhibendam, propter incommodum colorum ex nimiâ refractione, de quo in ſequentibus dicetur, nec nimis arctandam aperturam lentis A C, ne obſcuritas inducatur; certa autem menſura ejus alibi docebitur. Pupilla verò, licet appoſita lamellæ cum foramine, quantùm acus facere poteſt, in anguſtum contrahatur, nihil fere lucis aufert, quoniam coni radioſi a ſingulis rei viſæ punctis manantes, inſigni tenuitate ſunt cum incidunt in lentem D, quàm retinentes inde paralleli ad oculum pergunt.

Porrò, facilè rurſus hîc intelligitur, proportionem amplitudinis eſſe eam, quæ anguli D G I ad H A R, ſive D A I, hoc eſt, eam quæ A D ad D G, ſive quæ A O ad O D, quia D A ad A O, ut G A ad A D.

Atque hæc proportio aliter rurſus, ut in demonſtratione primâ ex cavo & convexo, comprobari poteſt, ſequendo radium illum, qui a puncto rei viſæ, extra axem teleſcopii

leſcopii poſito, manans deducitur lentis AC refractione ad centrum lentis ocularis D. Hoc enim patet ex inſpecta figura hic adſcripta, in qua eadem eſt conſtructio ac demonſtratio, quæ fuit illic. TAB. XV. Fig. 9.

Hinc porro apparet, quanto præſtent Teleſcopia ex convexis duobus compoſita iis, quorum lens ocularis cava eſt, cum tanto amplius ſpatium uno intuitu comprehendant. Eſt enim anguſtia illa ſpectaculi injucunda & prorſus incommoda, præſertim ſi ultra tres quatuorve pedes tubi extendantur. Quare, etſi Galilei egregium illud perſpicillum, ac tot novis repertis celebre, ex convexo & cavo fuerit conjunctum, nunc tamen ejus generis nulla, nec ad ſiderum obſervationes, nec ad res in terra ſpectandas adhibentur, ſed tantum e convexis compoſita. Unicus vero uſus cavoconvexorum in minima longitudine relictus eſt, 4. nempe aut 5. digitorum, in qua brevitate tolerabilis jam latitudo anguli iſtius viſorii reperitur. In hujuſmodi perſpicillis ratio incrementi facienda eſt quadrupla circiter. Sed & dupla non majorem utiliter adhibere ſolemus; quo fit, ut lucida etiam intra ædes omnia ſpectentur. Et ſtellæ melius quam oculo nudo, multæque ſimul, quoniam in tali perſpicillo apertura exterioris lentis, vel ad ſeſquipollicem patere poteſt.

PROPOSITIO L.

Conſtitutionem teleſcopii, ad obſervandas Solis Eclipſes maculasve, demonſtrare & quanta futura ſit ejus imago.

OBſervandis Solis Eclipſibus, nec non maculis quæ in ſuperficie ejus circumferuntur, teleſcopium utiliter adhiberi inventum eſt, ſi nimirum Solis imago, per utramque lentem trajecta, tabulâ albâ excipiatur, in quam nullum aliunde lumen adveniat. Cujus inventi ratio ut in-

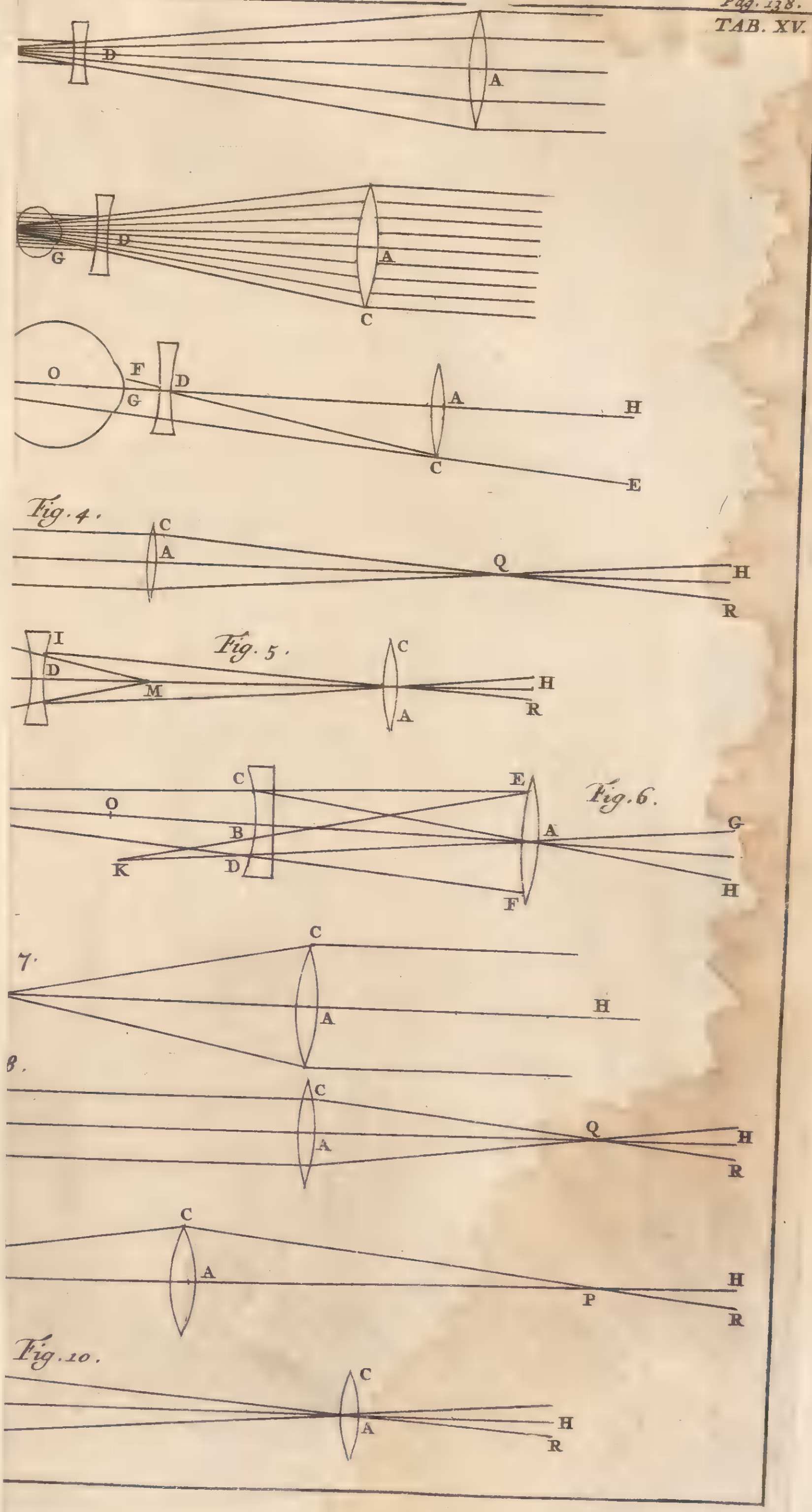
intelligatur, primum diſpoſitio lentium cognoſcenda eſt, quomodo nempe aptatæ picturam Solis quam nitidiſſimam efficiant.

Tab. XVI. Fig. 1. 3. Sit igitur lens convexa AB Soli obverſa, cujus focus E punctum. Altera vero in D concava vel convexa, nam utraque teleſcopia forma huic rei idonea eſt, & magis quidem quæ duorum eſt convexorum, quoniam picturas erectas exhibet, cum altera invertat. Lentis autem D ſit K punctum concurſus, vel diſperſus radiorum parallelorum a parte qua eſt H venientium, ſitque in H conſtituta tabula alba ad excipiendam Solis imaginem. Quæ igitur, ut diſtincta ac terminata appareat, oportet radios qui ab uno Solis puncto procedunt, hoc eſt, qui paralleli inter ſe deferuntur in lentem AB, in uno rurſus tabulæ puncto colligi. Quapropter paulo major debet eſſe diſtantia lentium AB & D, quam in conſtitutione teleſcopii media, ſive quæ bene videnti fuerit accommodata; ac talis requiritur poſitio lentis D, ut in continua ſint proportione EK, ED, EH. Sic enim fiet, ut radii tendentes ad E focum lentis AB, deducantur ad punctum H. At in teleſcopii conſtitutione media congruere debet punctum K foco E, ut ſuperius eſt oſtenſum. Adeo ut hic diſtantia lentium augenda ſit intervallo EK, quod quidem tanto minus eſſe neceſſe eſt, quanto diſtantia EH fuerit major; nam longitudo DK quæ data eſt, quippe diſtantia foci, vel puncti diſperſus, lentis D, ea ſic dividitur in E, ut ſicut HE ad ED, ita ſit hæc ad EK.

Tab. XVI. Fig. 24. Quanta porro futura ſit diameter picturæ Solis in tabula H ſic definiemus. Ducantur ex centro lentis AB ad lentem D rectæ BP, BQ, comprehendentes angulum æqualem ei, quo Solis diameter comprehenditur abſque teleſcopio ſpectantibus; Et ſit duabus, BK, BD tertia proportionalis BG, & jungantur GP, GQ, & producantur uſque dum tabulæ ad H collocatæ occurrant in punctis L, M. Dico LM fore diametrum Solis in tabula

LHM.

TAB. XV.


D
A
G
D
A
C
O
F
D
G
A
H
C
E
Fig. 4.
C
A
Q
H
R
I
D
Fig. 5.
M
C
H
R
A
C
E
Fig. 6.
O
B
A
G
K
D
F
H
7.
C
H
A
8.
C
Q
A
H
R
C
A
H
P
R
Fig. 10.
C
A
H
R

LHM. Producantur enim PB, QB verſus O & N. Itaque, cum a puncto circumferentiæ Solis dextro radii ferantur ad ſuperficiem totam lentis AB, qui omnes inter ſe & rectæ OB paralleli cenſentur, incedet unus iſtorum radiorum ſecundum lineam OB, idemque penetrata lente AB, perget ſecundum lineam BP *, quoniam B centrum eſt lentis, cujus craſſitudinem pro nulla ducimus. Eadem ratione, unus radiorum parallelorum e ſiniſtro Solis margine venientium, incedet ſecundum rectam NBQ. Porro autem uterque a lente D inflectetur, ut pergant ſecundum rectas PL, QM, in quas productæ ſunt GP, GQ per prop. xx., quia ſcilicet in continua proportione ſunt BK, BD, BG. Itaque manifeſtum eſt punctum in dextro Solis latere pingi in L, punctum vero oppoſitum in ſiniſtro in M. Quatenus enim diſtincta totius Solis pictura exiſtit, neceſſe eſt, ubi unus radiorum a quolibet ejus puncto venientium in tabula ſiſtitur, ibi quoque cæteros colligi ab eodem puncto egreſſos. Ergo diameter picturæ, uti diximus, erit LM.

* Prop. XXII.

Sciendum vero, quo major erit imago Solis LM, lentibus AB & D iisdem manentibus, eo minus lucidam fore. Etenim, ſi radii omnes a Sole in lentem AB deſcendentes, occupent rurſus in tabula LHM ſpatium æque latum atque eſt lens AB, hoc eſt, ſi Solem depingant lenti AB, quatenus adaperta eſt, æqualem, erit hæc imago æque clara, ac ſi nullis interpoſitis lentibus Sol tabulam illuſtraret; non habita videlicet ratione eorum radiorum quos lentes reflectunt, vel propter obſcuritatem materiæ non tranſmittunt, quo forte dimidia pars omnium vel amplius intervertitur. Quod ſi vero major imago fuerit, ut in hujuſmodi obſervationibus exigitur, jam tanto quoque erit obſcurior. Experientia vero oſtendet, quænam amplitudo ad obſervationem utiliſſime adhibeatur, tentata alia atque alia tabulæ a teleſcopio diſtantia. Ubi illud obſervandum; ut aucta hac diſtantia ſi-

mul tantillum minuatur ea quæ eſt inter lentes AB & D, ut diſtincta pictura efficiatur: cujus ratio ex ante dictis intelligitur.

Propositio LI.

Quomodo, pro duabus convexis, tria adhibendo, amplior fiat teleſcopii proſpectus, quo, ad ſidera ſpectanda, utimur.

Quanquam lentes non fruſtra ſint multiplicandæ, quod & vitri craſſitudine & iteratis reflexionibus non parum lucis depereat; hanc tamen utilitatem præbere poteſt, ut latior evadat eoque jucundior Teleſcopii proſpectus. Adſumtis enim, præter magnam lentem, ocularibus duabus certam inter ſe rationem diſtantiamque habentibus, multo minor ſit aberratio radiorum a diverſis punctis rei viſæ ad oculum tendentium, quam ſi unica lens ocularis adhibeatur, quæ eandem amplificationem efficiat, atque ita multo plura unico intuitu comprehendere licet, ac præterea nævi ac impuritas omnis lentium ocularium planè evaneſcunt; cum alioqui in una lente non parum adferant incommodi.

Tab. XVI. Fig. 6. Sit ratio augmenti propoſita ea quæ P ad Q. Lens exterior L, focus ejus G. Et ut P ad Q, ita ſit LG ad GK, cadente puncto K inter L & G. Et in K lens convexa ſtatuatur, cujus foci diſtantia KV ſit tripla ad KG, & diviſa KV æqualiter in S, ſtatuatur ibi lens altera EF, cujus foci diſtantia SH ſit $\frac{1}{2}$ SK. Oculus vero ſit in M, poſita SM diſtantia $2\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ KG. Erit factum quod quæritur.

Tab. XVI. Fig. 5. Demonſtrationem vero duplici figura explicamus. In quarum priori expendimus radios ab uno aliquo rei viſæ puncto manantes, quod punctum in axe teleſcopii poſitum intelligi volumus. Qui itaque radii, velut axi paralleli, in lentem L incidere cenſentur, unde porro tendere

debent

debent ad hujus lentis focum G. Sed refractione, quæ ſit in lente K, oſtendemus eos mitti ad punctum H; atque inde ſeſe interſecantes, atque in lentem S incidentes, reddi parallelos, itaque ad oculi pupillam M pergere. Poſitâ enim KT æquali KV, quæ erat foci diſtantia lentis K, quia KG dicta eſt eſſe $\frac{1}{3}$ KV; KH vero $\frac{1}{4}$ KV; erit GH ad GK ut 1 ad 4; ſed & GK ad GT erit ut 1 ad 4. Ergo proportionales GH, GK, GT, ac proinde radii ad G tendentes, flectentur refractione lentis K ad H, cum ſit H focus lentis S, faciet hæc, ut a puncto H pergentes paralleli fiant, qui proinde, oculo ad M occurrentes, diſtinctam viſionem efficient, quod unum eſt eorum quæ demonſtrare oportebat.

Jam in altera figura ratio amplificationis eadem datæ oſtendetur, & amplitudo anguli viſorii. Ponatur enim LN, in producto axe, æqualis foci diſtantiæ LG. Et a punctis longinquis venientes radii expendantur per punctum N transeuntes, atque in lentem L extremam utrimque incidentes, qui ſint NO, NP, quos conſtat refractione ejus effici axi parallelos, atque ita incedant per OC, PD, donec incidant in lentem K. Unde porro ſcimus perrecturos rectis CV, DV ad punctum V, ſed a lente S interceptos, ajo detorqueri ad punctum M, ubi oculi pupilla poſita fuit. Quia enim SV eſt $\frac{1}{2}$ KV, & SM 2|2 $\frac{1}{2}$ KG, hoc eſt 2|2 $\frac{1}{3}$ KV; erit SM ad SV ut 1 ad 3, ac proinde VM ad VS ut 2 ad 3. Sed & VS ad VH eſt ut 2 ad 3. Ergo proportionales VM, VS, VH; & quia H eſt focus lentis S, conſtat, ex propoſ. xx., radios ad V tendentes ita frangi a lente S, ut tendant ad punctum M. A punctis igitur E & F, in quibus rectæ CV, DV ſecant lentem S, ducantur rectæ EM, FM. Sic viſibile per lentes cernetur ſub ang. EMF, qui ad ONP habet proportionem, ut LG ad KG; id eſt, ut P ad Q. Quia enim ratio EMF ad ONP, id eſt, EMS ad ONL, componitur ex rationibus EMS ad EVS, & EVS ad ONL;

TAB. XVI. Fig. 6.

ONL; ratio vero EMS ad EVS eadem eſt, quæ VS ad MS, ſive $\frac{1}{2}$ KG; item ratio EVS ad ONL eadem quæ NL, ſive LG ad KV, ſive 2 VS; Erit ratio EMF ad ONP compoſita ex 2 VS ad KG, & LG ad 2 VS, id eſt, erit EMF ad ONP, ita LG ad KG, ita P ad Q: quod erat demonſtr.

Tab. XVI. Fig. 7. Videndum jam num quid juvet, & an non idem effectus ſit, ac ſi ponatur ſola ocularis α, cujus foci diſtantia Gα 2|2 KG, hoc eſt 2|2 $\frac{1}{3}$ KV; quum angulus αMβ ſit futurus æqualis KGD, hoc eſt, SMF; nam KD 2|2 2 SF. Reſp. Erit quidem amplificatio eadem utrobique: Sed lens S majorem feret aperturam quam dimidiam lentis α, tum quia lentis S foci diſtantia eſt $\frac{1}{4}$ KV, eoque major quam $\frac{1}{2}$ foci diſtantiæ lentis α, quæ eſt $\frac{1}{3}$ KV; tum quia radius DF convergens minus colorabitur in tranſitu per lentem S, quam ſi axi parallelus incederet. Sed in D jam aliquem colorem traxit, ſed parum, quia lentis K foci diſtantia eſt KV.

Propositio LII.

Tribus convexis lentibus diſtincta & erecta ſpectare viſibilia longinqua & majora, ſecundum datam rationem.

Tab. XVII. Fig. 1. Accipiatur lens major AB, cujus foci diſtantia ſit AC. Deinde vero aliæ duæ minores DT, & QR, quarum foci diſtantiæ EL, HF ſint inter ſe æquales, & ad quarum utramvis habeat AC rationem eam, ſecundum quam facienda eſt multiplicatio. Collocentur autem hoc pacto, ut diſtantia CE, qua altera earum abeſt a foco lentis A, ſit dupla EL: & EH intervallum inter utramque ejuſdem EL triplum. Denique ad K punctum conſtituatur oculus, ſumtâ HK diſtantia dictæ EL vel FH dupla. Quibus ſic comparatis, propoſitum dico diſſolvi.

Sit

Sit enim viſibile longinquum, cui axis lentium communis occurrat in puncto S. Radii itaque ex puncto S ad lentem AB delati, ut SB, SY, habendi ſunt pro parallelis, ideoque convenient in foco C, ibique erit eorum interſectio. Eſt autem L focus lentis DE, & CL ſubdupla CE, & EF æqualis EC, quoniam EH eſt tripla FH, ſeu LC; Ergo erunt in continua proportione CL, CE, CF. Quare radii iidem, refracti in lente DT ad M & Z, denuo convenient in puncto F, * atque inde occurrentes lenti QR in I & G, refractione ejus efficientur paralleli, quia F eſt focus lentis HG. Paralleli itaque ſecundum rectas IP, GN perveniunt ad pupillam oculi quæ eſt in K, eoque viſio fiet diſtincta. Poſuimus autem oculum hoc loco, ut unico intuitu plura ſimul conſpiceret: cujus ratio eſt, quod ſi a foco lentis AB intelligantur radii pervenire ad extremas margines lentis A, velut αB, αY, hi, per geminam in lentibus A & E refractionem, cum axe convenient poſt lentem in puncto O, quod erit in foco lentis E, quia axi paralleli ſunt. Itaque OF æqualis erit FH, & HK dupla ad FH, ſicut ſumendam diximus. Punctumque K erit illud quo convenient radii DO, TO, poſtquam tranſierint lentem QR; ac lens tota H duplam habens latitudinem lentis E, imaginibus lucida apparebit, omniaque ſpectanda præbebit, quæ angulo BαY, ſive VαX comprehenduntur.

* Prop. XX.

Tab. XVII. Fig. 2.

Porro, erectum ſpectari viſibile ad S poſitum, facile apparet ex ipſis radiorum flexionibus; Si enim oculus ad K puncti inſtar conſideretur, flexiones iſtæ ſunt KQTBαV, KRDYαX, ex quibus manifeſtum fit, punctum viſibile V ſpectari in Q, & X in R, ſingula nimirum ad eandem quam obtinent axis partem.

Denique, quod ratio incrementi continget ea, quæ eſt AC ad CL, vel LE vel FH, oſtendetur hoc modo. Putemus viſibile collocari in K, inque eo notari puncta N & P: oculus autem intelligatur in puncto S. Quia itaque

Tab. XVII. Fig. 1.

que radius ab N puncto fluens perveniet ad oculum S per rectam BS, & qui a puncto P, per rectam YS, oculus autem in longinqua poſitus eſt diſtantia, ſequitur ipſi viſibile PN auctum videri ſecundum rationem YB ad PN, quia angulus YSB ad angulum quem facerent SP, SN, eandem rationem habebit, quam YB ad PN. Quia autem YB ad MZ, ut AC ad CE; MZ vero ad IG, ſive PN ſicut EF, ſive ipſa EC, ad FH. Erit igitur ex æquo YB ad PN, ut AC ad FH ſive EL. Itaque patet, oculo in S conſtituto, viſibile PN auctum videri ſecundum rationem AC ad EL, ac proinde & viſibile longinquum in S poſitum, oculo in PN, ſive ad K tranſlato, ſecundum eandem rationem auctum ſpectabitur. *Quam etiam nihil mutari liquet, etſi oculus a lente QR plus minusve removeatur, quod eædem maneant YB & PN. Atque hæc quidem erant demonſtranda.

* Per Prop. XL.

TAB. XVII. Fig. 2.

Hoc aliter demonſtrari poteſt, ut non opus ſit theoremate de transpoſitione oculi & objecti. Scilicet HKR ad SαX, ſive AαY, rationem habet compoſitam ex HKR ad HOR, id eſt, ex HO ad HK, & ex HOR, ſive EOD ad AαY, id eſt, ex Aα, ſive AC, ad EO, ſive EL; quia vero HO æqualis HK, erit HKR ad SαX, ita AC ad EL. q. e. d.

Cæterum, haudquaquam neceſſe eſt æqualiter convexas ſumi lentes DT, QR. Etenim ſi e minori convexo adhibeatur alia pro lente QR, puta, quæ foci diſtantiam habeat æqualem FΔ, ea tantum in Δ collocanda erit, manentibus reliquis, ut prius, eritque ratio incrementi major priori, videlicet ea quæ AC ad ΔF. Quod ſi vero pro lente DT aliam, quamvis convexam, accipiamus, eamque ſic collocemus, ut coni radiorum MCZ, MFZ æquales ſint; hoc eſt, ut CE ſit dupla intervalli EL, quo diſtat a lente DT focus ſuus; nihil prorſus ratio incrementi immutabitur. Debet autem ita ſemper diſponi lens QR, ut focus ejus incidat in punctum F.

Sciendum vero, ea tantum gratia ex pluribus quam duabus lentibus teleſcopia hujusmodi componi, ut latior fiat uno intuitu proſpectus, cum alioqui certum ſit, ea quæ ex convexa & cava lente componuntur, magis augere pro ſua longitudine res viſas, atque etiam diſtinctiores efficere, nullisque colorum pigmentis infectas, quod in hac lentium trium compoſitione ægre vitari poteſt. Verumtamen, ſi a parte oculi alia adhuc lens vel duæ inſuper addantur, evaneſcunt aliquatenus adventitii colores iſti, minuſque diſtortæ apparent rerum imagines, ac plures etiam uno obtutu comprehenduntur; nec longitudo teleſcopii propterea augetur, quoniam ita lentes collocantur, ut non plures quam duæ fiant radiorum interſectiones, ſicut in compoſitione trium. Alii vero aliter lentes oculares in his inter ſe conſociant, ſola experientia duce, quid optimum ſit quærentes. Nec ſane facile foret certa ratione aliquid circa hæc præcipere, quum colorum conſideratio ad geometriæ leges revocari nequeat, nec niſi difficile admodum illa, quæ circa latera lentium ſæpe cernitur, rectarum linearum incurvatio. Poſſem equidem, quæ ab aliis magno labore hic inveſtigata ſunt, proponendo, aliquot ejusmodi perſpicillorum conſtructiones docere, ſed cum longè potiora exiſtimem, quæ in ſequentibus proferam, ubi non multiplicatione lentium, ſed ſpeculi reflexione viſibilia eriguntur, non videtur diutius in his immorandum.

Ac poſſunt quidem binæ convexæ lentes parari tales, atque ita inter ſe componi, ut erecta referant viſibilia longinqua; nec tamen quicquam boni inde obtinebitur, quod nec paralleli ad oculum tunc radii pervenire poſſunt, qui e ſingulis rei viſæ punctis emanant, neque eæ multum amplificari, nec magna copia ſimul conſpici, præterquam quod tubi longitudo ſine utilitate multum producenda eſſet.

Tribus vero lentibus convexis & recto poſitu & diſtincta poſſunt videri, ſed non tam lato campo quam quater-

nis, niſi lens, oculo propior, duplam fere aperturæ diametrum habeat ejus, quæ in ſimilibus ocularibus requiritur, cum tria adhibentur, quod fieri nequit, quin colores Iridis circa margines exiſtant.

PROPOSITIO LIII.

E duabus convexis lentibus teleſcopium conſtruere, quo viſibilia erecta ſpectentur, ac magna copia ſimul uno intuitu comprehendatur.

Convexis duabus lentibus, recte inter ſe atque ad oculum comparatis, teleſcopium componi, quo inſignis viſibilium amplitudo uno intuitu appareat, propoſ. XLIX. dixi. Quod ad ſidera contemplanda omnium eſt utiliſſimum, quia licet inverſas rerum imagines referat, exiguum inde aut nullum incommodum naſcitur. Sed interdiu ad conſpiciendos homines, turresve aut naves procul diſſitas, ſitus everſio res agnoſci non patitur, atque ideo plures convexæ lentes adhiberi ſolent, ut imaginem, quam duæ invertunt, aliæ denuo erigant, de quibus propoſ. præcedenti egimus. Quia vero hoc fieri nequit, quin ſimul inſigniter augeatur tubi longitudo, atque amittatur multum de picturæ amplitudine, excogitavimus rationem hanc, quâ, everſæ ſpecies in teleſcopio duorum convexorum, erigantur adjecto ad oculum ſpeculo exiguo, cujus poſitum locumque ſequenti Schemate explicamus.

TAB. XVII. Fig. 3. Eſto lens AB exterior, CD vero quæ oculo propinquior eſt, e quibus compoſitum ſit teleſcopium, quale ſupra exhibitum fuit prop. XLIX., ubi dicimus recte ſic collocari oculum in O, ut a lente CD diſtet circiter quantum focus ejus. Itaque, inter lentem hanc punctumque O, ubi alioqui oculus ſtatuendus foret, ſpeculum planum FG interponimus, ellipticâ formâ, longitudine pollicari, e metallo fuſum atque accurate expolitum, (nam

(nam vitrea ob duplicem ſuperficiem omnino ad hunc uſum inepta ſunt) anguloque inclinamus ſemirecto ad axem lentium, aut paulo etiam minore, atque ita tubo includimus, ut quam proxime illi admoveri poſſit oculus N; qui deſuper per foramen, in tubi lamina excavatum, in ſpeculum aciem dirigit, inclinato capite terram verſus, atque ita viſibilia, ad quæ tubus dirigitur, & erecta conſpicit, & eadem copia, ac ſi, nullo interpoſito ſpeculo, in O conſtitutus eſſet. Neque cauſa ignota eſſe poteſt ei, qui, in ſpeculo plano radios incidendo ac reſiliendo, æquales angulos facere noverit; quos radios uti hic feruntur in Schemate diſcernere licet; tum hos qui a medio rei viſæ puncto venientes, paralleli incidunt in lentem AB, ac denique etiam paralleli ad oculum N deferuntur; tum eos qui ab extremis punctis mittuntur, atque in media lente AB ſeſe interſecantes, inde ad oculum pergunt ſecundum lineas ECFN, EDGN.

Propositio LIV.

Teleſcopii, ex quatuor convexis compoſiti, conſtructionem explicare, quo res viſæ erectæ ſpectantur & magnâ copiâ.

Propter inverſam poſitionem rei viſæ, vix aliter utimur compoſito e duobus convexis quam ad ſidera, quæ non refert quo poſitu ſpectentur. Quænam vero tunc proportio ſervanda dictum eſt. Quomodo autem erigantur rurſus imagines, magnaque ſimul earum copia uno intuitu comprehendatur diverſimode, quæſitum fuit 3. 4. 5., & pluribus lentibus. Quæ ſine cauſa non ſunt multiplicandæ, quod & ſingularum materia & ſuperficierum reflexiones radiorum partem intervertant. Paucioribus tamen quam quaternis optatum effectum conſequi non licet. Etſi enim in eadem teleſcopii longitudine, & ſitus erectus,

& eadem amplificatio, & eadem copia ſimul viſorum obtineri poteſt tribus æquè ac quatuor lentibus; deterior tamen eſt trium compoſitio quam quaternarum, quia in illa, lentes oculares, aut unam certe earum oculo proximam, e majoribus ſuperficiei ſphæricæ portionibus conſtare neceſſe eſt, ratione diametri aut foci diſtantiæ, ſi eadem anguli viſorii magnitudo præſtanda ſit. Hinc vero colore inficiuntur res viſæ, & lineæ rectæ circa aperturæ margines curvæ apparent.

Quaternis igitur utendum eſt, ex quibus teleſcopium hoc modo componitur.

TAB. XVII. Fig. 4. 5. Lens exterior eſt A, cujus foci diſtantia AB, in eodem vero axe poſitæ ſunt lentes oculares tres C, D, E prorſus æquales inter ſe, quarumque interior, intervallo BC quantum eſt ſua foci diſtantia ultra focum B, removetur, ejuſque intervalli duplum eſt a lente C ad lentem D, ac tantundem ab hac ad lentem E, ac denique ab hac ad oculum F rurſus, quantum inter B & C.

Rurſus autem binis figuris (4. & 5.) hic opus eſt, in quarum priore radii ab uno puncto rei longè diſtantis manantes exhibentur; quos facile apparet, ſi quis præcedentia perceperit, primùm tanquam parallelos incidere in lentem A, inde colligi in B foco ejus, ac inde divergentes in lentem C incidere, quæ denuo parallelos efficiat, mittatque ad lentem D, quæ congreget eos ad focum ſuum H, qui medium dividit intervallum DE. Tum denique, ex H puncto ad lentem E tendentes ab ea tertiò parallelos reddi, atque ita ad oculum F accedentes, diſtinctam viſionem efficere, cum in fundo ejus ad punctum unum cogantur.

In quinta figura conſideratur ratio amplificationis, quæ eſt ea quæ AB foci diſtantiæ lentis exterioris, ad foci diſtantiam BC, unius ex ocularibus. Ac præterea anguli viſorii amplitudo hic demonſtratur. Poſitis enim ocularium trium aperturis æqualibus, quæ non majores ſint apertura lentis exterioris A, ducantur MQ, NR axi commu-

ni

ni parallelæ, & aperturæ diametros lentium E & D comprehendentes. Itemque KO, LP eidem axi parallelæ & comprehendentes aperturam lentis KL, & poſita AG æquali AB, ducantur rectæ OGV, PGT, quæ ſeſe interſecent in G. Jam patet latitudinem rei viſæ longinquæ, quæ, oculo nudo ex puncto G, ideoque & ex F, cerneretur in angulo TGV, hanc oculo per teleſcopium intuenti, occupare angulum MFN, ideoque augmenti rationem eſſe eam quæ anguli MFN ad ang. TGV, ſive PGO; hoc eſt, eam quæ intervalli AG ad intervallum EF, cum PO, MN ſint æquales; hoc eſt, eam quæ foci diſtantia AB ad foci diſtantiam BC; quod erat demonſtr.

Apparet porro angulum viſorium MFN eandem quoque viſibilium latitudinem comprehendere, ac teleſcopium, quod binis lentibus A & C conſtaret, cum res viſa quæ angulo TGV intercipitur, in illo teleſcopio ſpectetur in angulo KSL ipſi MFN æquali.

Hæc egregia lentium compoſitio Romæ, neſcio a quo, primum fuit inventa, multum tamen adjuta annulo ſeu diaphragmate, quod ad H, loco medio inter lentes E, D, vel ad B focum communem lentium A & C inſeritur; cujus uſum non ante cognitum explicuimus in libro de cauſis phænomenon Saturni. Eſt vero longe præcipuus, cum in metiendis Planetarum diametris, ut ibi docui, tum ad alia, de quibus agam in ſequentibus. In hiſce vero teleſcopiis, circulum apparentium imaginum præciſo ambitu iſte annulus ideo circumſcribit, quod quæ circa H vel B collocantur diſtincte cernuntur oculo F, cum radii ab H vel B egreſſi paralleli ad eum deferantur, ſimul vero colores circa margines ejus operâ reſecantur, qui non bene antea vitari poterant.

Ponenda autem apertura annuli ipſarum lentium ocularium aperturis paulo minor, diameterque ejus ad ocularium foci diſtantiam certa ratione referendus, quæ cir-

citer ea eſt, quæ.... ad...... docente nimirum experientia. Quænam vero ſit ponenda proportio foci diſtantiæ lentis exterioris ad foci diſtantiam ocularium, quantâque apertura lucem admittere poſſit lens illa, in ſequentibus definietur.

Mirum videtur in hoc teleſcopio colores Iridis oriri plurium ocularium refractione, non magis quam cum una ocularis adhibetur. Sed ratio hæc eſt, quod lens QR corrigit & aufert colores quos lens KL produxit. Idem enim accidit radio OKRN, per ſuperficies inclinatas ad K, ac deinde ad R, tranſeunti, ac ſi per cuneos binos contrarie poſitos SS, TT tranſiret parallelis lateribus, qui colore non inficitur, non magis quam ſi per laminam vitream incederet.

TAB. XVI. Fig. 8.

Lemma.

Angulos 30. gradus non excedentes proportionales cenſeri ſuis Sinibus.

Hoc jam ante ab aliis quoque Opticorum Scriptoribus aſſumtum fuit, quia exigua prorſus a vero eſt differentia.

PROPOSITIO LV.

TAB. XVI. Fig. 9. 10. 11. 12. 13.

Poſito angulo vitri ſolido 19. gradibus minore BAC, *ſi duo radii in unum vitri punctum incidant, ita ut ſingulorum inclinatio ſit minor 29. gradibus in partem ab* A *puncto averſam, erit differentia inclinationum radiorum incidentium æqualis differentiæ inclinationum radiorum, qui poſt refractionem e vitro exeunt.*

SI ſit angulus BAC, quo duo plana angulum ex vitro ſolidum complectentia inclinantur, minor grad. 19. Sitque præterea in plano per ABC etiam recta linea DBV, quæ planum AB normaliter ſecet in B, & ad eam inclinen-

nentur radii F B, GB, angulis minoribus quam gr. 29. in partem ab A puncto averſam, quorum interior E B intra diaphanum feratur per BH, atque exeat in HK; GB vero feratur intra diaphanum per BC, exeat vero in CL; dico, angulo EBG radiorum incidentium, æqualem cenſeri poſſe eum, quo egreſſi HK, CL inter ſe inclinantur, hoc eſt, angulum KHI, ſi fiat HI parallela CL.

Ducantur enim rectæ ad AC normales MCS, NHR, quæ ſecent DBV in punctis S, R. Sunt autem caſus quinque. Poſſunt enim anguli BCA, BHA, vel uterque eſſe minor recto, vel uterque major, vel angulus BCA major recto, & BHA minor, vel BCA, vel BHA rectus.

In his omnibus oſtendam primò, angulos ſingulos quos radii BH, HK, BC, CL conſtituunt, cum rectis perpendicularibus ad AH, minores eſſe 30. gradibus.

Nam 1. caſu (*Fig.*9.), cum ſit in triangulo BAH ang. A minor 19. gr., & ABH minor recto ABV, erit neceſſario BHA major gr. 71., qui proinde ablatus ab recto AHR relinquit ang. BHR, minorem gr. 19. Hujus vero Sinus, qui igitur minor eſt quam partium 32557., qualium radius circuli eſt 100000, eſt ad Sinum ang. NHK ut 2. ad 3. ex lege refractionis vitri. Ergo Sinus anguli NHK minor quam 48836, & ang. ipſe NHK minor ang. 30. gr., quippe cujus Sinus eſt 50000. Eadem ratione & ang. MCL minor probabitur quam 30. gr.

Caſu 2. (*Fig.*10.), quoniam ang. DBG minor eſt quam 29. gr., Sinus vero ipſius ad ſinum ang. VBC ut 3 ad 2, erit per lemma præc. angulus VBC minor gradibus 19$\frac{1}{3}$. Sed ang. VBC æqualis eſt ſummæ ang. BSC & BCS; Ergo BCS omnino minor quam 19$\frac{1}{3}$. gr.; & Sinus ejus minor quam partium 33107. Sicut autem 2 ad 3, ita ſinus ang. BCS ad ſinum ang. MCL minor quam partium 49661., & angulus ipſe MCL minor itaque quam gr. 30.

Eadem

Eadem ratione oſtendetur ang. NHK minor 30 gr.

Caſu 3. (*Fig.* 11.), ang. NHK minor oſtendetur 30. gr. eodem modo quo in caſu primo; angulus vero MCL eodem modo atque in caſu ſecundo.

Quarto caſu (*Fig.* 12.), de ang. NHK demonſtratur eodem modo atque in caſu primo.

Item Quinto caſu (*Fig.* 13.), de ang. MCL eodem modo atque in caſu ſecundo.

His oſtenſis ſic procedet demonſtratio. Omnibus caſibus anguli DBG duabus tertiis æquari cenſendus angulus VBC, quia hæc eſt Sinuum ipſorum ratio. Itemque anguli DBE duabus tertiis angulus VBH. Ergo, & anguli EBG duæ tertiæ cenſebitur angulus HBC. Rurſus, tribus caſibus prioribus, anguli MCL duabus tertiis æqualis cenſendus ang. SCB., itemque ang. NHK duabus tertiis æqualis ang. RHB. Quare & caſu 1. & 2. duabus tertiis differentiæ angulorum MCL, NHK, quæ differentia eſt angulus KHI, (nam HI parallelam duximus CL) æqualis cenſebitur differentia angulorum SCB, RHB. Caſu 3. vero, duabus tertiis ſummæ angulorum MCL, NHK, quæ ſumma rurſus eſt angulus KHI, æqualis cenſebitur ſumma angulorum SCB, RHB. Atqui hoc caſu ſummam hanc facile apparet æquari angulo HBC. Caſibus vero 1. & 2., differentiam eorundem angulorum SCB, RHB æquari eidem angulo HBC. Ergo his tribus caſibus angulus HBC æqualis cenſendus duabus tertiis anguli KHI. Idem vero ang. HBC æqualis cenſus fuit duabus tertiis anguli EBG. Ergo angulus KHI æqualis cenſendus ang. EBG; quod erat demonſtr.

Caſu vero 4, ubi ang. BCA eſt rectus, incidit CL in CM, & HI in HN; cumque angulus HBC ſit æqualis cenſendus $\frac{2}{3}$ ang. EBG, ex ante demonſtratis; & angulus BHR, qui æqualis HBC, æqualis cenſendus $\frac{2}{3}$ anguli IHK; Sequitur & hic æquales eſſe cenſendos angulos IHK, EBG.

Denique

Denique caſu 5. ubi HK cadit in HN. apparet rurſus angulum BCS æqualem cenſendum duabus tertiis ang. MCL ſeu KHI: idem verò BCS, ſeu ipſi æqualis CBH, cenſus fuit duas tertias facere anguli EBG. Igitur apparet rurſus æquales cenſendos angulos KHI, EBG. Quæ ſupererant demonſtranda.

Quod ſi radii EB, GB, vel ipſis paralleli, incidant in ipſum velut angulum diaphani A, manifeſtum eſt ad eundem verticem A conventuros angulos duos æquales, quos bini incidentes radii ac bini refracti efficient.

Facile autem perſpicitur quomodo idem hoc Theorema ad quamlibet refractionis proportionem accommodari poſſit.

Sciendum etiam, quia cum in ſequentibus eo utemur, tam angulus BAC, quam cæteri quibus radii incidentes & refracti inclinantur ad rectas ſuperficiei refringenti perpendiculares, longe minores plerumque erunt iis quos hic definivimus, itemque anguli radiorum incidentium EBG ſemper exigui, eò propius ad horum perfectam æqualitatem acceſſuros angulos, ſeu inclinationes, radiorum e vitro egredientium, quia tanto propius angulorum ratio ſinuum rationi reſpondet.

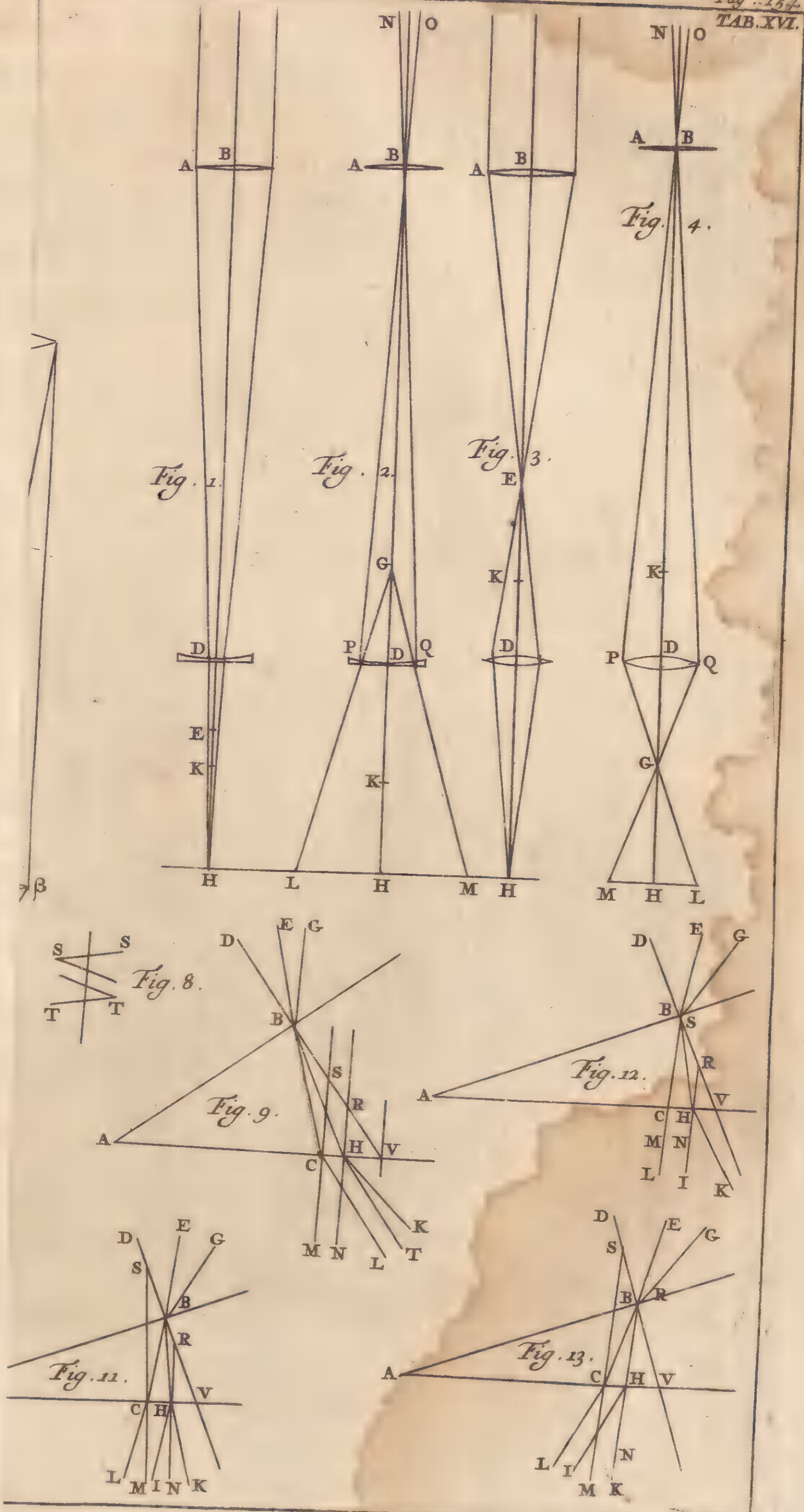
De Lentium Aperturis.

Cum ratio augmenti in duarum lentium teleſcopiis ea eſſe oſtenſa ſit, quæ foci diſtantiæ lentis exterioris ad ocularis foci diſtantiam; aut ſi hæc cava lens fuerit, ad diſtantiam puncti diſperſus, videatur forſan quamvis brevi teleſcopio quantum libet aucta viſibilia ſpectari poſſe. Sed duplex cauſa eſt quæ hoc impediat. Altera, quòd manente eadem lentis exterioris apertura, quanto magis res viſas amplificarit teleſcopium, adhibita oculari lente acutiori, tanto quoque obſcuriores videri faciet. Altera, quod & minus diſtinctas eas referet. Si verò augendo aperturam

remedium quæratur, eò magis augebitur confuſio. Quæ ad lucem obſcuritatemque attinent intelligentur ſi attendamus ad picturam illam rei viſæ quæ in fundo oculi formatur; quæ quanto major efficietur, ſive id refractione lentium fiat, ſive ſolùm propius accedendo, tanto majore copia a ſingulis rei punctis radii intra oculum recipiendi ſunt, ut eadem claritas maneat. Si enim nudo oculo intuens duplo propius ad viſibile accedas, fit ejus pictura in fundo oculi duplo quam fuerat major ſecundùm diametrum, quadruplo ſecundùm aream. Sed & quadruplo plures radii pupillam ingrediuntur ab uno quoque ejus puncto manantes, quia coni radioſi angulus duplus fit. Itaque eadem lux picturæ in utraque diſtantia percipitur, idque ita natura comparatum eſt. Si vero teleſcopium parandum ſit decuplo augens viſibilia ratione diametri, quodque tam lucida omnia referat atque cum nudo viſu ſpectantur, debebit & in lente exteriori diameter aperturæ ad pupillæ diametrum decupla eſſe, etiamſi nec repercuſſu ſuperficierum utriusque lentis, nec vitri colore pars nulla radiorum intercipiatur. Sic enim cum rei viſæ ſuperficies centuplo augeatur, habebitur & lux centupla ejus quam nuda pupilla admittebat.

Sed multo minor lucis menſura teleſcopiis ſufficit. Nam quibus interdiu utimur, non nimis obſcura ſunt, ſi modo ſextam vel ſeptimam partem habeant claritatis quæ ſolet oculis percipi. Longiora verò, quibus Luna ac Planetæ ſpectantur, duplo minori adhuc luce indigent, quod oculi per tenebras minore luce moveantur quâm interdiu. Ita in teleſcopio 30. pedes longo, quod Planetas amplificat centies novies ratione diametri, eoque latitudinem aperturæ poſceret, quæ ad eam, quæ pupillæ, ſe haberet, ut 109 ad 1; hoc eſt, quæ pollicum eſſet fere 11, poſitâ nempe pupillæ latitudine $\frac{1}{10}$ poll. ſufficere invenitur apertura 3 pollicum latitudine, quæ minus quàm decimam tertiam partem colligit ejus lucis, quæ contingeret apertura pollicum 11.

Sed


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
N O
A B
D
P Q
E
K
G
H L M
S S T T
D E G
R V C

Sed nec pupillæ latitudo certa eſt, aut ſemper eadem, nec præciſe definiri poteſt, quæ claritas ſufficiat. Et Planetis remotioribus atque eo obſcurioribus aliquanto amplior danda eſt, quàm Soli propioribus ob cauſam in ſequentibus dicendam.

Illud vero omnino quærendum eſt, quomodo dato uno teleſcopio, quod experientia docente rectè ſit ordinatum, cujusque lentium duarum foci diſtantiæ datæ ſint, & apertura lentis exterioris quantam maximam pati poteſt; quomodo inquam ex hoc alia quotvis quarumcunque longitudinum definiantur, ita ut viſibilia æque lucida, & æque diſtincta exhibeant. Hinc enim cognoſcitur, quid, quantumque longitudine teleſcopiorum producenda profici poſſit. Item an recte elaborati expolitique ſint orbes vitrei, an ſecus.

Diſtinctæ verò viſionis ratio ut habeatur, ſciendum eſt ex duplici cauſa eam vitiari; quarum altera eſt, quod ſphærica lentium convexitas non ad punctum unum cogat radios a puncto rei viſæ manantes, ſed aliquantulum aberrare faciat, ut in ſuperioribus oſtenſum fuit: Altera, quod radius in ſuperficiem denſioris diaphani oblique incidens, ac tanquam recta linea habitus, poſtquam refractus fuerit non amplius in linea feratur, ſed velut in plures ſpargatur exiguis angulis diſſidentes, coloribusque infectos. Veluti TAB. XVII. Fig. 6. ſi in ſuperficiem vitri AB incidat radius CA is refractus ſpargetur angulo exiguo DAE, cujus latus AD a perpendiculo GAF magis recedens colorem rubrum deferet, alterum extremum AE violaceum obſcurum; inter D & E verò apparebunt flavus, viridis, cæruleus, eodem ordine ut in Iride ſpectari ſolent. Hoc ita eſſe, & quidnam ex eo ſequeretur, pridem advertit V. Cl. Iſ. Neutonus; ac priſmate vitreo radios Solis refractos in loco obſcuro excipiens, obſervavit ea lege hanc radii diſſipationem contingere ac ſi variæ eſſent variè coloratorum radiorum refractiones, aliæ aliis majores, radiusque CA omnes iſtos TAB. XVII. Fig. 7. con-

contineret. Extremos autem in A D, A E ita refringi, ut quidem ſinus anguli G A C, ad ſinum anguli F A D, eſſet ut 68. ad 44. ad ſinum verò anguli F A E ut 69. ad 44.

Tab. XVII. Fig. 8. Atque hinc porro collegit, in quavis lente vitrea, ut A B, cujus axis C D, ſi radiorum extremorum axi parallelorum K A, L B pars levius refracta, ac rubrum vel coccineum colorem deferens conveniat cum axe in D; maximè vero refracta ac violacea in E, tunc eſſe E D æqualem $\frac{1}{50}$ C D, ac proinde ſi producantur A E, B E donec occurrant in F & G, rectæ per D ductæ, ac lenti A B parallelæ, fieri G F diametrum circelli aberrationis æqualem parti quinquageſimæ diametri A B. Unde & ang. D A F cenſebitur efficere $\frac{1}{50}$ ang. A D C.

Tab. XVII. Fig. 9. Eſt autem aberratio hæc & alius naturæ, & plerumque longiſſime ſuperat eam quæ ratione figuræ ſphæricæ contingit. Nam ſi ſit ex. gr. lens A B, cujus altera ſuperficies plana ſit, altera convexa, atque ea radiis incidentibus expoſita. Foci verò diſtantia C D ſit pedis unius ſeu poll. 12. Apertura A B dimidii pollicis, quanta circiter huic lenti in pedali teleſcopio danda eſt; ſit H C craſſitudo lentis $\frac{1}{192}$ poll., cujus $\frac{7}{6}$, hoc eſt $\frac{1}{164}$ poll. definit aberrationem totam D E, quæ ex figura ſphærica oritur. Sed ex Neutoniana aberratione erit D E $\frac{1}{50}$ C D, hoc eſt $\frac{12}{50}$ pollicis. Quæ itaque ad priorem ſe hic habet, ut 39. ad 1. Quo longiora vero teleſcopia, eo major erit hæc aberrationum differentia.

Quia autem tanto refractionis vitio videri poſſet penitus corruptum iri omnem teleſcopiorum effectum, quod tamen contra evenire experimur; omnino exponenda eſt hujus rei ratio. Sciendum itaque Imaginem illam Solis coloratam qualem Neutonus obſervavit, longe maximam lucis partem colligere, ubi flavus color effulget rubro proximus. Eandem vero multò fieri obſcuriorem qua parte ad violaceum tendit. Nec dubitandum, quin ſi ab alia quam

a

a Solis luce radii adveniant, major pars aberrantium ſentiri nequeat. Ita fit ut qui a ſingulis viſibilium punctis manant, lentis convexæ operâ picturam rei procul poſitæ ſatis diſtinctam ac circumſcriptam in foco exhibeant, etſi luce quadam, veluti nebula, aſperſam, quæ ab iſta aberratione ſeu radiorum ſingulorum diſperſu oritur.

Notandum autem Propoſ. LV., ad radios in varios colores diſſipatos, extendi poſſe. Ex ea enim ſequitur, eamdem obſervari legem in radiis diſſipatis, quæ in puris, ex. gr. SD radius diſſipetur in DO colorem rubrum & DR violaceum; itemque radius ND in rubrum DB & violaceum DF, ſequitur inquam, ex hac prop. LV., angulos BDO a radiis coloris rubri, & FDR a radiis coloris violacei deſcriptos, ſingulos fore æquales angulo SDN. TAB. XVII. Fig. 10.

Unde non incommode & illud ad modum Lemmatis deduci poteſt,

Aberrationem NDM per radium incidentem BD productam, fore æqualem aberrationi BDF genitæ per refractum ND.

Quia enim a radio incidente BD fit NDM aberratio, vel, quod idem eſt, ab incidente SD aberratio ODR 2|2 NDM, rurſus, quia ex incidente ND fit aberratio BDF, erunt anguli BDO a colore rubro, & FDR a violaceo deſcripti, ſinguli æquales ang. SDN, ergo etiam inter ſe æquales, id eſt, ang. BDO 2|2 FDR, unde demto communi ang. FDO, erit reliquus BDF 2|2 ODR, id eſt NDM, q. e. d.

Propositio LVI.

Lentium aperturas in Teleſcopiis definire.

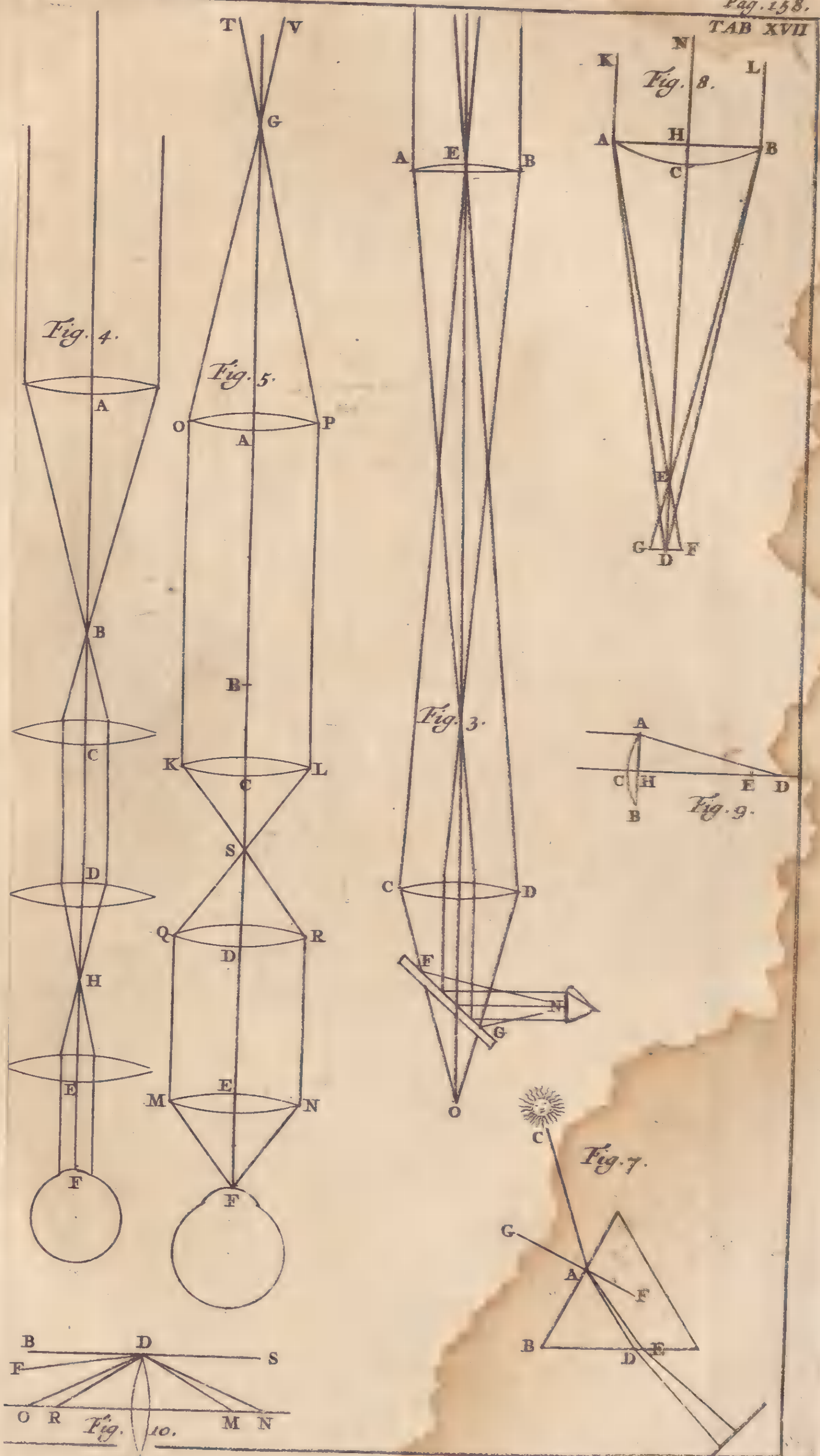
Nunc ad aperturas teleſcopiorum definiendas pergam, oſtendamque, Diametros aperturarum in ſubdupla ratione foci diſtantiarum lentis exterioris eſſe ponendos; Atque ita quoque foci diſtantias lentium ocularium.

Tab. XVIII. Fig. 1. 2. SIt teleſcopium ex lentibus A C, D P compoſitum, A C exteriori, D P oculari. Axis teleſcopii per utramque mediam lentem tranſiens ſit C P, qui pupillam oculi ſecet in T puncto, ejusque fundo occurrat in N. Foci diſtantia lentis A C ſit C F, lentis D P foci diſtantia P F. Dimidiæ aperturæ latitudo ſit A C. Ponatur verò teleſcopium hoc recte ordinatum, quantùm ad lucem ac diſtinctam viſionem attinet, ut nec majorem aperturam in exteriori lente ferre poſſit, nec acutiorem lentem ocularem; Jamque aliud ſit conſtruendum longius ac majoris amplificationis, cujus lens a c habeat foci diſtantiam c f, datæ rationis ad C F, quæraturque hinc diameter aperturæ a a itemque foci diſtantia lentis ocularis p f, quibus fiat æque lucidum hoc teleſcopium, & æque diſtincte res viſas exhibens, atque illud ex lentibus A C, P D.

Sint omnia ejusdem nominis, ſed diverſæ figuræ literis utrobique notata, & conſtructio eadem.

Intelligatur nempe F eſſe punctum concurſus radiorum axi parallelorum qui rubrum colorem adferunt, tam in lentem A C extrinſecus advenientium, quam qui in lentem P D caderent e regione oculi. Sed B eſſe concurſum parallelorum lentis A C, qui violaceum exhibent; G concurſum parallelorum, qui colorem hunc ducunt per lentem P D. Oculi verò ea ſit conſtitutio, ut radios rubros axi parallelos excipiens perducat ad punctum unum fundi ſui. Aberrationem, quæ ex figura ſphærica oritur, pro nulla hic

habe-


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 3.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 7.
Fig. 10.

habemus, quippe quæ, ut jam diximus, nullius momenti ſit ad hanc quæ fit ex coloribus, ac proinde ſi ab extrema apertura A A ducantur rectæ A B D, A F O, quæ lenti P D occurrant in D & O; eæ referent radios coloratos extremos, quos ex uno axi parallelo radio fecit refractio lentis A C. Jungantur D F, F A; D G, & productus axis C P ſecet oculi pupillam in puncto T, ejusque fundo incidat in N. Sitque recta D E axi parallela a lente oculari ad pupillam ducta, & jungatur E N. Cæterum angulus B D F, a cujus magnitudine pendere oſtendimus aberrationem in fundo oculi, vocetur angulus aberrationis.

Quum igitur radius, qui ex G in D feretur violaceo colore tinctus, abiturus ſit in D E axi parallelam, non poterit radius hujus coloris A B D in D E refringi, ſed ex propoſ. LV. interius feretur ad pupillam per D K, ut fiant anguli æquales B D G, E D K. Sit K L axi parallela, quia itaque ea eſt oculi conſtitutio, ut radii rubri paralleli D E, L K, conveniant in fundo ad punctum N, non conveniet eodem radius D K etiamſi ruber, ac minus etiam cum ſit violaceus, ſed interior feretur ſecundum K M, ut angulus N K M, ad D K L, ſeu ſinus ad ſinum certam rationem habeat, quæ cujusmodi ſit ſcire nihil intereſt. Sed in utroque teleſcopio æquales eſſe oportet angulos N K M, ut æque diſtincta viſio exiſtat; quia ſic aberratio quoque N M in fundo oculi utrobique æqualis erit. Conſtat enim radium rubrum A F O, penetrata lente P D, futurum axi parallelum, eoque deſcenſurum ad punctum in oculi fundo N. Oportet itaque & angulos D K L, ſeu K D E, ſeu B D G, utrobique æquales eſſe, ſive etiam angulos B D F; Tunc enim & anguli B D G pro æqualibus rectè habebuntur, quia utrobique minimi ſunt horum reſpectu, (licet inæquales inter ſe) anguli F D G. Sicut enim C F ad F B, ita eſt P F ad F G, ex natura hujus aberrationis; unde permutando, ut C F ad F P, ita F B ad F G. Atqui C F ſuperat longiſſimè F P, ut in teleſcopio ex. gr. pedum 30, ſit

ſit earum ratio quæ 109. ad 1. Ergo, ita quoque FB ſuperat FG, & ita fere angulus BDF angulum FDG.

Ex his jam calculum proſequemur hoc modo. Sit in priore Teleſcopio CF $= b$, FP $= c$; AC $= a$, in poſteriore cf $= d$, fp $= y$; ac $= x$. Et fiat, ſicut CF ad FP, ita linea θf ad fp, eritque θf $= \frac{by}{c}$; quia igitur ratio augmenti in priore Teleſcopio eſt ea quæ CF ad FP, ſeu θf ad fp; in poſteriore verò ea quæ cf ad fp. Erunt in utroque magnitudines apparentes ſecundùm diametrum inter ſe, ut θf ad cf. Quam eandem rationem habere debet AC ad ac; quia æquè lucidum eſſe volumus teleſcopium utrumque: quod ita fiet, ſi quanto magis alterum res viſas auget, tanto majori apertura radios colligat ab earum ſingulis punctis profectos. Eſt igitur AC ad ac, hoc eſt, a ad x, ut θf ad cf, hoc eſt, ex antedictis, ut $\frac{by}{c}$ ad d. Unde fit y, ſeu fp $= \frac{adc}{bx}$. Ducatur FQ axi perpendicularis, quæ rectæ DA occurrat in Q. Quia itaque, ut CB ad BF ita cb ad bf (nam utrobique BF eſt $\frac{1}{30}$ CB, ex ſupra expoſitis); erit & CA ad FQ, ut ca ad fq. Et permutando CA ad ca, ut FQ ad fq. Quia verò, ut dictum fuit, æquales debent eſſe anguli aberrationis BDF, bdf, erit DF ad FQ ut df ad fq, ſive PF ad FQ, ut pf ad fq, cum utrobique pro iiſdem haberi poſſint PF & DF, propter minimam differentiam; proinde & permutando PF ad pf, ut FQ ad fq, hoc eſt, ut CA ad ca. Eſt autem PF $= c$; pf $= \frac{adc}{bx}$; CA $= a$. Ergo ca ſive $x = \frac{aad}{bx}$. Et $bxx = aad$, hoc eſt, xx ad aa ut d ad b. ſive x ad a in ſubdupla ratione d ad b. Quod erat oſtendendum.

Quod autem & lentium PD, pd, foci diſtantiæ ſunt ſicut aperturarum diametri AA, aa, hinc ita probatur. Cum dictum fuerit eſſe a ad x ut $\frac{by}{c}$ ad d; Erit & aa ad xx, ut $\frac{bbyy}{cc}$ ad dd. Erat autem aa ad xx, ut b ad d. Ergo $\frac{bbyy}{cc}$

ad

ad dd, ut b ad d. Unde byy 2|2 ccd, & cc ad yy ut b ad d, hoc eſt, ut aa ad xx; ac proinde etiam c ad y, ut a ad x, hoc eſt, ratio foci diſtantiarum FP, fp, eadem quæ ſemidiametrorum aperturæ AC, ac.

In Teleſcopiis ex convexa & cava lente compoſitis eadem oſtendi poſſunt, ſimili planè demonſtratione; niſi quòd diſtantia puncti diſperſus in lente cava tunc erit quod hic fuit convexi ocularis foci diſtantia. Sed cavarum in compoſitione jam nullus ferè eſt uſus, propter anguſtiam ſpatii, quam teleſcopiorum proſpectui relinquunt.

Cæterum, ad inveniendas tum aperturas, tum lentes oculares cuique lenti exteriori convenientes, ex jam dictis & ſemel conſtituto 30 pedum teleſcopio, hanc effecimus regulam. *Foci diſtantia lentis exterioris, quem numerum pedum habebit, is numerus ducatur in 3000: facti radix erit diameter aperturæ quæſitæ in centeſimis pollicum. Eadem ſi augeatur decimâ ſui parte, dabit foci diſtantiam lentis ocularis iisdem centeſimis expreſſam. Apparentes verò rei viſæ latitudines ſunt ſicut diametri aperturarum*; quæ omnia ſic probantur.

Lenti 30 pedum experimur convenire aperturam 3 pollicum. Si igitur proponatur lens alia cujus foci diſtantia contineat numerum pedum b, erit, ex ſupra expoſitis, ſicut 30 ad $\sqrt{30b}$, quæ eſt ratio ſubdupla rationis foci diſtantiarum, ita 3 pollices aperturæ, ſive 300 centeſimæ pollicis ad aperturam lentis quæſitam; vel permutando erit, ut 30 ad 300, hoc eſt, 1 ad 10, ita $\sqrt{30b}$ ad aperturam in centeſimis pollicum, quæ itaque erit $\sqrt{3000b}$, qualem regula ſtatuit. Lenti quoque eidem 30 pedum convenire invenimus ocularem, cujus foci diſtantia $3\frac{3}{10}$ pollicis. Sunt autem foci diſtantiæ ſicut aperturæ. Ergo, ut apertura 3 poll., ſeu 300 centeſimarum ad aperturam $\sqrt{3000b}$, ita foci diſtantia $3\frac{3}{10}$ pollicum, ſive 330 centeſimarum, ad foci diſtantiam quæſitam. Sive permutando, ut 300 ad 330, hoc eſt, ut 1 ad $1\frac{1}{10}$, ita apertura $\sqrt{3000b}$ ad iſtam foci diſtantiam.

Denique, proportionem amplificationis, ſeu apparentes rerum magnitudines teleſcopiis perceptas eſſe ut aperturarum diametros, ſic manifeſtum fiet. In unoquoque teleſcopio magnitudo apparens ad veram, ſive quæ nudo oculo percipitur, eſt ea quæ foci diſtantiæ lentis exterioris ad foci diſtantiam ocularis. Ergo, in teleſcopio altero propoſitionis hujus, erit hæc magnitudinum ratio, quæ C F ad F P, ſeu b ad c. In altero verò, quæ cf ad fp, hoc eſt, quæ d ad $\frac{adc}{bx}$, ſeu $\frac{bx}{a}$ ad c. Sed magnitudo vera utrobique eſt eadem. Ergo magnitudo apparens in teleſcopio priore, ad eam quæ in altero, ſe habebit ut b ad $\frac{bx}{a}$, hoc eſt, ut a ad x, ſive ut aperturarum diametri; quod erat probandum.

Quare ex amplificatione, quæ eſt, in 30 pedum teleſcopio, ut 109 ad 1, cæteræ omnes ex proportione aperturarum repertæ ſunt & in Tabulam ſequentem relatæ.

Foci diſtantia vitri objectivi, ſive Longitudo Teleſcopii.	*Diameter aperturæ vitri objectivi.*	*Foci diſtantia lentis Ocularis.*	*Amplificatio ſecundùm diametrum.*
Pedes Rhenoland.	*Decimæ & centeſimæ pollicum.*	*Dec. Cent. poll.*	
1	0. 55	0. 61	20
2	0. 77	0. 85	28
3	0. 95	1. 05	34
4	1. 09	1. 20	40
5	1. 23	1. 35	44
6	1. 34	1. 47	49
7	1. 45	1. 60	53
8	1. 55	1. 71	56
9	1. 64	1. 80	60
10	1. 73	1. 90	63
13	1. 97	2. 17	72
15	2. 12	2. 33	77
20	2. 45	2. 70	89
25	2. 74	3. 01	100
30	3. 00	3. 30	109

Foci

Foci diſtantia vitri objectivi, ſive Longitudo Teleſc pii.	*Diameter aperturæ vitri objectivi.*	*Foci diſtantia lentis Ocularis.*	*Amplificatio ſecundùm diametrum.*
Pedes Rhenoland.	*Decimæ & centeſimæ pollicum.*	*Dec. Cent. poll.*	
35	3. 24	3. 56	118
40	3 46	3. 81	126
45	3. 67	4. 04	133
50	3. 87	4. 26	141
55	4. 06	4. 47	148
60	4. 24	4. 66	154
65	4. 42	4. 86	161
70	4. 58	5. 04	166
75	4. 74	5. 21	172
80	4. 90	5. 39	178
85	5. 05	5. 56	183
90	5. 20	5. 72	189
95	5. 34	5 87	194
100	5. 48	6. 03	199
110	5. 74	6. 31	209
120	6. 00	6. 60	218
130	6. 25	6. 88	227
140	6. 48	7. 13	235
150	6. 71	7. 38	244
160	6. 93	7. 62	252
170	7. 14	7. 85	259
180	7. 35	8. 09	267
190	7. 55	8. 31	274
200	7. 75	8. 53	281
220	8. 12	8. 93	295
240	8. 48	8. 33	308
260	8. 83	9. 71	321
280	9. 16	10. 08	333
300	9. 49	10. 44	345
320	9. 80	10. 78	356
340	10. 10	11. 11	367
360	10. 39	11. 43	378
380	10. 68	11. 75	388
400	10. 95	12. 05	398

Propositio LVII.

Si in Teleſcopiis duobus, æquales exteriores lentes habentibus, differant inter ſe aperturarum diametri, & eadem quoque proportione foci diſtantiæ lentium ocularium, æquè diſtinctè iis omnia conſpicientur; apparenteſque viſibilium latitudines ejus proportionis contrariam habebunt; Claritates verò directæ quadruplicatam.

Tab. XVIII. Fig. 4. Sint lentium A A, a a æquales foci diſtantiæ C F, c f ex radiis axi parallelis coloris rubri, itemque æquales C B, c b foci diſtantiæ ex radiis coloris violacei: Aperturæ autem inæquales, quarum diametri A A, a a. Eandemque his proportionem habeant lentium ocularium foci diſtantiæ F P, f p. Porro ductis utrobique, ut ſupra, rectis A B D, A F, F D, F Q, jungatur etiam Q P. Quia ergo tam C B quàm B F ſunt utrimque æquales, ex natura aberrationis, de qua agimus, erit F Q ad f q, ut A A ad a a. Sed ita quoque eſt ex hypotheſi F P ad f p. Ergo æquales erunt anguli F P Q, f p q. a quibus nihil differre cenſentur F D Q, f d q, quia anguli P F D, p f d minimi eſſe intelliguntur. Ex hac verò æqualitate angulorum F D Q, f d q conficitur, ſicut prop. præcedenti, eandem utrobique in oculi fundo fieri aberrationem, & æque diſtinctam utroque teleſcopio cerni rei viſæ imaginem.

Porro ſecunda pars propoſitionis, ex ſupra demonſtratis, manifeſta eſt, nempe latitudines rei viſæ fore in proportione contraria foci diſtantiarum quæ in lentibus ocularibus, quia nempe lentes exteriores utrobique eædem.

De claritatis verò proportione ſic probabitur. Cum æquales ſint lentium A A, a a foci diſtantiæ, ſi æquales quoque eſſent lentes P D, p d, eadem appareret rei viſæ magnitudo. Claritas autem eſſet ad claritatem, ſicut quadratum

tum ex AA ad qu. ex aa, hoc eſt, ſicut circuli apertura-rum, quia hanc rationem habet copia radiorum ab unoquoque viſibilis puncto receptorum. At nunc imago in fundo oculi ex teleſcopio CP, ad eam quæ ex teleſcopio cp eſt, ut qu. fp ad quad. FP; ideoque hanc proportionem inverſam, hoc eſt, quam qu. FP ad quad. fp haberet claritas teleſcopii CP ad claritatem teleſcopii cp, ſi tantùm lux æqualis in utramque effunderetur. Nunc verò ſecundùm eandem proportionem plus lucis excipitur teleſcopio CP quàm cp, propter majorem aperturam. Ergo claritas imaginis per hoc intromiſſa erit ad alteram, in ratione quadratoquadratorum AA ad aa; quod oſtendendum ſupererat.

Si ergo poſitis foci diſtantiis æqualibus CF, cf, aperturæ diameter AA ſit dupla aa, itemque foci diſtantia FP dupla fp, erit teleſcopii CP claritas ſexdecupla ejus, quæ teleſcopii cp.

Quod autem de diſtincta viſione utrobique æquali demonſtratum eſt, non exactè ita experimento conveniet, ſed in majori claritate majus erit nebulæ incommodum quæ ex aberratione oritur. Et hoc quidem ita invenietur, ſi utroque teleſcopio, ſive eodem cum diverſis aperturis, idem viſibile inſpectetur. Quòd ſi ad viſibilia diverſæ claritatis eadem apertura adhibeatur, rurſus ex illa cauſa major nebula orietur ubi major erit lux; ac propterea, obſcurioribus Planetis paulò major apertura quàm illuſtrioribus, danda videtur.

Propositio LVIII.

Tabulæ præcedentis Teleſcopia viſibilibus omnibus, ſive diurnis ſive nocturnis, applicare.

Quæ in Tabulâ ſuperiore exhibentur Teleſcopia, ad ſiderum obſervationes adhiberi ſciendum. Dixi verò, non

non multò ante, plus lucis requiri in iis quibus interdiu utimur, quia ſcilicet multa diei claritate præſtinctis oculis, atque inde teleſcopio admotis, obſcurum videtur, quod per noctis tenebras lucidum eſſet. Eadem itaque teleſcopia, quæ in Tabula deſcripta ſunt, cùm ad diurnas obſervationes adhiberem, experiendo comperi, mutandas in iis oculares lentes, appoſitis quarum foci diſtantiæ duplæ circiter ſint priorum, ita claritas fiet quadrupla, quia eâdem proportione diminuentur imagines ratione ſuperficiei; manebit enim eadem radiorum quantitas, ob nihil mutatam aperturam lentis exterioris, ac proinde clarius efficient anguſtius ſpatium. Quòd, ſi non mutata oculari lente apertura augeatur, augebitur quidem claritas, ſed fiet nebula major ex majori aberratione, eòque hoc remedio non eſt utendum.

Hinc tamen quæri poteſt, cùm ſubſtituta lente oculari minus acutâ, minuatur aberratio ea, quam hactenus examinavimus, cur non ſimul eouſque augeri queat apertura lentis exterioris quoad eadem rurſus aberratio exiſtat, quæ ſecundùm tabulam ordinato teleſcopio inerat. Sic enim plus lucis accreſcet, nec tamen quidquam decedet viſioni diſtinctæ per præced. propoſ. LVII. Reſponſum verò inde petendum quod ſuperius jam attigi, nebulam nempe illam ex aberratione Neutoniana magis nocere, ſi lucidior in fundo oculi imago pingatur; ſimul enim & nebulæ lux increſcet; & hoc reipſa experimur, ſimul ac augetur diurnorum hujuſmodi Teleſcopiorum apertura, nebulam ex aberratione in lucidiore viſibili nocere incipere. Itaque nihil mutandæ ſunt aperturæ.

Rurſus quæri poteſt. Si Teleſcopium, Saturni obſervationibus aptum, ad Lunam convertatur, quæ centuplo lucidior eſt, (non tota inquam ſed partibus ſingulis) quippe decuplo Soli propinquior, an non utiliter aperturæ latitudo imminui poſſit, ſimulque eadem proportione lentis ocularis foci diſtantia, ut fiat regionum Lunæ claritas non major

major quàm quæ erat in Saturno, amplificatio verò multò major evadat? Velut in teleſcopio 30 pedum, ſi diameter aperturæ 3 pollicum reducatur ad $\sqrt{\frac{9}{10}}$ pollicis, quæ paulò minus efficiunt quàm partem tertiam prioris, ſimulque foci diſtantia lentis ocularis eâdem proportione diminuatur; hîc enim idem viſibile reſpicienti eſſet claritatis proportio quadruplicata ejus quæ 3 ad $\sqrt{\frac{9}{10}}$, ex propoſ. LVII., hoc eſt, ea quæ 100 ad 1; cumque Lunæ regiones ſint centuplo clariores quàm Saturni, maneret eadem claritas in Luna, quæ prius fuerat in Saturno. Sed, ex eadem prop., & aberratio quoque in fundo oculi utrobique æqualis erit, & amplificatio in Luna quàm Saturno major ſecundùm rationem 3 ad $\sqrt{\frac{9}{10}}$, quæ major eſt tripla. Itaque plurimum profutura hæc aperturæ & ocularis lentis reductio videtur. At reipſa ſecus accidit. Igitur cauſa, cur ita fiat, dicenda eſt; quam duplicem eſſe ajo. Prima enim, quòd melius accuratiusque cernantur partes minimæ quæque in orbe Lunari, ſi tota lux teleſcopio relinquatur, quàm ſi centuplo minor fiat, etſi non pro hac tanta ratione differentiæ. Altera eſt, quod nimium arctata apertura pereat nitida imaginum circumſcriptio, quod diligenter eſt notandum, & quinam hic a natura conſtituti ſint termini noſcendum. Fit nempe, ut quanto magis contrahitur apertura, tanto exiliori cylindrulo ad oculum accedant radii ab uno quopiam rei viſæ puncto manantes, cujus cylindruli ſemidiameter in fig. 1. Tab. XVIII. eſt PO. Quòd ſi duplum ejus, ſive diameter tota ſit intra $\frac{1}{5}$ vel $\frac{1}{6}$ lineæ, hoc eſt, minor quàm $\frac{1}{60}$ vel $\frac{1}{72}$ pollicis, deperit illa imaginum circumſcriptio, ob cauſam in oculi naturali conſtitutione latentem, ſive ea in choroïde aut retina quærenda ſit, ſive in ipſis oculi humoribus. Namque & ad nudum oculum oppoſitâ laminâ cum foramine, quod ſit infra $\frac{1}{5}$ aut $\frac{1}{6}$ lineæ minus, diſtincti viſibilium termini apparere incipiunt, ac tanto confuſiores quanto ulterius minuetur foramen. Facilè verò oſtendetur in adducto exem-

plo

plo juſto anguſtiorem fieri cylindrulum ad oculum. Fit enim ex regula aperturarum, foci diſtantia lentis ocularis $\frac{11}{10}\sqrt{\frac{9}{10}}$ poll. Sicut autem foci diſtantia lentis exterioris ad interioris, hoc eſt, ſicut in fig. 4. Tab. XVIII. CF ad FP, ita eſt diameter aperturæ AA ad duplam PD, ſeu ad diametrum iſtius cylindruli, hoc eſt, ſicut 30. ped., ſeu 360 poll. ad $\frac{11}{10}\sqrt{\frac{9}{10}}$ unius pollicis, ita ſunt $\sqrt{\frac{9}{10}}$ ad non totam $\frac{1}{30}$ unius lineæ, longè nempe minorem quàm $\frac{1}{6}$. Sed in priore atque ordinaria Teleſcopii conſtitutione, erat ſicut 360 poll. ad pollices $3\frac{1}{10}$, ita 3 poll. ad $\frac{11}{400}$ pollicis, ſeu ferè $\frac{1}{3}$ lineæ, cylindruli diametrum, cujus itaque nequaquam ea eſt anguſtia quæ nocere poſſit. Non multò amplius verò quàm tertia ſui parte diameter aperturæ, ac ſimul lentis ocularis foci diſtantia diminui poſſent, quia jam hinc fit latitudo ad oculum quæ vix excedat $\frac{1}{5}$ lineæ; idque in omni teleſcopii longitudine locum habet; quandoquidem in Tabula noſtra ita ordinata ſunt, ut in omnibus latitudo iſta ad oculum ſit eadem, ut paulò poſt demonſtrabo.

Etiamſi igitur a Saturno ad Venerem convertere teleſcopium velimus, cujus claritas major eſt 225 vicibus, non tamen ulterius contrahenda eſt apertura quàm parte tertia. Sed ſi nimia claritas ſuperſit, ea, leviter infecto fuligine vitro, eſt auferenda.

Nocet enim alia quoque ratione diminutio aperturæ, quòd nimirum nævi & bullæ quæque exiguæ, quæ lenti oculari inſunt, magis apparent, quippe totam cylindruli, de quo diximus, latitudinem vel partem ejus intercipientes, eoque & particulam rei viſæ.

Quod autem dixi, latitudinem cylindruli radioſi oculo incidentis in omnibus Tabulæ noſtræ Teleſcopiis eandem reperiri, paucis oſtendi poteſt. Sunt enim ejuſmodi cylindrulorum in duobus diverſæ longitudinis teleſcopiis ſemidiametri PO, po. Cumque ſit ut FC ad CA, ita FP ad PO, erit

TAB. XVIII. Fig. 1. 2.

PO

PO $\propto \frac{ac}{b}$. Ac ſimiliter cùm ſit ut fc ad ca ita fp ad po, fc verò ſit $\propto d$: ca verò $\propto x$, & fp ſit inventa $\propto \frac{adc}{bx}$, fiet po $\propto \frac{ac}{b}$, ideoque æqualis PO, quod erat oſtendendum.

Atque hinc denique concludo nihil obſtare, quin, ſervatis Tabulæ ſuperioris legibus, quouſque lubet Teleſcopiorum longitudines producamus, idque ſemper majore cum effectu. Quandoquidem & claritas & diſtinctio eadem ubique manet; ut patet ex prop. LVI. quam Tabula pro fundamento habet; & hoc quoque poſterius incommodum, ex anguſtia radiationis ad pupillam, peræque abeſt.

Priuſquam verò a Teleſcopiis diſcedamus, oſtendam quomodo obſervari poſſint ſtellulæ exiguæ, ac præcipuè Satellites Jovis ac Saturni, auctâ inſigniter, ac præter ſolitum, aperturâ exterioris lentis, ſimulque ocularis foci diſtantia. Quia enim velut puncta tantùm apparent hæc ſidera, licet teleſcopio ſpectata, nihil prodeſt eorum diametros augeri, ſed oportet ut quanta poſſunt luce clareſcant. Hoc autem præcipuè hic fit auctis aperturis. Duplicatâ enim apertura ſecundùm diametrum, quadrupla lux a ſidere profluens colligitur. Quòd ſi ſimul lentis ocularis foci diſtantia duplicetur, orietur diſtinctio eadem quæ ab initio, non tamen fiet claritas ſexdecupla quanta ex ſuperiore ratiocinio, ſed quadrupla manebit; quoniam, ut jam dixi, imago ſideris in fundo oculi eſt inſtar puncti, eòque tantùm lucis quantitas in ipſum derivata ſpectanda eſt; quæ quantò major, tantò clarius faciliuſque ſidus ipſum conſpicietur. Quod aliter eſt ſi Lunam aut Planetarum primariorum aliquem hoc teleſcopio intueamur, quorum partes ſingulæ ſexdecuplam lucem accipient. Poterimus autem hac aperturæ ampliatione plurimùm augere vim Teleſcopii in deprehendendis ſtellis minimis aut Saturni Comitibus, ac forſan 30 pedibus longo cum apertura ſolitæ dupla, ſeu 6 poll., lata tantun-

dem efficere quantùm aliàs teleſcopio pedum 120, cui in ſuperiore Tabula tanta aperturæ latitudo attributa fuit.

DE MICROSCOPIIS.

Lentibus vitreis etiam vel ſolis, vel binis ternisve certa ratione conjunctis, Microſcopia parantur, quibus corpuſcula quælibet minima, partesque eorum non ſecus auctæ apparent, quàm res longinquæ Teleſcopiis. Et eorum quidem, quæ ſimplici lente conſtant, credibile eſt non multò poſt inventa teleſcopia uſum fuiſſe animadverſum. Compoſitorum verò artificium minus erat obvium, quod decennio circiter poſterius eſſe invento illo videtur. Nondum enim Anno 1618. ejusmodi Microſcopia extitiſſe apparet, quod Hier. Syrturus, qui de origine & fabrica Teleſcopiorum eo anno librum edidit, non fuerit ſilentio prætériturus tam inſigne inventum, ſi jam tum cognitum fuiſſet. Franc. quidem Fontana ab ipſo A°. 1618. id ſibi arrogat in libro Obſervationum, edito in lucem A°. 1646. Sed teſtimonium Hier. Syrſalis, quod adducit, non eſt antiquius Anno 1625. Anno autem 1621. apud Drebelium noſtratem conſpecta fuiſſe Microſcopia hujusmodi Londini in Britannia, ipſi qui adfuerant ſæpe mihi narraverunt, ipſumque primum auctorem eorum tunc habitum. Nihil vetat autem, quin ambo ex varia lentium compoſitione huc devenerint, etſi cauſarum in his rebus & omnis Geometriæ ignari.

Cæterùm ſimplicia quæ dixi Microſcopia, cùm antehac minoris fierent haud pridem, eò perducta fuere, ut cæteris omnibus in augendis virtutibus, antecellant. Fiunt autem vel lenticula una convexa, vel ſphærula vitrea prope ad oculum admota, quorum utriusque rationes cauſasque hic primùm exponemus.

PRO-

Propositio LIX.

Simplicium Microſcopiorum rationes & uſus exponere & quomodo ſphærulæ & exiguæ lentes parentur.

Lenticulæ effectus ex iis facilè intelligitur, quæ de amplificatione convexæ lentis in universùm ſcripſimus prop. xxxvi. Sit enim lens N, res viſa ad R focum nempè ejus, Oculus O proximè lenti admotus; Jam radii ex R egreſſi ac refracti mittentur ad oculum O paralleli, diſtinctamque viſionem efficient. Viſibile autem QRQ eadem magnitudine cernetur ac ſi lens N abeſſet, & in locum ejus lamina cum exiguo foramine conſtitueretur, nempe angulo QAQ. Ut proinde nihil aliud hic præſtet interpoſita lens, quàm ut diſtincta fiat viſio, quæ absque lente confuſa foret. Sed cùm nudo oculo ita demum fiat diſtincta, ſi ſpatio aliquo, putà 8 pollicum, oculus diſtet; tantò nunc auctior imago apparens dici poterit, quantò 8 pollices iſti majores ſpatiolo NR, ſeu foci diſtantiâ lenticulæ N, quæ ſi pollicis quintam partem æquet, erit augmentum velut 40 ad 1 ratione diametri. Quantò igitur minor erit foci diſtantia lenticulæ N, tantò major erit effectus ejus in dilatanda rei minutæ ſpecie; quanquam obſtacula quædam hic ſeſe offerunt in ſequentibus memoranda, quæ ultra certos terminos progredi vetant. Atque idem in ſphærulis accidit, quæ, ut diximus, pro lentibus hic adhiberi poſſunt; quas alioqui quantumvis exiguas facilè parare licet. Hæ verò hoc uno lenticulis cedunt ſi utræque ſint vitreæ, quod in pari amplificatione triplo amplius a viſibili lenticulæ diſtent, eoque ſpatium relinquant, quo lateralis lux immittatur, ſic enim rerum colores conſpicere licet, cùm alioqui directæ luci obvertendum ſit Microſcopium, & tantùm quæ tenuitate ſua pellucent intuenda.

Tab. XVIII. Fig. 5.

Effectus verò ſphærulæ, atque hoc quod diximus de triplo minore diſtantia, ſic demonſtrantur.

Tab. XVIII. Fig. 6. Sit ſphæra vitrea cujus centrum K; axis AB, in quo utrimque producto ſtatuatur oculus ad D; viſibile ad C; poſitis diſtantiis ſingulis AD, BC diametri AB quadrantibus. Eſt ergo punctum C concurſus radiorum axi AB parallelorum, qui incidunt in ſuperficiem AH; quare viſibile in C poſitum, mittet radios ex refractione ſphæræ parallelos ad oculum in D, eoque fiet viſio diſtincta. Producta autem BD ad L, ut AL ſit diametro AB æqualis, ſi fiat, ſecundùm propoſ. xii. part. 1., ut DL ad DK, ita DA ad DF, erit in puncto D concurſus radiorum intra ſphæram euntium & ad punctum F pertinentium, qualis GH. Sicut autem æquales DL, DK; ita quoque erunt DA, DF. Sit jam GE axi parallela, atque intercipiat rei viſæ lineam CE, ac ducatur recta ED. Radius ergo EG, fractus ad G, incedit ſecundùm GH, & rurſus fractus ad H, pergit ad oculum in D. Quamobrem linea CE, ſpectatur angulo ADH, quæ nudo oculo occuparet ang. CDE, quem dico illius eſſe dimidium.

Quia enim AF dupla ad AD, erit angulus ADH duplus AFH. Eſt autem DE parallela FG, quia GE & parallela eſt FD, & huic ipſi, ſive rectæ BC, æqualis cenſenda; quia CE linea velut minima habetur ratione ſphæræ diametri. Erit ergo anguli quoque CDE duplus ADH; qui æqualis proinde angulo CKE. Unde liquet oculo ad D collocato, (ſive utcunque alibi in producto axe BA per prop. xlvii.) apparituram lineam CE angulo eodem, quo nudo oculo appareret intuenti ex puncto K. Unde ſi diameter ſphærulæ AB ſit $\frac{1}{12}$ pollicis, qualibus uti ſolemus, ſit KC 2|2 $\frac{1}{16}$ pollicis, cujus ad diſtantiam 8 pollicum ea eſt ratio quæ 1 ad 128; adeò ut amplificationis ratio tunc ſit quæ 128 ad 1, quæ ſanè inſignis admodum. Atqui ſi lentis N foci diſtantia NR æqualis ſit rectæ KC, diximus ejus operâ viſibile RQ, eadem magnitudine cerni

ni ac ſi, absque lente, in N oculus poneretur; neque etiam hic mutatur apparens magnitudo ubicunque in axe producto RN oculus ſtatuatur. Ergo ſequitur eandem multiplicationem, eundemque prorſus effectum præſtari lente N & ſphæra AB. Et conſtat porro diſtantiam RN triplam eſſe BC; quæ fuerant demonſtranda.

Hic craſſitudinem lentis N pro nulla habuimus, qualis cenſeri poteſt, cùm foci diſtantia NR pollicaris eſt vel non multò minor; Sed quum uſu præſtent exiles lenticulæ, velut quæ utrinque formantur cavo ſphærico, cujus $\frac{1}{2}$ diameter duodecimam pollicis non excedit, neceſſariò relinquenda eſt iis craſſitudo aliqua, ne ob nimiam parvitatem intractabiles fiant, neve minus bene ſphæricam formam induant. Hinc verò minuitur illa quam dixi diſtantia vitri a ſubjecto viſibili. Velut ſi ſit lenticula ST, cujus ſuperficies plano ſecta faciat arcus SXT, SVT circumferentiæ trientes, nempe deſcriptos centris X, V, radio XV. Hæc, ut idem præſtet augendo viſibili ac ſphærula AB, debet XV radio KB, & quartæ ejus parti æqualis poni; unde oritur foci diſtantia VY dupla BC, ſeu $\frac{2}{3}$ NR. TAB. XIX. Fig. 1.

Quomodo autem ſphærulæ & exiguæ lentes parentur atque uſui aptentur, nunc exponendum erit.

Sphærulæ quò minores eò facilius conficiuntur, hoc modo. Fragmina vitri minima ad imam lucernæ flammam, qua parte cæruleus color conſpicitur, admoventur ut candeſcant, atque ita filo ferreo, quantùm tenuiſſimum duci poteſt, excepta, ac porro dextrè verſata, in globulos abeunt, qui ſatìs magni ſi granum ſinapi æquaverint. Ex pluribus ita paratis aliquos probos reperies, idque experieris poſtquam lamellæ æreæ eos incluſeris. Quod ita fit. Lamellam ex ære tenuiſſimo digiti latitudine, longitudine duplâ complicabis, tum medium hoc rectangulum acus

cuſpide perforabis; foramina oppoſita coticulâ lævigabis, ne quid ſcabri circa margines adhæreat, & flammæ fuligine inficies, ne quid fulgidum intus remaneat. Inde ſphærulam adhuc filo ferreo hærentem intra lamellam atque ad ipſa foramina inferes, preſſamque continebis adactis circum æneis tribus claviculis ex filo deſectis malleoque firmatis. Sic levi operâ plura microſcopia efficies, ex quibus quæ optima ſeliges.

Horum, utì dixi, præcipuus eſt uſus ad pellucida quæque corpuſcula inſpicienda. Imponuntur verò machinulæ ita conſtructæ, ut cochleolæ converſione accedant recedantque a viſibili, atque ita ad requiſitam diſtantiam deducantur, fiatque diſtincta viſio. Cui porro plurimùm conducit, ut lux nimia coërceatur, nec niſi per foramen admittatur, quod circiter quaternis ſuis diametris a viſibili diſtet. Etenim hoc pacto melius apertura ſphærulæ conveniens definitur quàm latitudine foraminis contigui, quod hic arctari nihil neceſſe eſt. Oculus ſphærulæ proximè admovendus eſt, quò majus ſpatium complectatur.

Cæterùm, quæ viſui proponuntur corpuſcula aut liquorum guttulæ orbiculo vitreo plano imponuntur, qui inter aſpiciendum in omne latus mobilis ſit oportet. Sunt & qui vitreis tubulis liquorem attrahant, tam anguſtis ut vix pilos ſingulos admittant; quæ ratio ſuos quoque uſus habet. Lenticulis autem, quas diximus, utendo, ac lente aliâ a latere appoſitâ, lucem rei viſæ deſuper affundendo, curandum eſt, ut aperturæ minimum foramen exactè temperetur, experiendo quantùm patere poſſit ſine diſtinctæ viſionis detrimento. Radiant enim hic corpuſculorum puncta; quod aliter eſt in pellucidis quæ per ſphærulas ſpectantur, ubi lucem intercipit res objecta, non emittit.

Mirabilis autem eſt lenticularum ac ſphærularum ejuſmodi effectus, ut ex editis in publicum experimentis cognoſcere licet, quibus naturalium rerum cognitio plurimùm lucis accepit. In his eſt obſervatio manifeſta circu-

laris

laris motus ſanguinis, quem, monſtrante A. Lewenhoekio noſtro, diligentiſſimo horum inveſtigatore, in anguillæ cauda ſumma cum voluptate conſpeximus. Eſt enim perlucida, ac ſanguis, globulis ſubrubentibus conſtans, celeri motu per canaliculos arteriarum, qui venis continuantur, diſcurrit. Quod haud dubiè in cæteris quoque animalibus animadverteretur, ſed non facilè partes luci perviæ in his reperiuntur. Anguillulam vivam in tubum vitreum demiſerat aquâ ſemiplenum, cui extrinſecùs microſcopium applicabat ea parte qua cauda extrema vitrum tangebat.

Jucunda etiam eſt animalculorum obſervatio aquæ guttulis innatantium, in quam zinziber, piper aut aliud odoris acrioris diebus aliquot demerſum fuerit.

Variæ ſunt formæ aliæque aliis minores, miri etiam motus pro modulo ipſorum ſatis celeres, quorum inſtrumentum nullum animadverti poteſt, cùm pedibus branchiisque careant, nec corpora ut piſces inflectant. Nam anguillulæ aceti, quæ iſtis longè majores ſunt, eadem ratione ac fluviatiles natant, in quibus hoc mirum quòd ex ſe fœtus generent. Vidi enim quæ parvulas quaternas intrà ſe contineret (ſunt enim perlucidæ totæ) cùmque in tubulo aſſervaretur, poſt horas aliquot eas enixa eſt, quæ ſeorſim quæque natabant.

Sed iſta, quæ dixi, in aqua diſcurrentia animalcula veriſimile eſt ex aëre in aquam allici propter odorem. Variis enim rebus in aqua maceratis eædem formæ eorum reperiuntur. At clauſo vaſculo nulla apparent. Facilè autem ob inſignem parvitatem in aëre ſuſtinentur, cùm minimis pulviſculis multò minora ſint. Ita multa ipſorum millia forſan in pulmones dimittimus ignari. Nec inutilè eſſet obſervare quibus anni tempeſtatibus plura appareant, & num aëre vitiato augeantur.

Lac exiguis globulis pellucidis conſtare apparet in liquore item pellucido, ſed diverſæ refractionis, natantibus; hinc album videtur, cùm tamen non aliam materiam

teriam quàm prorſus diaphanam contineat, coloreque carentem.

Mitto inſectorum minimorum tot mirabiles formas. Alas papilionum & culicum, plumulis exiguis obſitas. Pulviſculos in mediis florum apicibus inhærentes, qui nil aliud ſunt quàm folliculi transparentes materia ea pleni ex qua ceram apes conficiunt, quamque pedibus ſuis affixam in alvearia deferunt. Omnium verò mirabiliſſimum ac præcipuum putandum, quod in ſemine animalium marium eſt obſervatum, nempe in eo animalculorum immenſam multitudinem piſciculorum more natare, ejus ferè formæ quam ranæ habent nuper natæ, ac nondum pedibus auctæ. Quæ animalcula, intrare ova fœminarum, atque eſſe ipſorum animalium inde excludendorum initia, vix mihi dubitandum videtur. Plurima enim hoc ſuadent, nec multùm obſtat, quòd e tanta multitudine ſæpe vel pauca vel unum duntaxat in animal excreſcant, cùm eadem abundantia ac ſuperflua fœcunditas in plerisque arborum & herbarum ſeminibus conſpiciatur, velut abietis, papaveris &c.

Hæc verò animalcula propter miram parvitatem (nam vel decem millia eorum exiguum arenæ granum non æquant) globulis iſtis vitreis inſpicienda ſunt, quorum in augendo præcipua eſt virtus.

PROPOSITIO LX.

Microſcopiorum compoſitorum rationes explicare.

NUnc de compoſitis Microſcopiis dicemus, quorum operâ ſpectantur quæ lucem non transmittunt, verique eorum colores apparent, idque melius commodiusque quàm lenticulis ſingulis.

TAB. XVIII. Fig. 7. 8. Sint lentes Microſcopii A minor, & B major. Cur autem ita ponendæ cauſam poſtea demonſtrabimus. Sitque B oculo propior, qui ſit ad C punctum; A verò ad rem viſam

viſam obverſa, quæ ſit ad E, axis communis lenti utrique A B C. Duplex autem adhibenda eſt obſervatio, quam duplici Schemate deſignamus. In fig. 7. radii ex uno rei viſæ puncto E manantes in lentem A, conveniunt hujus refractione ad punctum P, atque ibi ſeſe interſecantes, atque in lentem B pergentes, hujus operâ paralleli redduntur, atque ita ad oculum in C perveniunt, eoque diſtincta fit viſio. Oportet itaque diſtantiam A E, majorem eſſe quàm ſit A Q foci diſtantia lentis A. Et proportionales eſſe debent E Q, E A, E P. Lens verò B ita collocanda, ut ejus focus qui verſus A, cadat in ipſum punctum P, quæ omnia, ex ſupra demonſtratis, manifeſta ſunt. Altera figura radios ſingulos exhibet a diverſis rei viſæ punctis fluentes D A G, F A H, E A B. Eſt autem punctum A medium lentis, ponunturque A P, A B, A C proportionales, ad definiendum oculi locum C; ita enim fit ut quam libet exiguo foramine pateat lenticula A, tota tamen lens B imagine rei viſæ impleatur, quoniam radii ex A in totam lentem B cadentes coguntur ad punctum C.

Proportio autem magnitudinis apparentis ad veram cognoſcetur ductâ in figura 8. rectâ C F. Erit enim ea quam habet angulus B C H ad angulum E C F, quæ ratio componitur ex ratione anguli B C H ad angulum B A H & anguli B A H, ſeu E A F ad angulum E C F. Sed prior harum eſt eadem quæ rectæ A B ad B C, & poſterior ea quæ C E ad E A, quia in exiguis angulis hiſce eadem cenſetur ratio angulorum quæ tangentium. Ergo ratio apparentis ad veram magnitudinem erit compoſita ex rationibus A B ad B C, ſeu A P ad P B, (nam proportionales ſunt A P, A B, A C) & C E ad E A. Sed ut rectius æſtimetur Microſcopii effectus, comparandus eſt potius angulus B C H cum angulo, quo cerneretur recta E F ſi ab oculo 8 pollices diſtaret, hoc eſt, cum angulo E L F; poſitâ L E pollicum 8. ſecundùm ea quæ de ſim-

plicis lenticulæ multiplicatione ſuperiùs dicta fuere; atque ita ratio amplificationis cenſenda hîc componi ex ratione anguli BCH ad BAH, & BAH, ſeu EAF, ad ELF; hoc eſt ex ratione AP ad PB, 8. lineæ EL, & pollices longæ, ad rectam EA. Si enim tantæ longitudinis eſſet Microſcopium, ut, ex. gr., CE eſſet duorum pedum, hoc eſt, tripla LE; repertaque eſſet priori ratiocinio magnitudo apparens ad veram, quæ 90 ad 1., tamen non niſi 30 ad 1 cenſenda eſſet, quia tantum trigecuplo major appareret lineæ EF microſcopii operâ quàm nudo oculo ex octo pollicum diſtantia ſpectata. Non enim conſiderandum quantùm microscopio amplificemus rem duobus pedibus diſtantem, ſed quantò major efficiatur quàm cum ex eo ſpectatur intervallo, quo ſolemus oculum admovere cum curioſiùs intueri cupimus.

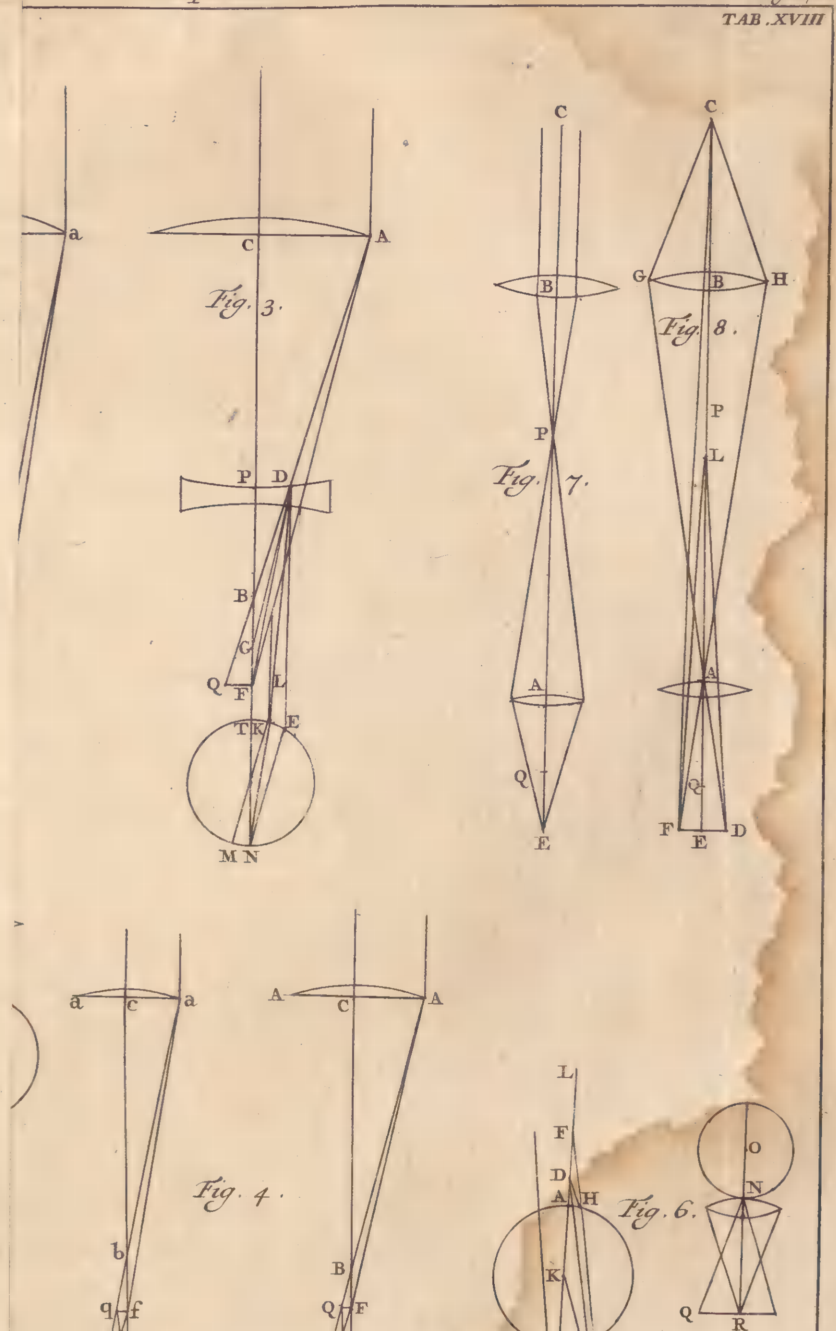
De Microſcopiorum luce & aperturis.

Sicut antea de Teleſcopiorum aperturis inquiſivimus, ita nunc ea quoque expendemus quæ Microſcopiorum lenticulis ad res viſas obverſis conveniunt; unde omnis eorum pendit vis & effectus, adeò quidem ut hinc diſcendum ſit quouſque viſibilium amplificatio perduci poſſit: quod hactenus a nemine, quod ſciam, fuit definitum. Invenietur autem & hic progreſſus quidam infinitus qualis in Teleſcopiis oſtenſus fuit, non quidem in ſimplici unius lenticulæ Microſcopio, ſed in iis quæ ex binis componuntur.

Si ſingulis lentibus microſcopia conſtituantur, ſciendum eſt in iis, quæ circiter ſemipollicarem habent, aut majorem, foci diſtantiam, nihil opus eſſe moderanda apertura diſtinctam viſionem efficere; quoniam ipſa pupillæ anguſtia radios nocituros quantùm opus eſt excludit, atque ita prorſus ac ſi non majori foramine lens adaperta foret. *In minoribus verò lenticulis ubi apertu-*

rarum

TAB. XVIII



rarum circumſcriptio neceſſaria eſt, oportet harum diametros eandem rationem ſervare quæ eſt foci diſtantiarum, ut æquè diſtinctè res viſas referant. Claritas verò tunc erit in eadem ratione duplicata, ut proinde quò acutiores lenticulæ adhibebuntur, eò majora quidem, ſed & obſcuriora, omnia videri faciant.

Sit Lenticula P, cujus axis TBF, ſemidiameter aperturæ PD, quantam maximam experientia ferri poſſe oſtendit, eaque pupillâ minor, focus extremus radiorum rubrorum, qui ab axi parallelis procedunt, in F puncto, ubi & viſibile collocatum ſit; focus violaceorum, ab iiſdem axi parallelis procedentium, in B. Poſitis item iiſdem omnibus in minore lenticula P, cujus aperturæ ſemidiameter pd ſit ad foci diſtantiam pf ſicut in majore; Dico, utraque æquè diſtinctè viſibile conſpici. Tab. XIX. Fig 2.

Cùm enim utrobique ſi radius ED axi parallelus in lentem P incidat, idem ſpargatur per angulum FDB, ita ut rubrum colorem extremum deferat ad F, violaceum extremum ad B, fiet viciſſim ut radius a viſibili manans FD, ſpargatur per angulum EDK, ita ut angulus EDK ſit æqualis FDB, ex propoſ. LV. Eſt itaque utrobique aberrationis angulus FDB a quo pendet aberratio radiorum in oculi fundo, ut oſtenſum cum de Teleſcopio agebatur. Quia verò ex natura aberrationis hujus, ut PF ad FB, ita eſt pf ad fb; itemque ex hypotheſi, PD ad PF ut pd ad pf, manifeſtum eſt æquales eſſe tam angulos PFD, pfd, quàm PBD, pbd quare & differentia priorum æqualis differentiæ poſteriorum, hoc eſt, ang. FDB æqualis angulo fdb, ac proinde aberrationes in fundo oculi utrimque æquales, eoque viſio æquè diſtincta.

Porro, quia anguli PFD, pfd æquales, apparet eandem quantitatem radiorum utrobique a punctis rei viſæ F, f & aliis quibusvis ad lentes manare, eoque & ad oculi pupillam. Latitudo verò rei viſæ in fundo oculi tantò major fit minori lenticula, quantò major eſt PF,

quàm p f, ut in ſuperioribus demonſtratum eſt; & ſuperficies apparentes ſunt in duplicâta ratione latitudinum. Ergo eadem radiorum lucidorum quantitas utrique ſuperficiei illuſtrandæ impenſa clariorem efficiet minorem, ſecundùm rationem qua ab altera ſuperficie ſuperatur, hoc eſt, ſecundùm duplicatam rationem P F ad p f; quod demonſtrandum ſupererat.

Cùm itaque ſervari non poſſit eadem viſionis perfectio in acutioribus lenticulis quæ reperitur in majoribus, quin creſcat obſcuritas, ſequitur non licere amplificando quouſque libet progredi, niſi lux major illuſtrando viſibili aliunde arceſſatur. Nec ſic quoque multùm proficimus, quoniam latitudo ad pupillam, ſeu cylindrulus radioſus a ſingulis rei viſæ punctis affluens, de quo prop. LVIII. in teleſcopiorum explicatione dictum fuit, quique hic ipſam aperturæ latitudinem habet, non infra quintam ſextamve lineæ partem contrahi poteſt, adeò ut undique terminus præſcriptus ſit harum lenticularum efficaciæ.

Jàm porro, quid binis lentibus componendis fieri poſſit, inveſtigabimus, atque inprimis oſtendemus plus præſtari poſſe brevioribus quàm longioribus Microſcopiis. Quin etiam infinitum quendam ampliationis progreſſum dari demonſtrabimus, niſi obſtaret lenticularum parvitas, quæ continuò tanta ſit, ut nec veras ſphæræ ſuperficies iis inducere, nec ſatis commodè ipſas tractare poſſimus, quippe quæ & viſum denique effugiant.

Sequens verò propoſitio æquè vera erit in utraque radiorum aberratione. Nam hìc ejus quoque rationem habendam eſſe quæ ex figura naſcitur, poſtmodum oſtendemus.

PRO-

Propositio LXI.

Dato quocumque Microſcopio ex binis lentibus, quomodo diximus, compoſito, poteſt aliud brevius reperiri, ſervata eadem lente oculari, in quo eadem fiat rei viſæ magnitudo apparens, eadem claritas, viſio autem diſtinctior; vel, ſervata eadem diſtinctione, major claritas.

SIt Microſcopium ex lentibus E Z oculari & P D ad viſibile obverſa compoſitum, quarum axis communis V E P B; Sit viſibile ad B; focus lentis PD inter P, B ſit O, focus lentis E Z inter E, P ſit N. Oculus ad V, diſpoſitio autem qualis ſupra, ut nempe B O, B P, B N ſint proportionales, itemque P N, P E, P V. Tab. XIX. Fig. 3.

Porro, adſumtâ lente oculari ez quæ foci diſtantiam en æqualem habeat E N, jungatur ei lens altera pd, cujus foci diſtantia po minor ſit quàm PO. Sicut autem PO ad po, ita ſit P N ad pn, & ita quoque P B ad pb. Itaque quemadmodum radii a puncto rei viſæ B manantes refractione lentis P D conveniunt in N, ita quoque qui a puncto b veniunt, refractione lentis pd convenient in n, atque inde refractione lentis ez fient paralleli, atque ita ad oculum ferentur qui ſit in v, poſitis proportionalibus pn, pe, pv. unde fiet ut totam lentem ez, imagine rei viſæ, plenam ſpectet, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt. prop. XLIX.

Dico jam utroque microſcopio apparentes rei viſæ magnitudines fore æquales.

Quòd ſi & aperturæ lentium PD, pd, proportionales ponantur ipſarum foci diſtantiis, dico utroque microſcopio eandem haberi claritatem, ſed breviori omnia diſtinctiùs cerni, ſive angulum aberrationis in oculo hìc minorem fieri.

Sint rei viſæ latitudines lineolæ B X, bx, axibus perpendiculares & inter ſe æquales, & per centra lentium P, p,

ducantur rectæ XPZ, xpz, lentibus EZ, ez ocurrentes in Z, z, atque hinc ducantur ZV, zv, ad puncta oculi. Spectabuntur itaque lineolæ æquales BX, bx, angulis EVZ, evz, qui ſi inter ſe æquales eſſe oſtendantur, hoc eſt, ſi eadem ſit ratio VE ad EZ, quæ ve ad ez, erit utrobique magnitudo apparens eadem.

Componitur autem ratio VE ad EZ ex rationibus VE ad EP, & EP ad EZ. Sed ratio VE ad EP eſt eadem quæ EN ad NP, quia proportionales ſunt VP, EP, NP. Et ratio EP ad EZ eſt eadem quæ PB ad BX. Ergo ratio VE ad EZ componitur ex EN ad NP & PB ad BX, ac propterea eadem erit quæ rectang. EN, PB ad rectang. NP, BX; quæ etiam componitur ex rationibus PB ad NP, & EN ad BX.

Eodem modo in minore microſcopio oſtenditur ratio ve ad ez componi ex rationibus pb ad np & en ad bx. Sed ratio pb ad np eſt eadem, ex hypotheſi, quæ PB ad NP, ut facilè perſpicitur. Itemque ratio en ad bx eadem quæ EN ad BX, quia æquales inter ſe en & EN, itemque bx & BX. Ergo rationes VE ad EZ, & ve ad ez ex iiſdem rationibus componuntur, eòque inter ſe æquales ſunt; ac proinde & apparentes magnitudines lineolæ BX vel bx.

Porro poſitis aperturis PD, pd in eadem ratione, quæ eſt foci diſtantiarum PO, po, hoc eſt, quæ rectarum PB, pb, apparet eandem radiorum quantitatem ex punctis ſingulis B & b rei viſæ microſcopio utroque hauriri; ac proinde, & a tota ipſarum ſuperficie, quæ lux cum utrobique æqualibus in oculo imaginibus impendatur, ſequitur harum claritatem æqualem fieri.

Denique angulum aberrationis a diffuſione radii minorem eſſe in breviori microſcopio facilè quoque oſtenditur. Si enim aberrationes iſtæ ſint BF, bf, radiorum ex N & n venientium, facilè intelligitur, eas fore inter ſe ſicut diſtantiæ BP, bp, quam eandem rationem quoque habent aperturæ, ſive earum dimidiæ PD, pd. Unde junctis FD, fd,

appa-

apparet triangula ſimilia fieri BDF, bdf, eorumque angulos ad D & d æquales. Cùm igitur radii ND, nd, refractione lentium PD, pd, ita diſſipentur, ut DB, db rubrum colorem deferant; DF, df verò violaceum, ac proinde viciſſim violacei FD, fd abirent in DN, dn, fiet, ut qui in radiis BD, bd violacei continentur, abeant in DM, dm, ita ut anguli MDN, mdn ſint æquales angulis BDF, bdf*. Hi autem duo inter ſe æquales ſunt, ergo etiam æquales anguli MDN, mdn. Cùmque PN ſit major quàm pn, (ſunt enim inter ſe ut foci diſtantiæ PO, po) ſi ducantur axi perpendiculares NK, nk, rectis DM, dm occurrentes, erit major NK quàm nk; & junctis NM, nm, itemque KE, ke, quia æquales ſunt NE, ne, erit ang. nek minor quàm NEK, ideoque & nmk minor quàm NMK, quia hi ſinguli iſtis ſingulis æquales cenſentur. Quòd ſi porro ponatur, puncta G, g, eſſe focos radiorum violaceorum, qui axi paralleli in lentes EZ, ez incidunt, ſicut rubrorum ſunt foci N & n, (nam per rubrorum radiorum concurſum ſemper foci diſtantias definimus) ſequetur jam, ſi violacei per GM, gm ferantur eos axi parallelos evaſuros putà in MR, mr, ac proinde violaceos DM, dm, poſt refractionem, non fore axi parallelos, ſed ita introrſum declinaturos, ut anguli RMS, rms fiant æquales angulis GMK, gmk. Quia autem æquales ſunt EN, en, minor verò em quâm EM, ut mox oſtendemus, erit in aberratione, quæ ex figura oritur, minor gn quam GN, in altera verò aberratione hæ erunt æquales. Itaque ſemper angulus nmg minor quàm NMG. Erat autem & nmk minor quàm NMK, ergo totus gmk minor quàm GMK. Atqui angulo gmk æqualis erat rms, & angulo GMK æqualis RMS, ergo & rms minor quàm RMS; ab his verò angulis pendet aberratio intra oculum uti oſtenſum fuit cùm de teleſcopiorum aperturis ageremus. Ergo minor hæc erit breviori huic quàm longiori microſcopio; quod tertio loco erat demonſtrandum.

* Per Prop. LV.

Cæte-

Cæterùm eadem ferè proportione ſeſe ſuperabunt, qua rectæ NK, nk, hoc eſt, qua foci diſtantiæ PO, po, quatenus anguli NMG, nmg, ob parvitatem negligi poſſunt.

Quod autem dictum fuit minorem eſſe em quàm EM, ſic oſtendetur. Sint puncta quibus rectæ DM, dm axes interſecant ad H, h. Facilè itaque ex ſuperiùs expoſitis intelligitur, tam angulos NDP, ndp, quàm HDP, hdp, eſſe æquales: cùmque minor ſit dp quàm DP, erit & ph minor quàm PH. Eademque proportione hn minor quàm HN. Sed ne eſt æqualis NE, ergo he minor quàm HE. Et quia anguli æquales ehm, EHM erit em minor quàm EM; quod oſtendendum ſupererat.

Cùm autem magis diſtincta viſio breviori hoc miroſcopio obtingat quàm longiori, ſitque claritas in utroque eadem, ſequitur, aperturam lentis pd aliquantum augeri poſſe, donec aberrationis angulus rms fiat æqualis RMS, atque ita cæteris paribus, clarius fieri brevius microſcopium.

Eſt ergo progreſſus claritatis hic infinitus, quippe quæ eò magis augetur quò acutior ponetur lenticula pd.

Neque verò obſtabit latitudo ad pupillam ſuperiùs explicata, ſed contra hæc quoque in brevioribus augebitur. Primùm enim poſitis, ut ante, aperturis proportionalibus ad foci diſtantias, productiſque rectis DN, dn, donec lentibus EZ, ez occurrant in punctis I, i, erunt EI, ei, latitudines ad pupillam dimidiæ, quia a punctis I, i radii ad pupillam paralleli pergunt per BD, DI & bd, di, advenientes, quas quidem EI, ei æquales eſſe conſtat, quia æquales ſunt foci diſtantiæ NE, ne, itemque æquales anguli ENI, eni; quia nempe ipſis oppoſiti DNP, dnp ſunt æquales. Quòd ſi jam igitur latior fiat apertura pd, apparet & ei majorem fieri quàm EI.

PROPOSITIO LXII.

His explicatis inquiremus jam porro. *Quomodo ſervata eadem claritate & diſtinctione, itemque latitudine ad pupillam, quæ eſt in microſcopio dato; nec non ratione* BP *ad* PN, *breviora fieri poſſint microſcopia, quæque ſimul res viſas magis amplificent?* Tab. XIX. Fig. 3.

QUa in re aberrationes, quæ ex diſſipatione radii, quæque ex figura ſphærica oriuntur, ſeorſim adhibebimus, & priùs illam, quæ ex diſſipatione.

Ponantur bina rurſus microſcopia, atque omnia eadem quæ propoſ. præcedenti, niſi quòd incerta ſit in minori, ratio pb ad ſemiaperturam pd; itemque incerta lentis ocularis foci diſtantia ne. Cætera verò omnia eodem modo conſtruantur. Porro in majori microſcopio diſtantia PB ſit $\propto b$, quâ nempe lenticula P abeſt a viſibili PN $\propto c$; NE $\propto d$. Semiaperturæ latitudo PD $\propto a$. BX longitudo rei viſæ $\propto h$. NK $\propto n$. Ponamus autem diſtantias punctorum conjugatorum PN ad PB, eſſe in ratione majori, quàm 6 vel 7 ad 1, & foci diſtantiam EN majorem eſſe foci diſtantiâ PO, quemadmodum hæc in hujusmodi microſcopiis rectè ſtatui ſolent. At in minori microſcopio aſſumatur diſtantia pb $\propto f$, ſemiapertura quæſita pd $\propto x$. Erit autem pn $\propto \frac{cf}{b}$, quia proportionales ponimus BP, PN; bp, pn. Quòd ſi fuiſſet ut BP ad PD, ita bp ad pd, apparet futuram pd $\propto \frac{fa}{b}$, & angulum aberrationis bdq, radii ex n venientis in lentem p, æqualem futurum angulo aberrationis BDQ radii ex N venientis in lentem P: Quia ſicut prop. præcedenti, ita hic quoque ut NP ad np, ita PB ad pb & ita quoque foci diſtantia PO ad po. Nunc verò, quia ſemiaperturam pd pono $\propto x$, non autem $\propto \frac{fa}{b}$, erit ut $\frac{fa}{b}$ ad x ita

angulus BDQ ad angulum bdq. Semper enim, ex lege aberrationis quam hic conſideramus, bq ad pd eandem rationem ſervat, ac proinde quoque cenſetur angulus bdq proportionaliter creſcere aut minui, cum apertura pd. Rurſus, ſi æquales eſſent anguli NDK, ndk, cenſeretur eſſe NK ad nk ut PN ad pn. Nunc verò ratio NK ad nk componi cenſebitur ex rationibus PN ad pn, & ea quæ anguli NDK ad ndk, hoc eſt, ex rationibus PB ad pb, ſeu b ad f, & anguli BDQ ad bdq, quam diximus eſſe eandem, quæ $\frac{fa}{b}$ ad x; ac proinde ratio NK ad nk erit quæ rectanguli fa ad rectang. fx, ſeu quæ a ad x. Cùmque NK ſit 2|2 n, erit nk 2|2 $\frac{nx}{a}$.

Jam quò aberrationis angulus utrobique intra oculum æqualis fiat, deberent eſſe æquales anguli KMG, kmg; ut ex ſuperioribus intelligi poteſt. Sed pro his ponemus æquales eſſe debere angulos KMN, kmn, neglectis acceſſionibus angulorum NMG, nmg; quia minimi ſunt illorum reſpectu, ut apparebit in deſcriptione & calculo ſequenti microſcopii noſtri. Sicut igitur NK ad NM ſeu NE, hoc eſt, ſicut n ad d, ita cenſebitur eſſe nk, hoc eſt $\frac{nx}{a}$, ad nm ſeu ne, quæ itaque ne 2|2 $\frac{dx}{a}$.

Jam porro quia eadem longitudo lineolæ BX, bx in dato quidem microſcopio ſpectatur angulo EVZ, in altero autem percipitur angulo evz, debet eſſe ut angulus EVZ ad evz, ita PBD ad pbd; ſic enim lux hauſta utroque microſcopio erit ut apparens magnitudo; ac proinde eadem utrique claritas.

Itaque permutando, etiam erit angulus EVZ ad PBD, ut evz ad pbd; anguli autem EVZ ad PBD ratio componitur ex rationibus EVZ ad EPZ, ſive BPX, & BPX ad PBD; quæ cenſentur hic eædem ac PE ad EV, ſive (ob proportionales PN, PE, PV) PN ad NE, & BX ad PD, hoc eſt, eædem quæ c ad d, & b ad a; ac proinde

de erit angulus EVZ ad PBD, ut ch ad da. Quare & angulus evz ad pbd hanc eandem habebit rationem. Atqui ratio anguli evz ad pbd, componitur ex rationibus ang. evz ad epz, ſive bpx, & bpx ad pbd; quæ cenſentur hic eædem ac pe, ad eu, ſive pn ad ne, & bx ad pd, hoc eſt, eædem quæ $\frac{cf}{b}$ ad $\frac{dx}{a}$, & b ad x, ac proinde ratio compoſita ex $\frac{cf}{b}$ ad $\frac{dx}{a}$ & b ad x, hoc eſt, ratio $\frac{cfb}{b}$ ad $\frac{dxx}{a}$, erit eadem quæ ch ad da. Unde fit $xx = \frac{aaf}{b}$; & $x = a\sqrt{\frac{f}{b}}$.

Invenitur itaque hîc, ſicut in Teleſcopiis, ut ſi maneat eadem claritas, eademque aberratio ex diſſipatione, prodeant aperturæ lentium quæ rei viſæ obvertuntur, in ſubduplicata ratione foci diſtantiarum, nam ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{f}$, ita hîc aperturæ ſemidiameter a ad x, ſunt autem b & f foci diſtantiæ PO & po.

Porro quoniam, ſicut magnitudines apparentes in utroque microſcopio, hoc eſt, ſicut angulus ZVE ad zve, ita diximus eſſe angulum DBP ad dbp, ſequitur, ſi multiplicatio duplo major poſtuletur in microſcopio ex lentibus e & p compoſito quàm in altero, debere angulum dbp duplo majorem eſſe quàm DBP, ut eadem in utroque ſervetur claritas. Ac proinde cùm BP ſit ad PD, ut b ad a, fore bp ad pd, hoc eſt f ad $a\sqrt{\frac{f}{b}}$ ut b ad $2a$. Unde fit $f = \frac{1}{4}b$, atque hinc x, ſive $\sqrt{\frac{aaf}{b}} = \frac{1}{2}a$. Et foci diſtantia ne quæ erat $\frac{dx}{a} = \frac{1}{2}d$.

Sic poſito microſcopio quale eſt noſtrum, in quo lenticulæ foci diſtantia PO eſt $\frac{7}{10}$ partium, qualium pollex eſt 1, lentis ocularis foci diſtantia EN $= 2$, diſtantia NP $= 7$; ac proinde diſtantia rei viſæ PB $= \frac{7}{9}$ ex propoſ. xx, quia nempe ad lentem P, conjugata ſunt puncta N & B. Item EV $= \frac{18}{7}$, diſtantia nempe oculi a lente E, quia ad eam conjugata ſunt puncta P & V. Item ſemidia-

meter aperturæ PD 2|2 $\frac{1}{20}$. His inquam poſitis, fiet hinc aliud duplo magis res viſas amplians microſcopium ſervata eadem claritate ac diſtinctione, in quo po erit $\frac{7}{40}$; en 2|2 1: diſtantia np 2|2 $\frac{7}{4}$: pb 2|2 $\frac{7}{36}$: ev 2|2 $\frac{11}{7}$, pd 2|2 $\frac{1}{40}$, cujus itaque longitudo tota vb circiter $4\frac{1}{2}$ pollicum, cùm noſtri longitudo V B ſit circirer $12\frac{1}{3}$ poll. eòque fere triplo major.

Eſt autem in noſtro amplificatio ratione diametri, ea quæ 36 ad 1, ut nempe ſecundùm ea, quæ propoſ. LX. diximus, tantò auctior appareat rei viſæ latitudo, quàm ſi ab octo pollicum diſtantia nudo oculo ſpectaretur; quoniam, ut ibi oſtenſum fuit, proportio hæc componitur ex rationibus PN ad NE, & ea quæ longitudinis 8 poll. ad PB, hoc eſt, ex rationibus 7 ad 2, & 8 ad $\frac{7}{9}$, quæ efficiunt rationem 36 ad 1.

Latitudo ad pupillam, de qua in ſuperioribus, in utroque microſcopio eadem eſſe probatur. Quia cùm in majore ſit, ut NP 2|2 c ad PD 2|2 a, ita NE 2|2 d ad EI, erit EI latitudo ad pupillam 2|2 $\frac{ad}{c}$. Et in minore ſimiliter, quia ut np, hoc eſt $\frac{cf}{b}$, ad pd, hoc eſt $a\sqrt{\frac{f}{b}}$, ita ne 2|2 $d\sqrt{\frac{f}{b}}$, ad ei, invenitur & hæc 2|2 $\frac{ad}{c}$.

Hæc itaque ſic ſe habebunt ſi tantùm aberrationis ejus quæ ex diſſipatione ratio ineunda ſit, eritque progreſſio velut infinita ad majores microſcopiorum effectus obtinendos, quoniam poni poterat f ad $a\sqrt{\frac{f}{b}}$ ut b ad aliam quamlibet. Sed verò examinandum eſt, an non altera aberratio, quæ ex figura oboritur, aliquid turbare poſſit. Quem in finem oportet, ut utriusque aberrationis angulum in noſtro illo, quod diximus microſcopio, ubi neutram adhuc nocere ſcimus, primùm calculo inveſtigemus.

Præ-

Præmittimus verò Lemma hujuſmodi.

Sit lentis convexæ PD *axis* NPB, *focus in* O, *radius axi parallelus* SD, *qui itaque ex refractione diſſipatus mittit radium rubrum in* DO, *ſed violaceum extremum ponamus convenire cum axe in* R. *Quòd ſi jam a puncto in axe* N, *feratur in lentem eandem radius* ND, *qui ex refractione diſſipatus mittat radium rubrum in* B, *violaceum extremum in* F. *Dico angulum* BDF *æqualem cenſeri poſſe angulo* ODR, *tantòque propius quantò inclinatio ſuperficierum lentis in* D *erit minore angulo, quantòque minus diſtabunt puncta* B, O. Tab. XIX. Fig. 4.

Cùm enim radius ruber, qui eſt incidenti radio SD, eat in DO; ruber verò qui in radio ND eat in DB; erit, ex propoſ. LV., angulus BDO proximè æqualis SDN. Similiterque cùm radius violaceus qui inerat in SD abeat in SH; itemque violaceus qui in ND, abeat in DF; cenſebitur ex eadem prop. LV. ang. FDH æqualis SDN; Itaque æquales inter ſe cenſentur & BDO, FDH, & ablato communi FDO, erunt ſimiliter æquales BDF, ODH, ac tantò propius quantò & angulus inclinationis ſuperficierum lentis in D erit minoris anguli, & rectiores radii SD, ND in ſuperficies illas incident, radiique ipſi minorem intercipient ang. SDN, ut ex iis intelligitur quæ ad prop. LV. ſupra dicta fuerunt. Patet autem tantò minorem eſſe SDN, quantò punctum B minus diſtat ab O, tantò enim major PN, quia proportionales ſunt BO, BP, BN ex prop. XX.

Propoſitio LXIII.

Angulum aberrationis ex diſſipatione in dato microſcopio, & quantus in Teleſcopiis & Microſcopiis nocere non poſſit, per calculum inquirere.

Tab. XIX. Fig. 5.

Jam calculum, quem diximus, ſic proſequemur. Erat lentis P, cujus craſſitudinem pro nulla habemus, foci diſtantia PO 2|2 $\frac{7}{20}$ poll. PD verò $\frac{1}{20}$ jungatur DO. Conſtat jam, ſi radius axi parallelus deſuper in D incidat, eum ſpargi debere angulo ODβ, qui ſit $\frac{1}{70}$ anguli DOP, uti diximus cùm radii diſſipationem exponeremus. Sit Oβ axi perpendicularis, quem ſecet Dβ in δ. Igitur Oβ cenſebitur 2|2 $\frac{1}{50}$ PD, ſed PD erat $\frac{1}{20}$ poll. Ergo Oβ 2|2 $\frac{1}{1000}$, & OD ſeu OP, quæ erat $\frac{7}{20}$, erit ad Oβ, ut 700 ad 1. Sed per lemma præmiſſum, radius incidens ND diſſiparetur angulo, qui eſſet æqualis ODβ, isque angulus eſſet BDQ, quandoquidem ND ponitur mittere radium per DB. Itaque ang. BDQ 2|2 ODβ. Quia verò viciſſim radius incidens BD diſſipatur angulo NDK, æquali BDQ, ex cauſa in ſuperioribus explicata, hoc eſt, angulo ODβ; erit & DN, ſeu PN ad NK, ut DO, ſeu PO ad Oβ, hoc eſt, ut 700 ad 1. Sed EN eſt ad NP ut 2 ad 7, ſive ut 200 ad 700. Ergo EN, ſeu MK ad NK, ut 200 ad 1, hoc eſt, ut radius tab. 100000 ad 500 tangentem 17′: 12″; ac proinde angulus aberrationis hujus NMK erit in noſtro microſcopio proximè 17′: 12″.

Idemque erit in breviori illo pollicum 4½, & in omnibus deinceps diminutis, quia hæc conditio aberrationis æqualis in inveſtigatione poſita fuit. Quòd ſi angulo NMK addamus ang. NMG, quem ibi ob parvitatem negleximus, fiet hic ang. aberrationis 17′: 42″ circiter.

Sed in Teleſcopiis, ſi quæramus quantus aberrationis hujus angulus ferri poſſit, inveniemus in nocturnis quidem

$31'\frac{1}{3}$ circiter, in diurnis verò dimidium, ſive $15'\frac{2}{3}$, quod ab illis $17' : 42''$ non multum diſcrepat. Etenim in Figura propoſ. LVI. poſita lentis AC foci diſtantia CF pedum 30, diximus CA eſſe $\frac{3}{2}$ poll. Unde FQ 2|2 $\frac{1}{50}$ CA, hoc eſt, $\frac{3}{100}$ poll. Sed QD, ſeu foci diſtantia FP tunc erat $3\frac{3}{10}$ poll. Ergo QD ad QF ut $3\frac{3}{10}$ ad $\frac{3}{100}$, hoc eſt, ut 110 ad 1, hoc eſt, ut ſemidiameter circuli 100000 ad 909 tangentem anguli $31' : 20$, qui eſt proximè angulus aberrationis QDF, quantum eſſe diximus. Tab XVIII. Fig. 1.

Ex his intelligitur, cur nec in noſtro Microſcopio, neque in alio quamlibet breviori eòque magis amplificante, quod ſecundùm inventam regulam ex noſtro ordinatum fuerit, hæc aberratio ex radii diſſipatione nocitura ſit. Nunc verò de aberratione, quæ ex figura lentium ſphærica oritur, examen inſtituamus.

Ubi rurſus lemma præmittendum eſt hujusmodi.

Sit lentis convexæ PD *axis* NPB. *Focus in* O. *Radius axi parallelus* SD, *qui refractus eat per* DH, *faciens aberrationem* OH; *a puncto autem in axe* N, *feratur ad lentem eandem radius* ND, *qui refractus conveniat cum axe in* F, *ſitque* B *punctum conjugatum ipſi* N, *adeoque radii* ND *aberratio* FB. *Dico* HO *ad* FB, *fore proximè ut quadratum* PO *ad quadratum* PB, *tantòque magis quantò diſtantia* NP *ad* PO *comparata major erit. Angulos etiam aberrationis* HDO, FDB *eſſe æquales.* Tab. XIX. Fig. 4.

SUmatur enim PV in axe æqualis PO, ſitque HL axi perpendicularis, & PO ſive PV ſit 2|2 c, PD 2|2 a; NP 2|2 d, HO 2|2 n. Jam, quia proportionales ſunt NV, NP; PO, PB, ex prop. XX., erit PB 2|2 $\frac{dc}{d-c}$. Quia verò angulus LDH æqualis cenſetur SDN ex propoſ. LV., hoc eſt, angulo DNP, erit proximè ut NP 2|2 d, ad PD 2|2 a,

ita

ita DL quæ cenſetur æqualis PH, hoc eſt, $c-n$, ad LH, quæ erit $\frac{ac-an}{d}$. Et quia DP ad LH, ut PF ad FH, erit DP minus LH, hoc eſt $\frac{da-ac+an}{d}$ ad DP $= a$, ut PH $= c-n$ ad PF, quæ erit $\frac{dc-dn}{d-c+n}$, quæ ſubtracta a PB $= \frac{dc}{d-c}$, fit FB $= \frac{ddn}{dd-2dc+cc+dn-cn}$ quæ ad HO $= n$, ut dd ad $dd-2dc+cc+dn-cn$. Hæc autem ratio eadem cenſeri poteſt, quæ dd ad $dd-2dc+cc$, quia quantitas n minima eſt cæterarum reſpectu. Sicut autem dd ad $dd-2dc+cc$, hoc eſt, ut quadratum NP ad quadratum NV, ita eſt quadratum PB ad quadratum PO; quia diximus eſſe ut NV, ad NP, ita PO, ad PB; Ergo erit FB ad HO proximè, ut quadratum PB ad quadratum PO, ac tantò quidem magis quantò angulus SDN minor erit, ut patet ex iis quæ ad propoſ. LV. annotavimus; hoc eſt, quantò major ratio NP ad PO. Itaque patet propoſitum.

Hinc verò ſequitur, ductis DO, DB, angulos æquales fore HDO, FDB. Ponatur enim DO ſecare HL in I, & FE axi perpendicularem occurrere rectæ DB in E. Quia ergo ratio BF ad OH componitur ex rationibus BF ad FE, & FE ad HI, & HI ad HO; hoc eſt, ex rationibus BP ad PD, & FE ad HI, & PD ad PO; hoc eſt, ex rationibus FE ad HI, & BP ad PO. Ratio autem eadem BF ad OH eſt ea quæ quadrati BP ad quadratum PO, ex ante demonſtratis; neceſſe eſt rationem FE ad HI eandem eſſe, quæ BP ad PO, ſive quæ FP ad PH, quia FB & HO ſunt minimæ, ſive quæ FD ad HD. Unde angulus FDE cenſetur æqualis HDI propter parvitatem angulorum DFP, DHP.

PRO-

Propositio LXIV.

Angulum aberrationis, ex figura, eodem modo ut in præcedenti propoſitione, per calculum inveſtigare.

Hinc ad calculum accedimus, in quo jam craſſitudo lenticulæ P conſideranda eſt, quæ ſit TP. Habet autem lenticula hæc in noſtro Microſcopio ſuperficiem alteram planam, quæ deorſum converſa eſt. Cùmque foci diſtantia PO ſit $\frac{7}{10}$ pollicis, eademque æqualis cenſeri poſſit diametro convexitatis ſuperficiei TD, erit ut PO, ſive $\frac{7}{10}$ ad PD 2|2 $\frac{1}{20}$ ita hæc ad TP, quæ fiet $\frac{1}{280}$. Hujus verò $\frac{7}{6}$ æquantur aberrationi Oδ, quam facit radius axi parallelus in D incidens, quia lenticulæ plana ſuperficies in partem alteram obverſa eſt. Ergo Oδ 2|2 $\frac{7}{1680}$ ſive $\frac{1}{240}$. Sicut autem δP, ſeu OP ad PD, hoc eſt, ſicut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{1}{20}$, ſive ut 14 ad 1, ita eſt δO ad Oβ. Ergo fit Oβ 2|2 $\frac{1}{3360}$; & DO ſeu PO ad Oβ, ut $\frac{7}{10}$ ad $\frac{1}{3360}$, ſive ut 2352 ad 1. Sed per Lemma præcedens radius incidens ND faceret angulum aberrationis BDQ æqualem ODβ: ac proinde viciſſim radius BD faciet angulum aberrationis NDK æqualem BDQ, ſeu ODβ. Ergo, ut DO ſeu PO, ad Oβ, hoc eſt, ut 2352 ad 1, ita erit DN, ſeu PN ad NK. Sed ut 2 ad 7, ſive ut 672 ad 2352, ita eſt EN ad NP. Ergo ex æquo EN ad NK ſeu MK ad NK, ut 672 ad 1, hoc eſt, ut in Tabulis ſemidiameter 100000 ad 149, tangentem anguli $5'$: $8''$, qui eſt angulus NMK. Tab. XIX. Fig. 5.

Hic igitur in microſcopio noſtro eſt angulus aberrationis ex figura. Quo majorem ferri poſſe abſque viſionis incommodo inde apparet, quòd inverſâ lenticulâ PD, ut pars convexa deorſum ſpectet, quadruplo ferè major ſit iſte aberrationis angulus; quia tunc aberratio radii qui parallelus axi incideret in D, æquat $\frac{9}{2}$ craſſitudinis PT, ex propoſ. xxvii. quæ aberratio hic erat tantùm $\frac{7}{6}$ PT, hoc

eſt, ferè pars quarta tantùm iſtius. Unde & angulus aberrationis N M K ferè quadruplus tunc invenitur ejus, qui nunc inventus eſt 5′. Atqui, ſic inverſâ lenticulâ, vix percipitur aliquid diſtinctæ viſioni decedere. Itaque 20 circiter ſcrupulorum primorum ferri poteſt angulus iſtius aberrationis; accedente licet angulo aberrationis, quæ ex diſſipatione, qui erat ferè 18′. Semper enim hanc aberrationem alteri ſuperaddi facilè intelligi poteſt.

Quòd ſi in breviori illo $4\frac{1}{2}$ pollicum microſcopio, quæramus eodem modo angulum aberrationis quæ ex figura, inveniemus eum quoque 20′ circiter; qui proinde vix quoque nocere poterit; ut proinde eximius futurus ſit ejusmodi perſpicilli effectus. Si verò breviora etiam, ac magis amplificantia moliamur ex præſcripto Regulæ ſuperiùs inventæ; creſcet ſemper iſte aberrationis angulus; adeòque hæc cauſa impedit quò minus, Regulam iſtam ſequentes, infinito progreſſu microſcopiorum virtutem augere poſſimus. Sed, quod mirum fortaſſe videbitur, aliam ſuppetere oſtendemus Regulam; per quam ejusmodi progreſſus concedatur. Præmittimus autem Lemma ejusmodi.

Lemma.

Si in lentem convexam radii incidant axi paralleli, vel a puncto in axe ultra focum diſtante manantes, efficient ii refracti angulos aberrationis ex Figura, qui proximè triplicatam rationem habeant ejus, quam diſtantiæ punctorum incidentiæ ab axe.

TAB. XIX. Fig. 6. PRimò verò de parallelis oſtendemus.

Sit lens P S, axis P B, focus G, radiorum nempe axi parallelorum ab eoque minimo diſtantium. Lentis craſſitudo pro nulla habeatur, quia tota P S valde exigua intelligitur ad P B comparata. Porro radius parallelus, qui in D punctum incidit, feratur in D H, faciens aberrationem G H; qui verò in S incidit parallelus feratur in S I, faciens

faciens aberrationem GI. Junctis igitur DG, SG, erunt anguli aberrationis quos hic intelligimus GSI, GDH. Quos dico proximè triplicatam rationem habere ejus quæ SP ad DP.

Sit enim GC ad axem perpendicularis, cui occurrant productæ DH, SI in K & C. Cenſentur igitur anguli GSC, KDG eam habere rationem quæ CG ad GK, cùm DP, SP ſint minimæ reſpectu PG. Eſt autem ratio CG ad KG eadem compoſitæ ex rationibus CG ad GI, & GI ad GH & GH ad GK; quarum prima ratio CG ad GI, eadem eſt quæ SP ad PI, vel quæ SP ad PG, quia IG minima eſt reſpectu PG. Item ratio altera GI ad GH, eſt eadem quæ quadrati PS ad qu. PD, per prop. xxx. Et tertia GH ad GK eadem quæ HP ad PD, hoc eſt, quæ GP ad PD, quia HG eſt minima reſpectu GP. Itaque ratio CG ad KG, componetur ex rationibus SP ad PG, & PG ad PD, & quadrati PS ad quadratum PD. Sed harum priores duæ efficiunt rationem SP ad PD; Ergo ex tribus compoſita erit eadem quæ cubi SP ad cubum PD. Itaque oſtenſum eſt rationem CG ad KG, ſive anguli aberrationis CSG ad KDG, proximè eſſe eam quæ cubi SP ad cubum PD, hoc eſt, triplicatam rationis SP ad PD.

Ponamus jam radios incidentes in D & S, venire a puncto cui conjugatum ſit punctum B, atque eſſe radii in D cadentis aberrationem BF; ejus verò qui in S cadit, aberrationem BL. Cùm igitur ex lemmate ultimo ſit, ut quadratum PG ad quadratum PB, ita GH ad BF; atque ita quoque IG ad LB; erit permutando & convertendo, ut IG ad GH, ita LB ad BF. Sed IG erat ad GH ut quadratum SP ad quadratum DP, ergo & LB ad BF ut quadratum SP ad quadratum DP. Unde jam, ſicut ante de angulis GSI, GDH, oſtendetur eadem ratione angulos BSL, BDF eſſe in ratione triplicata diſtantiarum SP, PD. Hi enim anguli, ſive BST, BDQ cenſentur eſſe inter ſe ut BT

ad BQ, quia DP, SP ſunt minimæ reſpectu BP. Eſt autem ratio BT ad BQ eadem compoſitæ ex rationibus TB ad BL, & BL ad BF, & BF ad BQ. Quarum prima TB ad BL, eſt eadem quæ SP ad PL, ſeu quæ SP ad PB, quia LB eſt minima reſpectu PB. Item ratio altera BL ad BF eſt eadem quæ quadrati PS ad quadratum PD, ut paulò ante eſt oſtenſum. Et tertia BF ad BQ, eſt eadem quæ FP ad PD, hoc eſt, quæ BP ad PD, quia FB eſt minima reſpectu BP. Itaque ratio BT ad BQ componetur ex rationibus SP ad PB, & PB ad PD, & quadrati PS ad quadratum PD, quarum duæ priores cùm efficiant rationem SP ad PD, erit ratio BT ad BQ, hoc eſt anguli BSL ad BDF, ea quæ cubi PS ad cubum PD, quod ſupererat demonſtrandum.

Propositio LXV.

Quomodo breviora fieri poſſint microſcopia & magis amplificantia, in quibus ſervetur eadem claritas & diſtinctio, nec tamen priori incommodo a majori aberratione ex figura fiant obnoxia.

Tab. XIX. Fig 3. POnantur bina rurſus microſcopia, atque omnia eadem quæ propoſitione LXI, niſi quòd incerta ſit in minori ratio pb ad ſemiaperturam pd; itemque incerta lentis ocularis foci diſtantia ne. Cætera verò omnia eodem modo conſtruantur. Porro in majori microſcopio diſtantia PB ſit 2|2 *b*, quâ nempe lenticula P abeſt a viſibili. PN 2|2 *c*; NE 2|2 *d*. Semiaperturæ latitudo PD 2|2 *a*. BX longitudo rei viſæ 2|2 *h*. NK 2|2 *n*. Ponamus autem diſtantias punctorum conjugatorum PN ad PB, eſſe in ratione majori, quam 6 vel 7 ad 1, & foci diſtantiam EN majorem eſſe foci diſtantiâ PO, quemadmodum hæc in hujuſmodi microſcopiis rectè ſtatui ſolent. At in minori microſcopio aſſumatur diſtantia pb 2|2 *f*, ſemiapertura quæſita pd 2|2 *x*.

Erit

Erit autem pn $= \frac{cf}{b}$, quia proportionales ponimus BP, PN, bp, pn. Quòd ſi fuiſſet, ut BP ad PD ita pb ad pd, apparet futuram pd $= \frac{fa}{b}$, & angulum aberrationis bdq, radii ex n venientis in lentem P, æqualem futurum angulo aberrationis BDQ radii ex N venientis in lentem P. Quia, ſicut prop. præcedenti, ita hic quoque ut NP ad np, ita PB ad pb, & ita quoque foci diſtantia PO ad po. Nunc verò quia ſemiaperturam pd pono $= x$, non autem $= \frac{fa}{b}$, erit ex lemmate præmiſſo ut cubus $\frac{fa}{b}$, hoc eſt, ut $\frac{f^3a^3}{b^3}$ ad x^3, ita angulus BDQ ad angulum bdq.

Rurſus, ſi æquales eſſent anguli NDK, ndk, cenſeretur eſſe NK ad nk, ut PN ad pn. Nunc verò ratio NK ad nk componi cenſebitur ex rationibus PN ad pn, & ea quæ anguli NDK ad ndk; hoc eſt, ex rationibus PB ad pb ſeu b ad f, & anguli BDQ ad bdq; quam diximus eſſe eandem quæ $\frac{f^3a^3}{b^3}$ ad x^3, ſive quæ f^3a^3 ad b^3x^3, ac proinde erit NK ad nk ut bf^3a^3 ad fb^3x^3, hoc eſt, ut ffa^3 ad bbx^3. Cùmque NK ſit $= n$, erit nk $= \frac{nbbx^3}{ffa^3}$. Jam quò aberrationis angulus utrobique intra oculum æqualis fiat, deberent eſſe æquales anguli KMG, kmg; ſed pro his ponemus KMN, kmn, neglectis, ut ſupra, acceſſionibus angulorum NMG, nmg, quia exigui prorſus ſunt illorum reſpectu, ac magis etiam quàm in diſquiſitione præcedenti. Sicut igitur NK ad NM, ſeu NE, hoc eſt, ſicut n ad d, ita cenſebitur eſſe nk ad nm ſeu ne, hoc eſt, $\frac{nbbx^3}{ffa^3}$ ad ne, quæ itaque erit $= \frac{dbbx^3}{ffa^3}$.

Jam porro quia eadem longitudo lineolæ BX, bx, in dato quidem microſcopio ſpectatur angulo EVZ, in altero autem angulo evz; debet eſſe ut angulus EVZ ad evz, ita PBD ad pbd. Sic enim lux hauſta utroque microſco-

pio erit ut apparens magnitudo, ac proinde eadem utrique claritas. Ergo & permutando, angulus EVZ ad PBD, ut evz ad pbd. Ratio autem anguli EVZ ad PBD componitur ex rationibus anguli EVZ ad EPZ ſeu BPX, & BPX ad PBD; hoc eſt, ex rationibus PE ad EV, ſeu PN ad NE, & BX ad PD; hoc eſt, ex rationibus c ad d, & h ad a, ac proinde eſt ea quæ ch ad da. Ergo & ratio anguli evz ad pbd debet eſſe ea quæ ch ad da. Hæc autem ratio anguli evz ad pbd componitur ex rationibus anguli evz ad epz ſeu bpx, & bpx ad pbd; hoc eſt, ex rationibus pe ad ev, ſeu pn ad ne, & bx ad pd; hoc eſt, ex rationibus $\frac{cf}{b}$ ad $\frac{dbbx^3}{ffa^3}$, & h ad x, ac proinde eſt ea quæ $\frac{hcf}{b}$ ad $\frac{dbbx^4}{ffa^3}$. Igitur eadem ratio ch ad da quæ $\frac{hcf}{b}$ ad $\frac{dbbx^4}{ffa^3}$. Unde fit $x^4 = \frac{f^3a^4}{b^3}$: & $x = \frac{a\sqrt[4]{f^3}}{\sqrt[4]{b^3}}$.

Quòd ſi jam velimus ut microſcopium inventum duplo magis amplificet res viſas quàm quòd erat datum, oportet, ob cauſam quam expoſuimus in præcedenti inquiſitione, ut angulus dbp duplo major ſit quàm DBP; cùmque BP ad PD ſit ut b ad a, debebit eſſe bp ad pd, hoc eſt, f ad $\frac{a\sqrt[4]{f^3}}{\sqrt[4]{b^3}}$ ut b ad $2a$. Unde fit $f = \frac{1}{16}b$, atque hinc x ſive $\frac{a\sqrt[4]{f^3}}{\sqrt[4]{b^3}} = \frac{1}{8}a$. Et foci diſtantia en, quæ erat $\frac{dbbx^3}{ffa^3} = \frac{1}{2}d$.

Secundùm quæ ex noſtro microſcopio, cujus menſuras in priori disquiſitione poſuimus, fiet aliud duplo magis amplificans ratione diametri (ſervata eadem claritate ac diſtinctione,) in quo po erit $\frac{7}{160}$ poll. en $= 1$, diſtantia np $= \frac{7}{16}$, pb $= \frac{7}{148}$, ev $= \frac{23}{7}$, ſemidiameter aperturæ pd $= \frac{1}{160}$, atque ita ulteriùs progredi licet ex hujus Regulæ præſcripto, ponendo lenticulæ foci diſtantiam po quamlibet exiguam, nec enim aberratio ex figura, nec obſcuritas unquam nocebunt, quippe ſemper eædem manentes. Neque etiam aberratio altera, quæ ex radii diſſipatione oritur, obſtabit, cùm continuè minuatur. Latitudo verò ad pupil-

pupillam eadem quæ in noſtro manebit; erat enim ibi iſta latitudo $EI \; 2|2 \; \frac{ad}{c}$, ut ſupra demonſtratum. Hic verò, quia ut np, hoc eſt, $\frac{cf}{b}$ ad pd, hoc eſt, $\frac{a\sqrt{\sqrt{f^3}}}{\sqrt{\sqrt{b^3}}}$, ita ne, hoc eſt, $\frac{d\sqrt{\sqrt{f}}}{\sqrt{\sqrt{b}}}$ ad ei, fit rurſus $ei \; 2|2 \; \frac{ad}{c}$.

Eſt igitur ex hac Regula progreſſio infinita in propagandis microſcopii viribus, ſi lenticulas quamlibet exiguas parari poſſe ponamus.

In hiſce verò disquiſitionibus eandem ſemper ſervari ſtatuimus rationem BP ad PN, quam nempe habent diſtantiæ punctorum mutuorum ab lente P. Poſſumus autem & absque eo regulas generales invenire, nonnihil à prioribus diverſas, atque eòdem tamen tendentes quas breviter perſcribemus, omiſſâ inveſtigandi ratione, ne minus diu hic obhæreamus. Nituntur autem iisdem, quæ jam expoſuimus, fundamentis.

Propositio LXVI.

Si microſcopium e duobus convexis e *&* p *compoſitum quæratur, quod datam habeat lentis ocularis* e *foci diſtantiam; itemque datam amplificationem, & in quo angulus aberrationis ex diſſipatione radii, ut & claritas ſit eadem quæ in alio dato microſcopio ex lentibus* E *&* P *compoſito; invenietur foci diſtantia lenticulæ inferioris* p, *ejusque poſitus & apertura hoc modo.*

SIt lentis ocularis e foci diſtantia en data æqualis *d* lineæ, poſtuletur verò ut magnitudo apparens ſit ad eam quæ ex certa diſtantia, putà 8 pollicum, ſpectaretur, (quæ diſtantia vocetur ω) ut ω ad q lineam datam. Angulus verò aberrationis, quem diximus eſſe nmk, requiratur æqualis angulo NMK, in altero dato microſcopio; quem definimus proportione lineæ KM ad KN, ſeu EN ad KN, Tab. XIX. Fig. 3.

quæ

quæ ſit ea quæ ω ad datam s, ut nempe eandem hanc habeat en ad nk. Claritas denique eadem quoque præſtanda ſit quæ in microſcopio dato, quod fiet ſi, poſita rei viſæ latitudine $bx = BX$, eadem ſit ratio anguli zve ad dbp, quæ anguli ZVE ad DBP, ut ex ſuperioribus intelligitur. Sit autem hæc ratio ea quæ ω ad g; quæ inde invenitur quòd compoſita ſit ex rationibus anguli ZVE ad ZPE, ſeu BPX, & BPX ad PBD; hoc eſt, ex rationibus PE ad EV, ſeu PN ad NE, (propter proportionales PN, PE, PV) & ratione BX ad PD. Porro BX dicatur h; lenticulæ verò quæſitæ foci diſtantia $po = y$: diſtantia rei viſæ $pb = x$. Eritque regula hujusmodi $y = \frac{50\, sqqdd}{gh \text{ in qu. } q+d}$. Cognitâ verò y invenietur & x quæ erit $\frac{qy+dy}{d}$. Semidiameter verò aperturæ pd erit $\frac{50\, dqs}{\omega q + \omega d}$; in quibus ſciendum eſt numerum 50 inde eſſe quod in hac aberratione, quæ ex diſſipatione eſt, ponitur ſemper $BQ = \frac{1}{50} PD$, ut in ſuperioribus dictum fuit; pn denique erit $= \frac{dy+qy}{q}$. Apparet autem, quia hic valor y etiam ſic exprimi poteſt,

$$y = \frac{50.\, sdd}{gh + \frac{2ghd}{q} + \frac{ghdd}{qq}},$$

quantò minor ponetur q, hoc eſt, quantò major ratio multiplicationis ω ad q, tantò majorem fore diviſorem quantitatis hujus, ac tantò minorem proinde longitudinem y, ſeu foci diſtantiam po. Atque ita, diminuenda lenticula p, poſſe quantumlibet augeri microſcopii virtutem, niſi quatenus altera aberratio obſtabit, quæ ex figura ſuperficiei ſphæricæ pendet, cui paulò poſt aliam regulam applicabimus.

Sed, ſi datam ponamus lenticulam p, non autem ocularem e, inveniemus non poſſe tunc augeri amplificationem niſi paulò tantùm. Si enim foci diſtantia data po vocetur r, cæteris eadem, quæ prius ſignificantibus, invenitur $xx = \frac{50\cdot qqrs}{gh}$; ubi apparet, quantò minor ponetur q,

hoc

hoc eſt, quò major ratio amplificationis ω ad q, eò minorem fieri x; atqui x ſeu pb, debet eſſe major quàm r ſeu po. Ergo ſi in hujusmodi microſcopio ponatur ab initio pb minor quàm dupla po, (ut omnino faciendum, & in noſtro ſuperiùs deſcripto eſt pb ad po tantùm ut 10 ad 9) non poterit q duplo minor quàm prius adſumi; hoc eſt, non poterit duplicari ampliatio, quia x fieret dimidia prioris, ac proinde minor quàm r.

Omnis igitur microſcopii hujusmodi perfectio in lenticulæ inferioris parvitate quærenda eſt; computando ex præſcripto regulæ modo traditæ, quoad aberratio ex figura non oberit; hoc eſt, quoad ejus angulus N M K infra 20′ conſiſtet. Sed ſi major ampliatio poſtuletur, oportet, ex dato microſcopio in quo angulus hic non erit major quàm 20′, invenire aliud ex regula, quæ eſt hujusmodi, $y = \frac{6d^4q^4f}{7gb^3,\ \text{in qu. qu.}\ \overline{q+d}}$, ubi rurſus erit $x = \frac{qy+dy}{d}$. pn $= \frac{dy+qy}{q}$, ſed pd fit hic $= \sqrt{c.\ \frac{6}{7}\frac{fqdy^2}{\omega q+\omega d}}$. Et ſciendum eſt inſuper, rationem anguli ZVE ad DBP in microſcopio dato eam nunc poni, quæ $\sqrt{c.\ \omega}$ ad $\sqrt{c.\ g}$. Atque hoc modo quouſque lubet diminui poteſt q, hoc eſt, augeri amplificatio, manente lente oculari eadem, nec non diſtincta viſione & claritate; Sed magis decreſcet lenticulæ foci diſtantia. Numerus autem $\frac{6}{7}$ quantitati huic præpoſitus inde oritur, quod lenticulam p planoconvexam ponimus, ſuperficie plana deorſum ſpectante; cujus aberratio ex figura pertinens ad radium extremum axi parallelum, eſt $\frac{7}{6}$ ſuæ craſſitudinis, ut ante hàc oſtenſum. Sic ſi utrimque æqualiter convexa lenticula p poneretur, eſſet numerus præfixus $\frac{3}{5}$, quia aberratio ejusmodi efficit $\frac{5}{3}$ ſuæ craſſitudinis.

Cæterum, ut utriuſque regulæ exemplum demus, ac primò prioris, ubi $y = \frac{50\ fqqdd}{gb\ \text{in qu.}\ \overline{q+d}}$, ſciendum eſt hinc incipiendum, ut lineæ f & g inveniantur, quantæ ſunt in microſcopio dato; ac ſit quidem $f = \frac{1}{25}$ poll. quia ibi ratio EN, ſeu MK ad NK, hoc eſt ω ad f, fuit inventa quæ 200 ad 1. Ponitur enim $\omega = 8$ poll., & ut 200 ad 1, ita 8 ad $\frac{1}{25}$; at g invenitur $= \frac{16}{7}$, quia ratio ω ad g dicta fuit componi ex ra-

 tioni-

tionibus P N ad N E, & B X ad P D; quæ compoſita redit ad ſolam rationem P N ad N E, ſive 7 ad 2, ſi B X, ſeu *h*, (quod licet) ponatur æqualis P D, quæ ibi erat $\frac{1}{20}$; nam ut 7 ad 2, ita eſt 8 ad $\frac{16}{7}$. Quæcunque verò ponatur *h* erit ſemper quantitas *gh* eadem in dato microſcopio. Quòd ſi jam *d* eamdem eſſe ponamus in eo quod quærimus, quæ erat in noſtro, nempe *d* 2|2 2; ſed rationem amplificationis ω ad *q* eam velimus eſſe quæ 72 ad 1, hoc eſt, duplo majorem quàm in noſtro, unde *q* fit 2|2 $\frac{1}{9}$; ex his jam ſecundùm regulam invenietur *y* 2|2 $\frac{70}{361}$; Et reliqua prout fuere in expoſitione regulæ definita. Quod ſi his iiſdem poſitis, ſtatuatur *d* 2|2 1 poll. invenietur *y* 2|2 $\frac{7}{40}$ & pd 2|2 $\frac{1}{40}$, prorſus ut in priori diſquiſitione, ubi ſervabatur ratio eadem B P ad P N; quod veritatem regulæ hujus comprobat.

In poſteriori regula, ubi *y* 2|2 $\frac{6d4q4ſ}{7gh3 \text{ in qu. qu. } \overline{d+q}}$ quæſitis prius *ſ* & *g* quantæ ſunt in dato microſcopio, habita ratione aberrationis ex figura, invenitur quidem *ſ* 2|2 $\frac{1}{84}$ poll. quia ibi ratio E N, ſeu M K ad N K, hoc eſt, ω ad *ſ*, fuit inventa quæ 672 ad 1; nam ut 672 ad 1 ita ω, ſeu 8 ad $\frac{1}{84}$. At *g* invenitur 2|2 $\frac{64}{343}$, quia ratio $\sqrt{c.\,\omega}$ ad $\sqrt{c.\,g}$ hoc eſt, ratio anguli Z V E ad P B D, dicta fuit componi ex rationibus P N ad N E, & B X ad P D, quæ compoſita redit, ut paulò ante, ad rationem ſolam P N ad N E, ſeu 7 ad 2. Ut autem 7 ad 2 ita $\sqrt{c.\,\omega}$, ſeu 2 ad $\frac{4}{7}$, quod ergo æquale $\sqrt{c.\,g}$, ideoque *g* 2|2 $\frac{64}{343}$. Quæcumque verò ponatur *h*, erit hic ſemper in microſcopio dato eadem quantitas gh^3. Quòd ſi jam *d* eandem eſſe velimus in microſcopio quæſito, ac in dato noſtro, nempe *d* 2|2 2 poll., rationem verò amplificationis ω ad *q* duplam noſtræ, hoc eſt, quæ 72 ad 1; erit *q* 2|2 $\frac{1}{9}$: Et ex his jam ſecundùm hanc regulam invenietur *y* proxime 2|2 $\frac{1}{19}$ & reliqua ut fuere in expoſitione regulæ definita. Quod ſi his iiſdem poſitis, ſtatuatur *d* 2|2 1 poll., invenietur *y* 2|2 $\frac{7}{160}$ & pd 2|2 $\frac{1}{160}$, prorſus ut in ſecunda ſuperiori diſquiſitione, ubi ſervabatur ratio B P ad P N; quod poſterioris hujuſce regulæ veritatem comprobat.

F I N I S.

TAB. XIX.

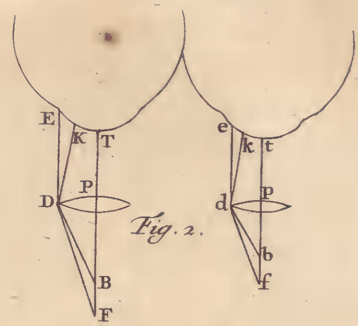


Fig. 2.

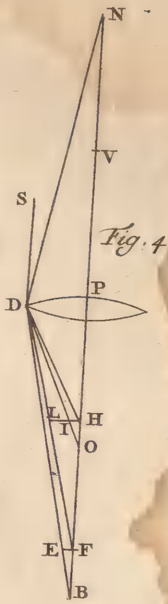


Fig. 4.

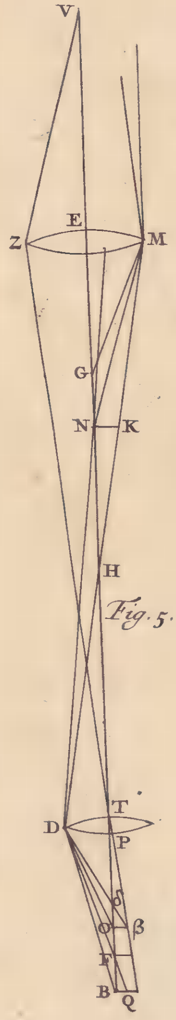


Fig. 5.

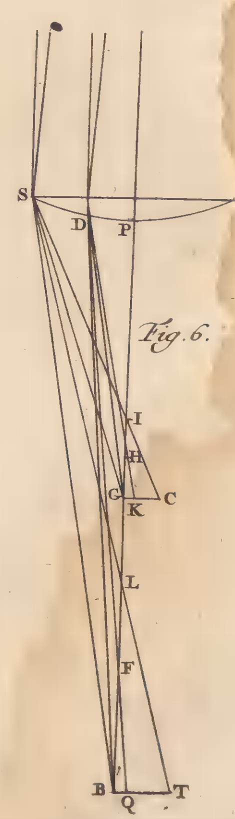


Fig. 6.

COMMENTARII
DE
FORMANDIS
POLIENDISQUE VITRIS
AD
TELESCOPIA.

COMMENTARII
DE
FORMANDIS
POLIENDISQUE VITRIS
AD
TELESCOPIA.

I.

De efficiundis modulis, & catinis politoribus.

PRIMÒ formetur modulus Cupreus, (ſatis denſus pro amplitudine catini efficiundi,) ducendo ſegmentum circuli quæſiti in laminâ cupreâ, ope bacilli utrinque aſcia lævigati, cujus longitudo ea, qua vitrum quæritur, & in cujus extremo aculeus infixus ſit ex ferro.

Vel ad formandos catinos amplos & longitudinis ingentis, hoc uti licet calculo.

Ponatur recta AE tangens arcus AB partis circuli iſtius ex quo catinus formandus eſt, cujus radius v. g. 36. ped. vel diameter 72. ped. fiant partes AE, EE ſingulæ unius pollicis paulò ultra dimidiam latitudinem Catini; ſitque ut 72. pedes ad 1. pollicem, ita hic ad minorem lineam EF, primam ſupputando ab A; hujus quadruplum dabit ſecundam lineam EF; noncuplum tertiam EF; ſi decies & ſexies ſumatur, dabit quartam EF, & ita porro ſecundùm quadratorum ſeriem: Ubi dein numeri harum par- TAB. I. Fig. 1.

 tium,

tium, quarum exilitas circini menſuram fugit, ſubducuntur ex EG, quæ ſit unius pollicis, habentur partes FG, quæ deſumtæ ex regulâ geometricâ in exiles partes diviſâ & applicatæ ipſi GG, per puncta FF demonſtrabunt arcus tramitem; quod idem ab alterâ parte ipſius AD faciundum erit. Ubi convexus hic modulus juxta circumferentiam limâ rite formatus eſt, ad eum alius concavus deſcribi & limâ excavari debet: dein ambo hi moduli ope ſmiridis mutuo ad invicem attritu probè aptandi & lævigandi ſunt; quem in finem conducet horum alterum tabulæ affigere immobilem.

Ad catinos fuſione formandos, ad modulum factum tornandus alius eſt ligneus, ut inſerviat formando cupro fuſo, ſi catini cavitas ſit notabilis. Quòd enim ſpectat ad catinos viginti, triginta, pluriumve pedum, ſufficit his ex aſſere plano diſcum facere, qui habeat magnitudinem & craſſitiem quæſitam. Moduli tamen neceſſarii ſunt ad tornandos catinos fuſos, ut infra dicetur.

Porro catini vix nimium craſſi ex ære ſumi poſſunt: verumtamen deprehendimus eum, cujus craſſities erat dimidii pollicis, diameter verò quattuordecim pollicum, pro vitris formandis, quorum diameter triginta ſex pedum, ſatis fuiſſe validum: dum affixus eſſet ſc. lapidi cylindrico alto pollicem ope cæmenti duri ex pice & cineribus, de quo poſtea pluribus.

Diameter autem Catini debet ferè æquari triplo diametri vitri poliundi; ſed de hiſce diametrorum menſuris poſtea plura dicam. Pro vitris minoris ſphæræ, majores quàm pro ratione diametrorum requiruntur catini, ut motui manus polientis ſatis ſpatii ſit in catino.

Tab. I. Fig. 2. Ut catinus jam fuſus ex ære Abaco tornionis applicetur, fiat diſcus æreus validus, diametro trium vel quattuor pollicum, cui adſit cochlea adaptata ad axim cupreum abaci. Diſcus hic ſtanni conſolidaturâ affigitur ad poſticum catini, qui hoc loco exactè limatus ſit quo planities examuſſim

ſim parallela reddatur circumferentiæ anteriori, adeò ut æquabiliter feratur ſupra abacum, vel ſaltem minimum divergat.

Denique ut catinis tornando figura detur quæſita, modulus cavus aſſeri plano committitur, qui dein clavi ope affigitur capiti ligneo, quod in abaco tornario opponitur plano catini, ita ut cavitas moduli averſa ſit a catino. Ad hunc modulum alter modulus convexus agitur affixus per clavos parvos (quorum capitula limâ complanata ſint, ne emineant) ad latus inferius aſſerculi, qui, præterquam quòd agatur ſupra ultimum hunc modulum, moveatur præterea ſupra duos aculeos, qui prominent ad hanc craſſitiem. TAB. I. Fig. 3.

Ad ipſum hunce aſſerculum, qui ſupra modulum cavum aſſurgere debet prope catinum tornandum, cuneus, quo utitur tornio, cochleâ ligneâ ad latera affigitur, ut uſu exigente removeri ab catino, vel ad eum admoveri queat: ejus acies in diametrum catini dirigenda. Utque ſciamus modulum cavum parallelum eſſe ſuperficiei cavæ catini, qui affixus eſt abaci tornatilis caudæ, dirigatur cunei acies extrema, ut attingat punctum quoddam ejus ſuperficiei quæ exteriora versùs tornionem ſpectat, tum moto cuneo unà cum aſſerculo ſuo ad alterum ejusdem diametri extremum æquè ab centro remotum circumrotetur catinus, ut abſolvat gyro ſuo ſemicirculum; attendendum tum eſt num cunei acies idem illud punctum primum attingat. Id ubi fit, rectè ſe habet. Sin minus, corrigi poteſt caput paululum malleo contundendo ut ſitum mutet. Optimum verò modulum cavum ipſo hoc artificio examinare quando ab unâ tantum parte adhuc affixus eſt, an debitum obtineat ſitum, aliter enim facilè eò redigi, tumque porro affigi poteſt. Eadem hæcce exploratio capiunda aliquoties inter tornandum, quod levi fit negotio: ſi enim modulus cavus in debito haud ponetur ſitu, catinus quodammodo in medio ad hoc illudve punctum cavus vel convexus

vexus redderetur. Sed & foramina modulorum, per quæ adiguntur clavi, laxa eſſe oportet, neque propinqua nimis margini polito horum, ne per adactos clavos figura modulorum immutetur, ære ſc., unde conſtant, magis reducto in uno loco, & eminente plus in altero.

Tam abacus tornionis, quàm diſcus rotans ita firmandi, ne inter tornandum tremant, ut evitentur inæqualitates in catinis. Catino per hoc artificium tornato in figuram, quantùm fieri poteſt exactam, ſeparatur inde cauda, impoſita hunc in finem prunis ardentibus, ut ſolidatura diſſolvatur. Sed quum labor ille tornandi, firmandi & iterum ſeparandi catinos moleſtus admodum ſit, ſciendum eſt, catinos planos, tum & eos, qui vitris majoris Sphæræ v. c. 120. aut plurium pedum inſerviunt, haberi poſſe ſine ullâ tornionis machinâ: ſcilicet fuſi ex ære lævigantur ad planitiem per molam Lapicidarum, quâ marmora expoliunt. Nam ut excavetur catinus tam parum, ac in his requiritur, opus modò eſt lapidibus & ſmiride id perficere, utendo primò lapide cujus latitudo æquatur dimidiæ latitudini catini, deinde verò eo, cujus latitudo ferè æqualis ipſius catini latitudini; & menſurando profunditatem, calculo prius determinatam, filo ferreo ſub regulâ marginum diametro applicatâ.

Ad catinos hoc modo ope ſmiridis lævigandos, poſtquam in molendinâ expoliri fuerunt, aut ad abacum tornionis tornati, prius affiguntur diſco rotundo ex lapide pollicem craſſo, & paululum minori quàm eſt catinus, medio cæmento duro ex pice & cineribus, tum calefaciendo prius catinum, quò firmius cohæreat. Huic diſco lapideo tres adhæreant pedioli, qui longitudine transverſi ſtraminis, ſive ariſtæ, emineant, quibusque inſiſtere queat. Diſcus verò hic lapideus porro maneat catino agglutinatus, poſtquam ille exactè formatus eſt, id namque neceſſarium ad immobilitatem requiſitam ad lævigationem. Etenim catinus aliter, licet tribus ſuſtentatus pediolis, proprio

prio pondere ſubſideret : quod experti ſumus per varias vitrorum adhæſiones ad catinum pro varia applicatione pediolorum, vel & remotione eorundem. Adeoque agglutinatio; & ſtabilis firmatio catini nequaquam omittenda, quum conditio ſit admodum neceſſaria.

Lapides dictos præparaturus electam ſmiridem contundat, & cribro inde ſeparet fragmenta piſum parvum æquantia; tum fiat fimbria ex chartâ ſatìs craſſâ, quæ fune margini catini circumligetur, ut latitudine pollicis aſſurgat ſupra catini ſuperficiem. Sit dein diſcus rotundus ex lapide paulò minor quàm catinus, & præparatâ copiâ requiſitâ picis fuſæ & cineribus permixtæ eâ copjâ, quâ hi pici permiſceri poſſunt, calefiat lapis, eique ope cochlearis aliquid picis fuſæ ſuperfunditur, dein pix ſupra totum catinum ſapone priùs oblitum, impoſitis tribus feſtucis ligneis ad eam altitudinem, ad quam pix requiritur, ſuperfunditur.

Tum lapis comprehenſus duabus quatuor anſarum lignearum, vel lapidearum potius, agglutinatarum priùs cæmento, vel ſuſpenſus de funiculo, qui normali ſectione per centrum ſub catino applicatur, imponitur pici fuſæ ſupra catinum, ut frigefiant ſimul, ut lapis de catino moveri, vel malleo ligneo ad latus leniter percuſſus ſeparari queat. Eo peracto, ſupra picem lapidi agglutinatam ſmiris præſcripta ſpargitur, eique firmiter impingitur, premendo leniter materiam ſpatulâ ferreâ planâ candefactâ utcunque, cujuſque craſſities æquat circiter $\frac{1}{5}$ pollicis, idque fiat per totum lapidem, cavendo tantùm ne profundiùs immergatur ſmiris nimio calore.

Poſtea lapis totus ad ignem leviter calefiat, ſicque imponitur catino, cujus hoc modo figuram cruſta ſmiridis accipit. Hoc lapide frigefacto, trito & agitato, ſine humido addito, politur catinus tam diu, donec omnes ſulci & circelli lævigatione ſublati ſunt, qui a tornatione adhuc ſupererant. Quoque major vis exerceatur, baculus longus

gus imponatur lapidi, parum inflexus & ſupernè aut firmatus, aut ope elateris preſſus, quem duo famuli moveant; major cinerum portio pici mixta facit, ut ſmiris diu aſpera maneat; aliter ſcilicet, dum cæmentum haud ſatis durum eſt, fragmenta ſmiridis calore tritus ſitum mutant, ſicque aguntur modo ſupra catinum, non autem inæqualitates deterunt, vel figuram imprimunt quæſitam: propterea cæmentum valde durum eſſe, & tantum cinerum continere debet, quantum capere poteſt. Quando ſmiris obtundi incipit, pulveris ejus parva copia catino inſpergitur, quo renovetur aliquo modo aſperitas, ſed ſi cæmentum ſatis durum, ſmiris ſemper aſpera permanet.

Ut catinus ultimam perfectionem adquirat, utque inprimis ſuſtentetur eodem ſemper in ſitu, tollatur de lapide, & fuſione inde ſublatis pice & ſmiride, imponantur fragmenta longa unum alterumve pollicem cæruleæ cotis, quâ Horologopœi & cælatores cuprum expoliunt: hæc fragmenta prius ordinanda ſunt & utcunque agglutinanda catino, ſatis propinqua ſibi mutuò, ope ſaponis vel Amyli, tum iterum fimbria chartacea circumponenda catino, & arenâ ſiccâ inter coticulas ſparsâ ad $\frac{3}{4}$ altitudinis coticularum, aut ad $\frac{2}{3}$, ſi tantùm æquent pollicem, agitetur catinus donec arena ubique æqualiter ſubſidat, aut follis vento æquetur. Probè autem cavendum eſt, ne coticulæ juxta ductum ſuorum filamentorum ſitum obtineant, ſed tranſverſo ſitu ponantur, neque enim aliter, dum tritus exercetur, ſatìs deterunt. Dein ſupra hæc funditur cæmentum durum calidum valde, & diſcus lapideus rotundus his imponitur, & frigefiant ſimul. Per hæc tandem catinus deducitur ad perfectionem, quæ cognoſcitur, dum deterſis ſordibus ubique æquè fulget, ubi obliquè adſpicitur expoſitus luci.

Diſcus cum coticulis ubi ſeponitur, ejus pars quæ coticulas continet verſùs ſuperiora ponenda, neque imponendum quidquam ne ſitum mutent. Tempore æſtivo

ideo

ideo in cellâ ſervantor, quia tempore calido proprio pondere ſitum mutant: hinc cæmentum adeò fiat durum copiâ cinerum vel lapidis triti, quàm fieri poteſt.

De eligendis Vitris.

VItrum albiſſimum optimum quidem ratione pelluciditatis, ſi reliquas conditiones requiſitas ſimul poſſidet: ſed ſæpe id, quod candidiſſimum eſt, quaſdam venas, vel inæqualitates habet in ſuâ ſubſtantiâ, vel ſponte ſuâ in aëre humeſcit. Ideo plerunque optimum quod ſubflavum, leviter rufum, aut ſubviride apparet, ubi tranſverſim adſpicitur. In his regionibus melius haud habetur eo, quod ex ſpeculis ruptis. Sed poſteà bonum ſatìs expertus ſum, quod ex officina vitriariâ Sylvæducis accepi ejusdem materiei, unde pocula conflant; ſed optimum fuit, quando duobus, tribuſve diebus immota conſtiterat materia diebus feſtis. In noſtros uſus fragmenta vitri conficiunda curabam eâ arte, quâ ſpecula fiunt, ſc. ex globis rotundis fundo abſciſſo ad latera apertis, tum ſupra conſciſſis, inque planum redactis in foco furni: hæc fragmenta, quæ craſſitie $\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{4}$ pollicis æquabant, in molâ marmorum apud Lapicidas ad æqualem ubique craſſitiem læviganda curavi.

Ut venæ detegantur in vitro, obliquè admodum inſpiciundum eſt, oppoſitum luci quam locus obſcurus proximè contingit; ita explorantur fragmenta ſpeculorum politorum: ſed quia hæc rarò ſatìs craſſa habentur, ideoque fragmenta nondum politorum ſpeculorum accipere neceſſe eſt, illa priùs per politorem perſpicillorum æqualem ad craſſitiem plana læviganda, & ruditer polienda, ut dicto modo ſciri queat, an materia idonea ſit.

Sæpe venæ vitris adſunt inſtar filorum tenuium, quæ vix nocent. Sunt nobis hujuſmodi vitra, optima tamen.

Eſt & ubi dicto modo vitia non cernas, quæ tamen in

 vitro

vitro probè polito apparent, ubi per reflexionem exploratur, quod ita fit. Vitrum ſitu erecto, & ſuperficie, de quâ ſuſpicio, ad poſteriora verſâ menſæ imponitur in cubiculo obſcuro: tum candelæ ardentis, quam manu tenemus, lux reflexionem patiatur a vitro, curando ut prior reflexio ſemper in vitri medio fiat; dein retrogredimur, donec reflexio poſterior candelam invertere incipiat, totumque vitrum luce refulgeat, tunc enim vitia, optimè deprehenduntur, ut & imperfectiones poliituræ: denique, ſi vitrum majoris ſphæræ ſit 40. putà aut ultra pedum, utimur parvo teleſcopio 3 aut 4 pollicum ad detegenda vitia in hac reflexione.

De Præparatione Vitrorum antequam poliantur.

SI vitrum aſperum eſt ex ſpeculis non lævigatis, quo utimur plerunque ob craſſitiem ad vitra majoris ſphæræ, ut 30 pedum & ſupra, ejus fragmentum longè majus vitro quæſito complanetur ad æqualem ubique craſſitiem, & ruditer expoliatur ab artifice qui perſpicilla conficit, ut ſciatur an venæ adſint, & an poſſint evitari, ne intra aperturam vitri cadant. Ad hanc lævigationem utimur laminis ex ferro fuſo, quas venales habent ſideropolæ, hæ planæ redduntur in molendinâ lapicidarum. Tum circino adamantino circulus fiat in vitro diametri quæſiti, aliusque eodem centro, qui paulò major eſt v. c. unâ circiter lineâ. Item duo tales circuli fiant in alterâ parte vitri prioribus exactè reſpondentes ope vitri circularis, de quo deinceps pluribus.

Quoties magna fragmenta ſeparanda ſunt ab hocce vitro, ferro candenti id peragi poteſt. Aliter id fit ope validæ cochleæ manuariæ, Belgis *een handſchroef*, quæ tantùm aperitur ut præcisè craſſitiem vitri capiat. Non eſt procedendum abrumpendo intra ultimum circulum, ſed inæqua-

æqualitates ſuperſtites in margine ad cotem tornantem demendæ; primò applicando angulos eminentes ad rotam, ne fragmenta diſſiliant, poſtea autem medium; eo labore pergitur, donec ad ultimum circulum utrimque perventum eſt.

Dein manubrium ligneum vitro imponitur paululum calefacto priùs, atque arenâ albâ pellucidâ & aquâ margines paululum inclinatæ in eo excitantur utrimque, quò exactiùs eò meliùs; idque fiat in catino convenientis profunditatis; ille cujus radius eſt ſex pollicum ſufficit vitris 2, 3, 4, & 5 pollices latis. Quo facto, ope cæmenti ex colophoniæ part. 11., ceræ part. 1. lamella cuprea pluribus foveolis vel cavitatibus prædita agglutinetur vitro, & ope baculi 14 vel 15 pedes longi, in quo inferiùs aculeus ferreus infixus eſt, qui ſupernè per elaterem adigitur, vitrum lævigatur cum arenâ & aquâ ad laminam ex ferro fuſo planam, ut exacté ubique eandem adquirat craſſitiem, ponendo aculeum in aliqua foveolarum, quæ circa partem craſſiorem. Hæc lamina ferrea in molendinâ marmorum complanata eſt, poſtquam a fabro ferrario in figuram rotundam redacta fuit.

Craſſities vitri, an ubique ſit æqualis, manuariâ cochleâ menſuranda eſt, id enim eâ exactius peragi poteſt, quàm circino curvo.

Circa finem hujus lævigationis conducit ſmiridis cribratæ uſus, quia arena cavitates juſto majores excitat: & neceſſe eſt, ut aculeus ferreus baculi exactiſſimè medium vitri premat, id eſt, in medium circumferentiæ interioris marginis inferioris, ne figura cylindrica aut eminens ſuperſit ulla. Scire enim decet, quòd aculeo premente punctum quoddam extra centrum vitri, id inde acquiſiturum ſit figuram non planam, ſed gibboſam vel cylindricam. Immò, ſi antea fuiſſet exactiſſimè planum, hanc tamen vitioſam figuram adquiret, cujus quidem rei cauſa obſervatu digniſſima. Atque hæc preſſio in centrum ob-

ſervanda quàm maximè, ut conditio ſummè neceſſaria, in poliundis quoque vitris jam figuratis.

Ut ergo una foveolarum lamellæ æreæ medio marginis inferioris exactè reſpondeat, utimur vitro circulari, quod fit ex fruſto vitri ſpecularis politi, cui octo vel decem circuli concentrici inſcripti ſunt circino adamantino, quorum circumferentiæ a ſe invicem diſtant $\frac{1}{4}$ pollicis, vitri autem magnitudo ferè ſit æqualis vitro poliundo. Hæc lamina pellucida vitro imponitur, & movetur donec circumferentia interior marginis vitri parallela ſit proximo circulorum deſcriptorum; tum ſimul invertuntur, vitrumque ſpeculare imponitur menſæ, & per impoſitam parvulam prunam lamellâ cupreâ calefactâ, ut ſupra cæmentum moveri queat, ex quadam cavitatum menſuratur diſtantia ad peripheriam cujusdam circuli, & lamella movetur donec ea cavitas in centro ejus circuli ſita deprehendatur, quo ipſo neceſſariò etiam in medio interioris circumferentiæ marginis inferioris hærebit. Circulari laminæ tria parva fragmenta lintei agglutinata ſunt ope amyli, ne vitra lævitate ſuâ ſupra ſe mutuò nimis facilè moveantur, neque ſe mutuò lædant.

Conduceret cavitates laminæ illi cupreæ impreſſas eſſe ope ferri acuti trilateri, utque aculeus eis imponendus quoque eſſet trilaterus, quo rotatio vitri impediretur. Id tamen adhuc magis requiritur in expoliendis porro vitris, de qua arte jam dicam. Obſervandum eſt in vitro jam ad planitiem reducto, an circumferentia interior marginis ſit circularis, id eſt, an æqualis ubique diametri, quod circino exploratur. Si non eſt circularis, denuo margines expoliendæ ſunt, & ſi opus circumferentia ubi latior, cote tornatili iterum ad circulum redigenda; aliter enim iis in locis in catino cavo minùs conſumitur, adeoque a figura circulari declinat. Circumferentia illa marginalis ſat bene expolienda eſt, quod plurimùm facit ad nitorem reliqui operis.

De

De Vitris poliundis.

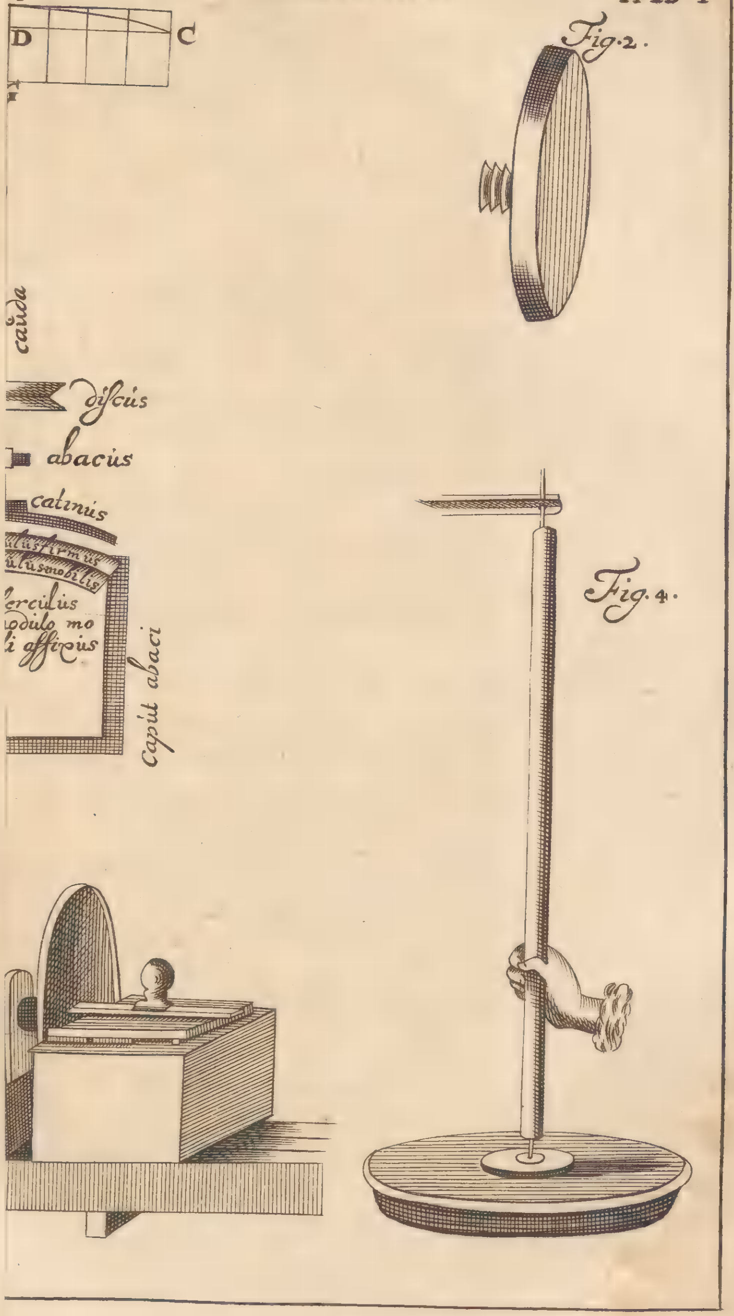
VItro, ut dictum eſt, complanato, lamella cuprea cum foveolis aufertur, & ope cæmenti præſcripti alia parva ex ære, vel potius chalybe, lamella agglutinatur, cujus magnitudo æquetur denario, & in medio foveola triangularis profunditate paulùm majore linea impreſſa ſit ſtylo chalybeo, non ampliori quàm quæ excipiat calamum anſerinum; in medio hujus foveolæ aculeo acuto centrum eſt impreſſum, quo in medio circumferentiæ marginis inferioris, ope vitri circularis & circini, cujus alter pes paululum incurvatus ſit, vitro poliundo agglutinatur, ut modò dictum fuit. Poſtquàm exactè in medio ſita eſt, aliquot guttæ cæmenti fuſi ad latera lamellæ cadant in vitrum, ne ex priori ſitu dimoveri queat. Porro utitor artifex ad poliundum baculo, cui aculeus ferreus trilaterus inferiùs infixus ſit, qui reſpondeat cavitati lamellæ, ita tamen laxè, ut in ea mobilis ſit; inferiori parte apex ſit rotundus, qui limâ exactè politus & cote dein ſphæricè lævigatus ſit: in ſuperiori hujus baculi parte alter ſit ſtylus ferreus rotundus, 5 vel 6 pollices longus, exceptus foramine aſſerculi trabi affixi. Catini centrum perpendiculariter ſub hoc foramine cadat. Hic poliundi modus longè melior eo, qui manu fit, tam ut preſſio exactè determinetur in medium vitri non preſſis lateribus, (unde margines puriſſimè lævigantur) quàm ut vitetur incommodum quod a calore manus oritur, qui vitrum in parte ſuperiori extendens parum, inferiorem catino arctè adhærere facit, quæ ad concavitatem hinc cogitur. Sed dum baculo expolitur nunquam adhæret, niſi ex catino ſublatum in aëre paulò majorem calorem adquirat eo, qui catini; quando itaque denuo applicatur catino pars inferior contrahitur a frigore catini, & huic arctè cohæret, quocirca tum exſpectandum, donec vitrum denuo temperiem catini adquiſi-

TAB. I. Fig. 4.

quiſiverit. In magnis vitris etiam quædam obſervatur ad motum tarditas, quando calore ignis aër cubiculi incaleſcit, ideoque conducit ignem removere: formatur vitrum primò in catino ſmiride ſatis craſſâ per lintei Cameracenſis ſpeciem cribratâ, quæ *kamericksdoek* appellatur, ſed manubrio priùs æquatâ. Tum obſervandum ut vitrum, motu ſuo ſupra margines catini ſatìs altè aſſurgat inter lævigandum, quia hoc modo minus mutatur figura catini, vel & reſtituitur amiſſa, quæ aliter ſemper magis magisque cavatur. In formando illico vitrum incipiet cohærere, ſimul ac ſmiris valde attenuatur, tum alia ſumenda, ut poſſimus pergere; aliter cohæſio hæc, meâ ſententiâ, non nocet. Vitro utimur impuro, in qualibet materiæ variatione, quo ut præcurſore lævigatur ſmiris, ſi forte grana craſſiora adſint excitatura ſulcos; formato vitro (quod cognoſcitur, ſi obliquè inſpicienti vitrum luci oppoſitum, æqualiter ubique læve apparet) catinus cote cæruleâ iterum & aquâ reddendus eſt purus, quod ſpatio minori quàm $\frac{1}{4}$ horæ peractum erit, ut iterum æqualiter refulgeat obliquè ad lucem inſpicienti.

Tum capito ſmiridis 40 ſecundorum quantum digitabulum ſemiplenum continet, & cum eâ poliatur ſpatio $\frac{1}{4}$ horæ. Dein $\frac{1}{4}$ horæ cum ſmiride 100 ſecundorum æquali quantitate; poſtea cum ſmiride 200 ſecundorum per horæ $\frac{1}{4}$, tandem cum ſmiride 400 ſecundorum per $1\frac{1}{2}$ horæ, ſumendo hujus poſtremæ ſmiridis copiam minorem, ita ut quantitas fabæ Turcicæ æqualis ſufficiat vitro, cujus diameter 5 pollicum, demendo præterea pedetentim aliquid de materiâ ſmiridis, ita enim vitrum admodum læve & ſubtile redditur. Hic autem modus, qui quolibet quadrante horæ ſubtiliorem addit ſmiridem, inventus eſt non conducere, quia ſuperficies magnorum vitrorum in poliendo diverſos exhibebat ſulcos per ſmiridem inſculptos: optimum itaque eſt primâ cum ſmiride 40 aut 100 ſecundorum in lævigando pergere ad finem uſque, demendo

De Formandis Vitris. TAB. I.



do tamen qualibet ſemihorâ aut quadrante aliquantum pulveris, ita ut ultimâ ſemihorâ parum reſtet, quo ipſo vitrum ſubtiliſſimum redditur. Fortè mutatio pulveris rectius ſuccederet, ſi paulò plus adhiberetur de ſingulis, & plus de ultimo fuiſſet deterſum pulvere. Nonnunquam uſi ſumus ſmiride 50 ſecundorum per ¼ horæ, & dein per ¼ horæ ſmiride 400 ſecundorum, & poſtea adhuc ¼ horæ ſmiride 45 minutorum.

Hoc autem tempore abſoluto lux candelæ bene deſcripta per vitrum apparebit, vel & rhombi feneſtræ de die utcunque diſcerni poterunt, quod notat vitrum ſatis evaſiſſe læve, ut ultimæ polituræ adhibeatur. Sed hàc claritate abſente ſcimus nimium fuiſſe adhibitum ſmiridis, & continuandum in poliendo, & demendo pulvere. Aqua putealis maximè huic polituræ confert. In magnis vaſis gyrus manus fere eſt 2½ pollicum, & curandum ut vitrum circiter unum digitum ſupra centrum catini moveatur, & ſupra marginem ejus non minus, quàm latitudinem ſtraminis; ſed major transgreſſus non officit, ſi catinus ratione vitri parvus eſt, ſic enim figura catini conſervatur. Veluti in vitris noſtris 200 pedum, quorum diameter eſt 8¾ pollicum, ut in catino 15 pollicum formentur, tantùm unum digitum tranſcendimus ſupra centrum catini & circiter 3¼ pollices ſupra margines: dum id obſervabatur vitrum reddebatur idoneum, ſed dum modò ſtramen transverſum adſcendebat ſupra marginem & longius ſupra centrum, non poterat reduci ad nitorem circa margines dum perpoliretur, manifeſto indicio eo opere figuram catini perire: & putem, ad figuram catini conſervandam in omni vitrorum magnitudine, conducere multùm transgredi margines dum poliuntur. Sentiendum eſt vitrum ſemper adigi ad catinum, neque nimis facilè in eo moveri, quod ſi fiat medebimur gyros minuendo. Manus tantùm baculum ſuſtineat, non premat, idque uſque ad finem, nimiâ enim preſſione ſulci imprimuntur vitro. Nimia ſiccitas,

ri pictorum ducitur æqualiter ſupra catinum (vel ſaltem longè latiùs quàm extenditur area in qua decurrit vitrum poliendum) extendendo primùm ductibus parallelis verſùs unam partem, dein transverſim ad ductus priores, idque pluries ut fundus æqualiter ſtratus ſit : qui licèt tenuis eſſe debeat, non tamen nimium attenuandus eſt, nam aliter inter poliendum nimis conſumitur, & ſulci oriuntur in ære nudato, adeò ut tum aliquando recens fundus ſternendus ſit : ideo confert ut fundus primò ſternatur craſſior, quia tandem ſemper ſatis attenuatur, ut vitro debita catini figura imprimatur.

TAB.II. Fig. 7. Ita depictus fundus ſiccatur porro ei impoſitâ ſartagine planâ oblongâ ex ferro, prunis refertâ, cujus longitudo circiter 10 digitorum aut pedis, latitudo ſex pollicum, cum margine ambiente & obliquè aſſurgente, inſtructaque ſit quatuor parvis globulis quibus infra inſiſtat, & manubrio, ut figura indicat. Sublatâ ſartagine ſi fundus apparet infra eam ſiccari, porro ſeponi poteſt, dum reliquum humidi ſponte ſuâ exhalet, ne catinus nimis calefactus longiori tempore ad refrigerationem indigeat. Catino planè refrigerato politio inchoanda areâ prius ductibus parallelis tripoli inſtratâ, & pulvere non cohærente per flatum inde ſublato. Terra hæc tripolitana priùs cum aquâ in pollinem tenuem læviganda ſupra porphyritidem, dein denuo redigenda in maſſam, & ſiccanda; aliter ſemper in ea ſupererunt fruſtula vel arenulæ aſperæ vitrum radentes. Vitrum depuratur ab omni cæmento & pinguedine, abſtergendo illud cum linteo tripoli & aquâ tincto, aut pauculo tripoli, cui vitriolum commiſtum eſt. Requiritur enim quàmmaximè ut vitrum purum & ab omni omnino pinguedine depuratum ſit, ut inter poliendum tripoli eò meliùs in illud agat.

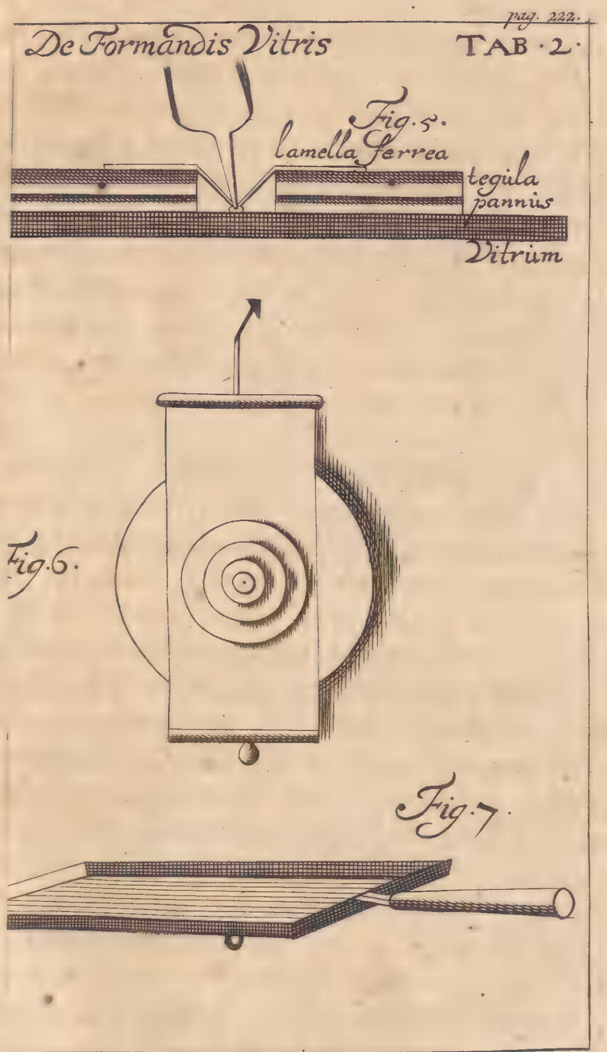
Priusquam vitrum cavo catini admoveatur, conducit aliud, nullius aliter uſus, adeſſe vitrum, cujus figura illi catini reſpondeat circiter, quod moveatur in catini areâ cir-

circumquaque, ut deprehendi poſſit, an arenulæ aut moleculæ duræ ſint in catino, eæque deprehenſæ conterantur in pollinem, aut tollantur. Deinde vitrum genuinum & præparatum inducitur in aream; quod primò leni manus ductu agitur huc illuc, dein iterum eximitur, & reſpicitur ad ſtrias ex polline tripoli adhærente vitro adnatas, an ubique æquali contactu catino applicatum fuerit. Si non, ſignum eſt catinum, aut vitrum nimis calidum eſſe; ideo exſpectetur parum; dein eodem modo iterum exploretur idem, donec advertitur tripoli recto ductu ubique toti vitro æqualiter adhærere; aliter certò perderetur figura vitri. Si catinus nimis calet, vitrum in medio magis attingit catinum quàm ad margines, quia calore ſuperior ſuperficies catini extenſa, adeòque minus cava redditur. Si verò vitrum nimis calidum catino applicetur frigido, magis tanget catinum circa margines quàm in medio, quia ſuperficies inferior frigore ſe contrahit, non autem ſuperior. Si opus politionis ſolâ manu tentaretur multi eſſet laboris, immo in vitris 5, 6, aut plurium pedum res perfici non poſſet. Ideo machinam excogitavimus & revocavimus in uſum, quâ vitrum, quantum requiritur, ad catinum prematur, ſicque hâc in parte levetur labor. Hæc machina conſtat primo aſſerculo CC paulò longiori quam latitudo catini *A*, craſſities verò quadrata ſit $1\frac{1}{2}$ pollicis, duo verò extrema ſeu manubria inflexa ſint verſùs inferiora, & dein iterum deducta ad parallelum longitudini aſſerculi ſitum. In medio hujus aſſerculi ſtylus infigitur ferreus, cujus apex deſcendit eò uſque ex aſſerculo, donec reſpondeat exactè infimæ parti manubriorum deſcriptorum: ſtylus hic premit in foveolam ferream, quam diximus tegulæ affixam, cui vitrum B, diſco ex panno intermedio, infernè affixum eſt. Utque preſſio ſatis ſit fortis, arcus ſit ex aſſere ligni abiegni, cujus craſſities ſit $\frac{1}{2}$ pollicis, longitudo 5 pedum, latitudo in medio 7 pollicum, quæ utrimque fere in acumen deſinat, ut hic in DD Tab. III. Fig. 8.

hic arcus in medio ſui alligatur pavimento ope unci ferrei, & ad funem FIF tenſum ad arcum alius funis nectitur duobus in locis, quorum diſtantia II æqualis eſt longitudini baculi CC ; hic funis ultimus ducitur ſupra manubria adſcendens ſuper totum baculum, & intenditur unà cum arcu pro lubitu ope ſtyli G, circa quem funis ex C veniens circumglomeratur, quique ligno inſeritur, cui funis ex I protractus infernè alligatur. Catinus ille A impoſitus eſt aſſeri ſatis valido quadrato, qui unâ parte ſui menſæ adnectitur firmus, alterâ verò innititur baculo P. Tum capiens manubria aſſeris CC, ſedens artifex vitrum tardis modicè ductibus huc illuc trahit ſupra catinum A, vitrum poſt vigeſimum aut vigeſimum quintum ductum parum circumtorquens, qui labor continuandus erat 2 aut 3 horis antequam eſſet lævigatum perfectè, eratque moleſtus valde, quia vitrum ſic preſſum tardiſſimè in catino moveri poteſt.

TAB. III. Fig. 9. Loco arcus DD poſtea excogitavi elaterem factum ex duobus aſſeribus abiegnis junctis α β & α γ ſupra planum inclinatum ligneum α per clavos probè affixis. Hi aſſeres ambo æquè longi ſunt ac menſa politoria, cui ſupponuntur juxta longitudinem: unde nullum ex iis impedimentum, ut ex arcu DD, qui utrimque longè eminebat: ad extremum α aſſeres 8 aut 10 pollices lati, & modicè craſſi ſunt, ad β & γ fere deſinunt in acumen: α γ in pavimento jacente tenditur finis β aſſeris α β verſùs inferiora ope funis $\beta\varepsilon\zeta$, qui per trochleam ε, quæ ope cochleæ pavimento nectitur, ducitur; & deinde circa ſtylum ζ, qui etiam pavimento firmiter infixus eſt, circumvolvitur & firmatur: ſub fine γ aſſeris α γ per funem nectitur lignum transverſum $\delta\delta$, cujus extremitatibus annectuntur funes δ CCG & δ G, quorum prior tranſit per extremitates & ſupra lignum politorium c c. Lignum $\delta\delta$ parum modò attollitur de pavimento; unde funes δ C longi manent & lignum politorium laxitatem adquirit, ut huc illucve moveri que-

pag. 222.


De Formandis Vitris
TAB·2·
Fig.5.
lamella ferrea
tegula
pannus
Vitrum
Fig.6.
Fig.7.

queat. Clavis duobus θ elater pavimento affigitur, ſed hi clavi non ſunt adacti uſque ad capitula ſua, quia elater in α parum aſſurgere poſſe debet, dum funis βεζ tenditur.

Ut verò vitrum faciliùs huc & illuc in catino poſſit moveri, machinæ deſcriptæ aliam adjunximus.

M. robuſtam ex ligno vel ferro manum deſignat, quæ quadrato foramine infernè excavatur, ita ut baculum CC laxè, ſine conſtrictione amplecti poſſit: huic cauda adeſt, per quam annectitur aſſerculo LL ope cunei, qui per orbem ferreum, vel annulum aſſerculo affixum tranſmittitur: hujus aſſerculi inferior ſuperficies roſtro anteriori ipſius M æqualis eſt quoad eminentiam: aſſerculus hic habet latitudinem pollicum $2\frac{1}{2}$, craſſitiem pollicis $\frac{1}{2}$, longitudinem verò ſeſquialteram diametri catini: moveri poteſt huc illuc ſupra caudicem firmatam ſuper abacum O, & tam altam, ut aſſerculus altitudine pollicis ſupra ſuperficiem catini emineat: hamuli lignei Π & pinnæ Σ impediunt ne a viâ rectâ declinet, neque ad poſteriora ſubſiliat: porro ſupra medium caudicis H axis ferreus fortis ponitur, intrà duos annulos verſatilis, qui in medio habet ligneum cylindrum, qui craſſitiem habeat pollicis unius cum dimidio circiter, cum ſtylo ferreo transverſim adacto firmiſſimè ei annexum: per duo foramina terebrata in hoc cylindrulo & ad unam partem latè excavata, aguntur funiculi robuſti nodis præditi, qui foramina obturantes non tamen emineant ſupra cylindrulum; tum quiſque horum aliquot gyris circumvolutus cylindrulo, & unâ extremitate alligatâ ad ſtylum brevem qui infigitur firmiter aſſerculo LL; alterâ circumvolutâ circa bacillum N, cujus ope funis hic pro lubitu tendi poſſit. Dein ad extrema axis dicti ferreus adeſt vectis Q pollices 5 longus, cum manubrio ligneo, quo jam huc, jam contrario gyro rotatus aſſerculus LL vi huc illuc trahitur, ſimulque vitrum B, ita ut utrimque ferè tertiâ parte ſupra margines aſſurgat, dum per baculum TAB. III. Fig. 8.

baculum CC & elaterem DD, ut dictum, ad catinum premitur. Aculeus qui vitrum premit obliquè parum inclinatur, quia baculus CC quodammodo laxus hæret in manu M, quo opus eſt ut vitrum agatur ſupra catinum ſine tremore. Hæc tamen inclinatio ſtyli parva admodum ſit, oportet; quæ ſi nimia, poteſt craſſities baculi CC in medio attolli, quò profundiùs a manu M excipiatur: infiguntur duo aculei ferrei infernè in aſſerculum LL, qui utrimque ad caudicem H appulſi impediunt, ne ulteriùs protrahatur, quàm vitrum in catino requirit. Catinus, vel potius lapis cui agglutinatur, premitur intra caudicem H & ſtylum qui ab aliâ parte aſſeri infigitur ope cunei lignei, qui inter hæc adigitur; inſidet ſcabello rotundo hoc opus perfecturus Artifex, unoque brachiorum laſſato ad tornandum altero utitur; quia verò opus non eſt alio corporis motu, hic poliendi modus longè minùs laſſat, quàm ille, quo baculus CC brachiis huc illuc agendus erat. Poſtea hunc vectem longiorem fabricandum curavi & verſatilem ad duo extrema, ut ita duabus manibus ſimul verſari poſſet.

Ut vitrum poſt ſingulos 20 aut 24 ductus paululum circumvertatur ſupra catinum, quod neceſſarium, trahatur vitrum, unâ manu apprehensâ tegulæ circumferentiâ exteriori, dum alterâ pergitur in motu præſcripto, quod ſine multo labore peragi poteſt.

Quin & catinus poſt 25 aut 50 ductus ſemper parum ex priori ſitu removendus eſt, tantùm latitudine dimidii ſtraminis eum retrahendo ad eam areæ partem, ubi vitrum non eſt; & poſt 25 aut 50 deinde ductus rurſum in plagam oppoſitam reducendo. Initio politionis tripolis in areâ aliquot in locis, congeſta in parvulas maculas, hæret, ſed hæ poſtea tolluntur & area planè redditur ejusdem lævitatis ubique.

Dum advertitur tripolin vitro non ſatis adhærere, quia non æqualiter ubique cernitur ſtriis rectis & tenuibus, ſarta-

ſartago (Fig. 7.) cum igne ſupra aream rurſum ponenda, donec ſentiatur area tantillulum minus frigere aliis partibus catini, tum rurſus tripolis ſupra catinum fricari debet, & vitrum manu ſupra eam duci, ut exploretur, an æqualiter tangat, & dein porrò pergendum in poliundo. Verum poſtquam vitriolum loco æruginis ſumſi, quæcunque de calefaciundo catino dicta omitti poſſunt, quia factæ areæ ſemper ritè tangunt vitrum, magiſque arctè adhærent quam antea. Perfricatur quoque catinus tripoli ſupra areas ſine calefactione catini, ut area eo melius ſervetur integra, utque vitrum melius tangat, quod ſemper poſt 200 aut 400 ductus repeti poteſt.

Item poſt 200 ductus vitrum tolli poteſt, laxando paululum cuneum, qui manum M aſſerculo nectit, tollendoque baculum CC de vitro; tum ſupra vitrum agitur digitus, aut linteolum purum vel particula corii, & exploratur quantum profectum ſit.

Ad evitandam numerandi moleſtiam, rota lignea ZΔ diametro 7 aut 8 pollicum, facile circa axin verſatilis, plana affigitur aſſeri, qui firmatus ad parietem eſt: hæc rota habeat 24 dentes ſerratim inciſos Hi dentes propelluntur filo cupreo SX, quod ope orbiculi nectitur elateri ex filo cupreo RST, quod in R aſſeri per clavum affigitur. Elater hic trahitur funiculo, qui ab T per orbiculum V tranſit, indeque porrò ad extremitatem aſſerculi LL, cui adnectitur. Eo rota ZΔ ſingulis duobus ductibus uno dente propellitur, & quâ vice alterutra pinnarum Z vel Δ, quæ ei infixæ, appellunt ad filum cupreum ΓZ, iterumque dimittunt, ſonat tintinnabulum Γ filo cupreo annexum, unde monemur 24 ductus abſolutos eſſe, vitrumque parum invertendum.

Præterea affigi poteſt caudici H index ductuum (præditus tribus quatuorve indicibus progreſſu decimali) juxta aſſerculum LL, ejuſque funiculus ad extremitatem aſ-

 ſer-

ſerculi alligari, quâ ratione ſine labore numerationis vel annotationis ſciri poteſt quot ductibus politio peracta ſit.

Vitrum 5 aut 6 pollicum in diametro requirit circiter 3000 ductus ab utrâque ſuperficie ut probè purum fiat.

Videndum accuratè eſt an in medio vitri, ubi ab aliâ parte obfuſcatum eſt, nulla appareat opacitas, vel color cineritius, vel maculæ parvæ ad reflexionem luminis candelæ aut lucis; aliæ enim partes Vitri longè citius puræ apparent.

Poſtquam ſatis expolitum vitrum erit, ut de corio & regulâ tollatur, ſuprà vas prunis inſtructum calefiat, donec eo uſque molleſcat cœmentum, ut vitrum verſus latera impnlſum amoveri queat.

Quidquid tum vitro adhuc adhæret linteolo calido abſtergitur, dein alio linteolo Oleo vel ſebo candelæ imbuto, ultimò denique purioribus linteolis.

Si vitrum deprehenditur haud ſatis expolitum (in eo etenim fallimur ſæpius) ulterius expoliri poterit, denuò agglutinando ut prius, abſtergendo quam puriſſimè, idemque ſubaſperum reddendo, ut ante dictum eſt. Quin etiam novus in hanc rem fundus catino imponi poteſt, ſi prior ablutus vel inidoneus fuerit, eâ lege tamen, ne interim aliud in catino vitrum expolitum fuerit.

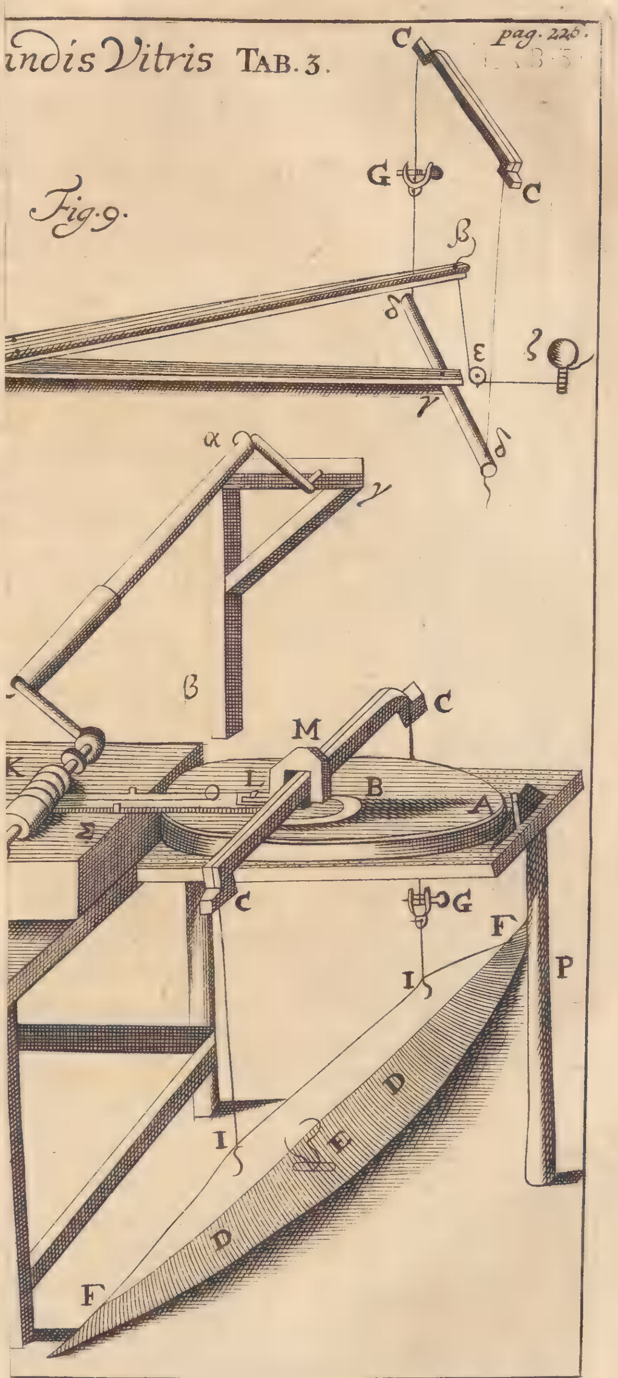
Ad tollendos lotione hos fundos parum aceti catino infundendum erit.

Denique eligatur ſemper vitrum, quantum haberi poteſt, craſſiſſimum & maximè pellucidum, quo evitentur plurimæ difficultates ex inæquali preſſione inter poliundum oriundæ.

F I N I S.

ndis Vitris TAB. 3. *pag. 226.*

Fig. 9.



CHRISTIANI HUGENII
ZUILICHEMII,
Dum viveret Zelhemii Toparchae,
OPUSCULA
POSTHUMA.
TOMUS SECUNDUS,
QUO CONTINENTUR
DISSERTATIO
DE CORONIS ET PARHELIIS.
TRACTATUS
DE MOTU, ET VI CENTRIFUGA.
DESCRIPTIO
AUTOMATI PLANETARII.

AMSTELODAMI,
Apud JANSSONIO-WAESBERGIOS.
M. DCC. XXVIII.

CHRISTIANI HUGENII
DISSERTATIO
DE
CORONIS
ET
PARHELIIS.

CHRISTIANI HUGENII
DISSERTATIO
DE
CORONIS ET PARHELIIS.

QUANQUAM Coronarum & Parheliorum, quas hic adducemus, cauſæ non multum a ſe invicem differunt, prius tamen de iis, quæ ſunt coronarum, agam; tum quia hæ explicatu faciliores ſunt, tum quia harum cauſis cognitis, illæ Parheliorum facilius intelligi queunt. Sunt autem coronæ circuli rotundi, qui interdiu circa ſolem, noctu verò circa lunam nonnunquam apparent, modo albi, modo, quando lucidiores ſunt, inſtar Iridis, variis inſigniti coloribus; Harum diameter, ut plurimum eſt 45 gr. circiter, ſed aliquando majores obſervantur diametro 90 gr. aut plurium. Fertur quoque plures tales coronas apparuiſſe ſimul, quæ ſolem omnes in centro haberent. Hujuſmodi coronas 45 circiter gr. ſæpe obſervavi, ſed prima vice maximè expreſſam, in qua ea, quæ maxime notatu erant digna annotabam, antequam horum phænomenum cauſas inveſtigare tentaſſem; obſervavi itaque hunc circulum variis coloribus ſed Iride dilutioribus diſtinctum, ambitu interiore colorem rubrum, exteriore verò, qui ad alborem multum accedebat, cæruleum referente; præterea ſpatium intra circuli ambitum concluſum (quod fortè ideo *areæ* nomen meruit) obſcurius videri cælo circulum ambiente, quod quaquaverſum ſerenum ferme apparebat, & tantum tenuibus pellucidis albicantibuſque nubeculis obductum. Diametrum tandem coronæ graduum circiter 45 deprehendi, etiamſi illam craſſiori ratione

 tione

tione menſurarem, bacillo nempe uſus quem tantum extendebam quantum brachio poteram, deinde obſervabam quænam pars hujus diametrum areæ tegebat, unde poſteà angulum quam proxime calculo determinare poteram. Diem adſcriptum habet hæc obſervatio 30 Martii anni 1652. Recordor me poſt hanc obſervationem inſpexiſſe ea quæ *Carteſius* de cauſis coronarum ſcripſit; ſcilicet illas per refractionem radiorum ſolarium in planis ſtellulis ex glacie pellucida compoſitis generari; quod mihi non probabatur, quia inde ſequitur, uti & ipſe dicit, ſpatium intrà coronam comprehenſum, lucidius appariturum reliquo aëre extra coronam; cujus contrarium expertus ſum.

§. 2. Exiſtimavi ergo, aliam hujus phænomeni cauſam inquirendam eſſe, etiamſi idem *Carteſius* aſſerat *non aliam cauſam in nubibus inveniri poſſe, quæ tale quidquam efficiat.* Examinavi omnes reflexiones & refractiones quas ſolis radii in aquæ guttulis pati queunt, ſed nihil inveni unde circulus talis magnitudinis fieri poſſet. Mihi dein ſumpſi, ut alias figuras ex guttis congelatis pro lubitu fingerem, ſed incaſſum; tam arduum ſiquidem eſt, imaginem ſibi fingere rei nunquam viſæ: ſed cum poſt 6 annos iiſdem meditationibus incumberem, occaſione 5 Solium, qui Varſaviæ Ann. 1658. apparuerunt, & diligentius attenderem ad formam coronæ quam ſuprà deſcripſimus, vera tandem mihi earum incidit cauſa; & paulò poſt etiam illa parheliorum, quorum undique obſervationes inceperam colligere; non enim vereor veras eas dicere, quæ ita cum obſervatis conveniunt, ut operam mihi perditurus videar, ſi quas alias requiſivero. Cum igitur perpenderem neceſſario quaſdam particulas in nubibus hinc inde volitantes materiam his Meteoris ſuppeditare; quod ſatis ſuperque liquebat, ex eo quod nubibus disjectis corona tamen eidem inhæreret loco; cumque obſcuritas cæli intrà coronæ ambitum comprehenſi argumento eſſet

par-

particulas ibi poſitas, non ita commode ſolis radios tranſmittere, quam ubi extra illum angulum avolarint; ſubito in mentem venit coronam fieri poſſe, ſi ſingulæ harum particularum, grana quædam rotunda eſſent ex glacie vel aqua pellucida exterius, ſed quæ intus continerent nucleum minus pellucidum: facilè enim percipiebam, ſi magna quantitas talium particularum eodem prorſus modo efformatarum, inter nos & ſolem volitarent, illas, quæ intra certum angulum a ſole diſtabant, nullos ejus radios ad oculum tranſmiſſuras, ſecus ac aliæ extrà hunc angulum collocatæ, ſicut ſtatim demonſtrabitur. Tales vero grandinis guttas in nubibus reipſa reperiri, non tantum veriſimile eſt, ſed plane certum; cum, ut *Carteſius* in *Meteoris* teſtatur, illæ aliquando in terram deciderint; namque ibi de generatione harum particularum locutus; *Hinc fit*, inquit, *ut cum exterior ſuperficies cujuslibet grani ex glacie continua, & pellucida conſtare conſueverit, in ejus centro nonnihil nivis ſæpe reperiatur, quod hæc grana frangentibus ſeſe offert.* Nec mirum cuiquam videri poteſt nivis granula in aquæ medio hærere, ſi conſideret, integras guttas ab halitibus ſurſum aſcendentibus ſuſtineri, adeoque nec aquam conatum ad deſcendendum & a granulis in medio conſtitutis recedendum habere; nullam quoque cauſam eſſe, cur nuclei æquilibres aquæ a centro guttarum verſus ſuperiora, vel inferiora recedant. Atque hæc ſaltem ita ſe habere, grana illa glaciata in terram delata clare demonſtrant: verum integræ guttæ ut ab halitibus in aëre ſuſtineri queant, meo judicio, parvulæ ut ſint neceſſe eſt, ſemini forſitan aut æquales aut minores raporum. Quæ exiguitas nequaquam tamen obſtat, quo minus perfecta ſit figura, & proportio inter totius guttæ molem, & illam nuclei in medio, quam proportionem inveſtigabo; poſtquam ergo vidimus talia corpuſcula mixta in aëre generari, demonſtrandum porro quomodo omnia coronarum phænomena ab his producantur.

 §. 3.

§ 3. Quod quo melius intelligatur, harum guttarum unam, majori forma oculis ſubjiciemus, ut radiorum ſolis refractionem in ea oſtendere poſſimus; ſit ergo gutta ABCD cum granulo nivis in medio EF; ſupponamuſque ſolis radios in illam incidere a parte GH, notum eſt, illos primo in ſuperficie AD, refringi, ita ut verſus interiora vergant, unde neceſſario accidit ut magna eorum pars in nivis nucleum EF, impingat; ſed ſint radii AG, & HD, quorum refracti AB, & DC tangunt nucleum EF; hi ergo in B, & in C, rurſus refringuntur, & concurrunt ſe mutuo decuſſando in K; quod punctum paulo minus ſemidiametro guttæ ABCD, ab eadem diſtat, ſicuti *Prop.* XIII. *Dioptrices* demonſtratum eſt: ſi ergo, BK, & CK, uſque ad M, & L producantur, ſequitur nullum lumen a ſole per ſphærulam ABCD, ad oculum perventurum, ubicunque intrà angulum, vel potius conum LKM conſtituatur, quia omnes radii qui nucleum EF, prætterlabuntur, ſe invicem ad majorem angulum, & propius ad ſphrærulam ABCD, decuſſant, ita ut extra conum LKM cadant, ſicuti in dioptricis demonſtratur. Sed ſi oculus ubivis infrà guttam extrà hunc conum ut in O, & P, collocetur, perveniunt eo ſolis radii, & efficiunt ut ejus ſplendorem in gutta cernamus. Idem quod in hac gutta accidit, etiam fit in aliis omnibus ejuſdem formæ; unaquæque ſcilicet poſt ſe habet umbroſum conum, intra quem quando oculus eſt poſitus, nullos plane ſolis radios per guttam tranſeuntes percipere poteſt, ſed ſimul ac extra illum eſt collocatus illico radii ad eum pertingunt: ponamus oculum poſitum eſſe in N, & fingamus conum cujus vertex ſit N, & latera NR, NQ, parallela KL, KM, lateribus coni LKM, certiſſimum eſt nullam guttam nivis granulum concludentem ut ABCD, quæ intrà conum QNR reperitur ſolis radios verſus oculum N dirigere poſſe; ſi enim ex quibuſdam harum guttarum ut S, duæ lineæ ducantur parallelæ

Vide Fig. 1. & 2.

Vide Fig. 2.

rallelæ ipſis KL, KM, ut SV, ST, quæ in hoc plano repræſentant latera coni umbroſi poſt guttam S, patet oculum in N, vel verticem coni QNR incidere intra dictum conum VST, & conſequenter nullos ſolis radios per guttam S tranſeuntes recipere; nec alia eſt ratio omnium guttarum quæ ſunt intra conum QNR, oculus enim N, intrà conum umbroſum cujuſcunque ex iſtis poſitus eſt, ut ex figura conſtat.

§ 4. Verum quamcunque guttam extrà conum QNR ſitam, qualis eſt X, ſimul cum ejus cono YXZ, conſideremus, perſpicuum eſt, oculum N, extrà conum illum poſitum eſſe, ideoque ſolis radios per guttam X, ad oculum perventuros, ita ut hæc gutta illuminata apparitura ſit, ut & omnes aliæ extrà conum QNR, cum illæ, quæ intra illum ſunt, multò obſcuriores videri debeant, quod nullam ſolis imaginem habeant. Patet igitur ex his rotundam apparere debere aream circa ſolem obſcuram, quæ verò extra areæ ambitum ſunt, luminoſiora, & maximè quidem, quæ proximè eam ambiunt, quia guttæ quæ proximæ cono QNR hærent maximam ſolis imaginem exhibent, quod facile demonſtrari poſſet. Patet etiam in qualibet altitudine ſolis, eadem prorſus ratione, coronam produci poſſe, ob ſphæricam nimirum cum guttarum totarum, tum nucleorum intus poſitorum figuram. Quod ſi vero quiſpiam experimento ſibi phænomenum hoc repræſentare voluerit, ſphæram cavam ex tenuiſſimo vitro confectam, & aqua repletam in cujus medio ſphærula opaca ſuſpenſa ſit, quod facile fieri poteſt, Soli exponat, experietur, ſe nullam ſolis imaginem in illa viſurum, niſi ſphæram removeat per aliquod ſpatium a linea, quæ ab oculo ad ſolem pertingit; imo ſimulac eo pervenerit, ubi ſolis lumen percipere poterit, animadvertet ibi ſolis imaginem lucidiſſimam eſſe, ſimulque colorem rubeum illic apparere, eadem prorſus de cauſa, ac in priſmate Cryſtallino, vel potius aqueo,

ſi ta-

ſi tale conficere poſſemus. Radius enim GA exempl. gr. eandem patitur refractionem ingrediendo guttam in A, & exeundo in B, quam pateretur tranſeundo per priſma AΩB, cujus latera AΩ & BΩ guttam tangunt in A & B. Nucleus autem EF, qui lumen ab una parte terminat, multum etiam confert ad radios qui juxta illum tranſeunt ut AB coloribus tingendos: ſed nequaquam animus eſt mihi aggredi inquiſitionem cauſarum, quare hi colores in priſmatibus inveniantur; immò fateor me rationem eorum prorſus ignorare, nec facile quenquam iſtam perſpecturum arbitror, quamdiu naturalium rerum ſcientiæ major lux non affulſerit. Illud ſolummodo notari velim, colorem rubrum, qui in hac ſphæra apparet, etiam in guttulis jam memoratis, quæ proximè extrà conum QNR poſitæ ſunt, videri debere, qui in guttulis remotioribus minuens, alios etiam colores ſicuti in Iride producit: latitudinem autem coronæ judicamus æqualem ſpatio ad quod ſe colores hi extendunt, cum in eo maximè illuminatæ ſint guttæ, licet alioquin revera tantum ad interiorem ambitum verſus ſolem, non verò ad exteriorem terminetur. Quod eodem modo in Iride accidit, quæ itidem ſicuti ex explicatione Carteſii liquet, terminatur in parte ubi color ruber apparet, non vero ex altera. Hæ coronæ quoque circa lunam ſæpius obſervantur, eadem planè de cauſa, ac circa ſolem; verum ſæpenumero colores adeo ſunt debiles, ut albæ tantum appareant, quales haud raro ipſemet in iis circa ſolem animadverti, quando etiam vix obſcurior intra circulum area ab reliqua clariore aëre diſcernitur: hoc autem accidit, quando minor eſt copia talium granorum, quo enim plura ſunt, eo coronæ vividioribus coloribus cernuntur, ſicuti ex obſervationibus liquet, ex quibus patet quò area intrà coronam eſt obſcurior, hoc eſt, ubi maximè conferta granorum multitudo, coronam etiam eò vividius eſſe coloratam: ſed alia adhuc de cauſa ſpecioſio-

cioſiores colores & vividiores intrà coronam animadvertuntur, quando ſimul cum parheliis, & paraſelenis apparent, qua de re dicam ubi ad illas ventum erit.

§. 5. De diametro vero coronæ porrò nunc videamus, quam frequentiſſimè 45 gr. circiter eſſe dicebamus: hanc autem manifeſtum eſt pendere ex magnitudine nuclei opaci EF, quo enim major eſt, ad molem guttæ integræ AC, eo etiam major eſt ejus angulus BKC, cui æqualis eſt angulus coni QNR, qui coronæ diametrum determinat, ſicuti luculenter jam demonſtravimus. Præter radios enim HDCK, GABK, per guttam ABCD, tranſeuntes & nucleum opacum in E, & F, tangentes, ducatur ex centro M recta linea MKO, tranſiens per punctum interſectionis radiorum K, & occurrens cum producta linea recta DC, in O: lineæ HD & KC productæ intra guttam ſibi invicem occurrant in L; in Triangulo igitur DLC, anguli FDL, FCL ſunt æquales, quia radius HD, intrando guttam in D eadem prorſus refringitur ratione, ac egrediendo in C; angulo autem FDL æqualis eſt angulus DOK, quia HL, MO ſunt parallelæ; ergo in triangulo CKO æquales quoque erunt anguli KOC & KCO, hiſce verò duobus æquatur angulus CKM dimidius anguli CKB: cum autem angulus BKC, 45 graduum eſt, ejus dimidia pars MKC erit $22\frac{1}{2}$ grad. & hujus dimidia KOC rurſus gr. 11, 15′. In triangulo itaque OMF, rectum angulum F habente, data eſt ratio laterum; ſumptaque OM, pro radio partium 100000, erit MF, ſinus gr. 11: 15′. partium 19509. & OF 98078. datur autem & ratio OM, ad OD, quæ eſt ea, quæ refractiones aquæ metitur, ut oſtenſum prop. VIII. Dioptricorum, nimirum 187. ad 250: cum ponatur ergo OM pro radio partium 100000, erit OD, 133690, a qua ſi auferatur OF, 98078 relinquitur FD 35612, ſed MF, erat 19509. Itaque cognita horum laterum proportione in triangulo rectangulo MFD, dabitur etiam

Vide Fig. 3.

utriuſvis ratio ad latus MD, idque invenietur partium 40605: debet itaque ſemediameter guttæ MD, ad MF ſemidiatrum nuclei nivalis, ſe habere ut 40605, ad 19509, ſeu proximè ut 1000, ad 480, ut fiat diameter coronæ 45 grad. Eodem pacto ad conſtituendam coronam 90. grad. inveniemus rationem MD, ad MF eſſe debere ut 1000 ad 680. ut 1000 vero ad 473, ſi coronæ diameter ſit gr. 44.

§. 6. Circa generationem grandinis ſemiaqueæ conſiderandum eſt, fuiſſe primò ſphærulas nivis tenuiſſimæ, quæ continuo per aërem motu rotundantur; & quarum pars exterior ſolis calore liquefiat; coronas, quando apparent, aërem temperati frigoris caloriſve exigere, ut ſcilicet grana pedetentim atque tarde regelentur; & ſi frigus paululum increſcat non ulterius liquefiant; ubi vero ad dimidium diametri, vel paulo amplius liquefactæ ſunt, conum radii reflexi intra guttam ſuo calore impedire, quominus illa denuo ulterius in glaciem conſtringantur, etiamſi majus frigus ſuperveniat. Hoc autem calore, qui maximus eſt circa apicem coni ſuprà memorati, nucleus qui ſupereſt nivalis rotundatur, eo quod gutta modo hanc, modo aliam ſui partem ſoli obvertat, vel potius quod calor coni ſeſe circa totam guttam diffundat. Quæ rotunda figura ad coronas producendas requiritur; veriſimile quidem eſt plurimas guttas magis vel minus liquefieri, ſed quæ ſi nuclei interiores non rotundentur nullum ſimul effectum producere poſſunt. Et fortaſſe hoc ipſo calore, frigus eo magis in guttæ medio colligitur (ut illud multoties brumali tempeſtate accidere videmus,) & hac ratione obſtat ulteriori nuclei opaci diſſolutioni: minima enim in tali cœli temperie ab hoc vel illo latere reſiſtentia ſufficit ad conſervationem ſemiregelatarum guttarum: ſuppono autem exteriorem harum ſphærularum partem aqueam eſſe; quod veriſimilius apparet, cum ſic ſuperficies politior fiat, & magis idonea

Vide Fig. 4.

ad

ad determinatas refractiones, quam fieri poſſe videtur ſi ea glaciata foret. Attamen fieri aliquando poteſt, ut grana hoc modo efformata, uti vidimus, denuò congelentur; quæ fortaſſe concreta aqua ſatis eſſe poſſit pellucida, & ſphærica ut coronam producat: præter hanc autem radiorum congregationem, quæ guttas ad dictam proportionem liquefacit, fit adhucdum alia congregatio, qua nuclei nivales ſuperioribus ratione totius guttæ majores conſervantur, & rotundantur; quæ guttæ ſecundam producunt coronam, cujus diameter dupla eſt diametri prioris; qualem etiam nonnunquam obſervatam eſſe poſtmodum videbimus. Notandum porro hanc radiorum collectionem cauſam videri, quare plerumque coronæ talium diametrorum appareant: ſed nihilominus coronas quarumcunque diametrorum apparere poſſe, cum nihil obſtet quominus guttæ, in frigore hoc temperato tardiſſimè liquefiant & majore, vel minore earum parte diſſoluta, ſatis diu in eadem proportione permaneant, ut coronam ad aliquot horas, abſque ulla ſenſili mutatione, efficere queant: hinc etiam accidere poteſt, ut cum harum guttarum pars quædam, ad certam molis quantitatem & alia earum, quæ altius vel inferius diſperſæ ſunt, ad aliam, & adhuc dum aliæ partes diverſa cum reliquis proportione reſolutæ ſint; plures ſimul appareant coronæ, quarum diametri alia atque alia ſint amplitudine: ſicuti quidam memorant ſe ſex coronas continuo ordine parallelas vidiſſe, quorum omnium centrum erat ſol.

Snellius in libro de Cometa Anni 1618.

§. 7. Poſtquam huc uſque coronarum cauſas inveſtigavimus, nobis deinceps de parheliis, & paraſelenis eſt agendum; in quibus plura, & admiratione magis digna occurrunt, ſicuti facilè intelligi poteſt ſi figuræ infra delineatæ inſpiciantur: præter circulos enim admirabiles qui apparent, videre inſuper eſt non tantum duos parhelios ab utraque ſolis parte, qui ſoli ſuperioribus ſæculis annotati ſunt, ſed prætereà duos, vel tres, nonnunquam

etiam 4 alios, ut in phænomeno Hevelii A. 1661. obſervato: mirum autem videri poteſt, unde acciderit, ut Ariſtoteles, & tot ſæculis poſt Cardanus ſcripſerint, nunquam plures quam duos parhelios ſimul apparuiſſe; cum non ſit veriſimile illud quod intra paucos annos ſæpius accidit, nempe 5, 6, vel 7. parhelios eodem apparuiſſe tempore, nunquam intra tot ſæcula fuiſſe viſum: ſed hujus rei cauſa eſſe poteſt, quod duo parhelii laterales, qui ſemper lucidiſſimi apparent, ſoli ab imperitis obſervatoribus annotati, & pro parheliis habiti fuerint; dum reliqui plerumque languidi apparent; ſed ab illis qui accuratius obſervationes inſtituerunt, illi omnes parhelii dicuntur, qui certum obtinent locum, etiamſi tam parum luminis habeant, ut ignari crederent eſſe nubeculas. Quanquam autem maxima inter parhelios animadvertatur diverſitas, quædam tamen habent in quibus conveniunt. Quare recte me facturum arbitror ſi primum aggrediar explicationem phænomeni maxime primarii: & hujus dum inquiro cauſas, ſimul mentionem faciam aliorum, quatenus huic phænomeno commune quid habent; quæ autem præterea nova in cæteris offerentur, ea ſigillatim poſteà excutiam. Proponatur itaque phænomenum Romanum, A. 1629. die 20. Martii a Scheinero obſervatum; de quo circa illud tempus Carteſius, Gaſſendusque egerunt, e quorum libris petitam cum deſcriptione figuram oculis hic ſubjicio.

Carteſ. Meteor. C. x. §. VIII. *A obſervator Romanus.* B *vertex loco obſervatoris incumbens.* C *Sol verus obſervatus.* AB *planum verticale, in quo & oculus obſervatoris, & ſol obſervatus exiſtunt, in quo & vertex loci* B *jacet, ideoque omnia per lineam* Vide Fig. 5. *verticalem* AB *repræſentantur: in hanc enim totum planum verticale procumbit. Circa Solem* C *apparuere duæ incompletæ Irides eidem homocentricæ, diverſicolores, quarum minor, ſive interior* DEF, *plenior & perfectior fuit, curta tamen ſive aperta à* D *ad* F, *& in perpetuo*

conatu

conatu ſeſe claudendi ſtabat, & quandoque claudebat, ſed mox denuo aperiebat. Altera, ſed debilis ſemper, & vix conſpicabilis, fuit GHI, *exterior & ſecundaria, variegata tamen & ipſa ſuis coloribus, ſed admodum inſtabilis. Tertia, & unicolor, eaque valde magna Iris, fuit* KLMN, *tota alba, quales ſæpe viſuntur in paraſelenis circa lunam. hæc fuit arcus excentricus integer ab initio ſolis per medium incedens, circa finem tamen ab* M *verſus* N *debilis & lacer, imo quaſi nullus. Cæterum in communibus circuli hujus interſectionibus cum Iride exteriore* GHI *emerſerunt duo parhelia non uſque adeo perfecta,* N & K; *quorum hoc debilius, illud autem fortius & luculentius ſplendeſcebat: amborum medius nitor æmulabatur ſolarem, ſed latera coloribus Iridis pingebantur; neque rotundi ac præciſi, ſed inæquales & lacunoſi ipſorum ambitus cernebantur.* N, *inquietum ſpectrum, ejaculabatur caudam ſpiſſam ſubigneam* NP, *cum jugi reciprocatione.* L & M *fuere trans Zenith* B, *prioribus minus vivaces, ſed rotundiores & albi, inſtar circuli ſui cui inhærebant, lac ſeu argentum purum exprimentes; quanquam* M *mediâ tertiâ jam prope diſparuerat, nec niſi exigua ſui veſtigia ſubinde præbuit; quippe & circulus ex illa parte defecerat. Sol* N *defecit ante Solem* K, *illoque deficiente roborabatur* K, *qui omnium ultimus diſparuit, &c.*

§. 9. Ut rectè percipiamus, quo pacto hoc phænomenon apparuerit, cogitandum eſt, magnam, eamque albam iridem KLMN per ſolem verum tranſeuntem, fuiſſe circulum horizonti parallelum, cujus polus fuerit punctum B vertici ſpectatoris ſuperius imminens. Quod enim in figura apparet, quaſi ſpectator propior fuerit lateri LM, quam KN, credendum eſt, illud errore quodam perperam ſic delineatum fuiſſe, cum in omnibus obſervationibus quæ poſteà ſunt factæ, in quibus talis albus circulus, ejuſque poſitio annotatur, ille ſemper horizonti fuit parallelus; licet non omnino repugnet ut paululum

lulum inclinetur, ſicut poſteà demonſtrabimus; locus igitur ſpectatoris A, intelligi debet perpendiculariter ſubjectus puncto B, ita ut quando aſpicit Soles C, K, N, alios duos L & M, poſt tergum habeat.

§. 10. Præterea animadvertendum colores, qui in circulis DEF, GKN, dicuntur exſtitiſſe, eodem ordine fuiſſe poſitos, ac in Coronis, de quibus ſuprà memoravimus; ruber nempe proximus Soli erat, uti liquet ex deſcriptione a Scheinero facta phænomeni A. 1630. quæ inferius videri poterit. Unde conſtat diametrum circuli interioris etiam fuiſſe præterpropter 45 graduum, quæ eſt ordinaria Coronæ magnitudo: etiamſi crediderim in phænomeno Anni 1629 minorem fuiſſe circuli exterioris diametrum diametro exterioris circuli in illo Anni 1630. ſicuti ex figura liquet, & demonſtrari poteſt: circa hanc figuram notandum inſuper eſt caudam Parhelii N, intra magnum circulum KLMN, depingendam, ſicuti Hevelius rectius obſervavit Anno 1661. quod phænomenum inferius adjungetur; verum ita a Scheinero delineatus fuit, ut exprimeret caudam recta a Sole averſam fuiſſe; Sol & Parhelii nimis magni quoque depicti ſunt ratione circulorum; immò circuli ipſi nimis lati ratione diametrorum; Solis enim diameter revera tantum $\frac{1}{50}$ circiter eſſe deberet diametri coronæ DEF, quæ ſcilicet eſt 45. graduum; cui latitudo circuli KLM ferè eſt æqualis; nam ex explicatione phænomeni Anni 1630. patet, hanc circuli latitudinem Solis diametrum non æquaſſe.

Vide Fig. 5. Tab. IV.

§. 11. His de figura præmiſſis, inquiramus porrò in cauſas horum mirabilium phænomenum. Facile equidem percepi rotundas guttas ſive ex aqua, ſive partim ex aqua, partim ex nive, huic rei non quadrare; nec dubitavi tamen, cum in omnibus Parheliorum obſervationibus Coronæ etiam apparuerint, quin utrorumque cauſæ non multum a ſe invicem differrent; poſtquam ergo perpendiſſem, quænam figura præter ſphæricam grandini

dini in aëre aſſignari poſſet, nullam cylindrica ſimpliciorem inveni; revera etiam ſæpius videram nivi plurimas oblongas, ſed tenuiſſimas particulas commixtas eſſe; cumque parvæ guttæ ſphæricæ ad Coronam producendam ſufficiant, exiſtimavi parvos cylindros, ſed in aëre confertos ſimile quid efficere poſſe. Animadvertebam inſuper *Carteſium* obſervaſſe quaſdam columnulas vel cylindrulos ex glacie confectos in terram deciduos, quorumque utraque extremitas ſtellulis ſex radiis diſtinctis exornabatur. Figuram ergo & poſitionem horum cylindrorum examinans, & perpendens illos non commode generari, niſi ad perpendiculum erigantur, & præterea illis idem nonnunquam quod granis rotundis contingere, ſcilicet ut calore Solis vel aëris ex parte diſſolvantur; brevi deprehendi, omne quod in phænomeno Romano accidit ab his ſolis minoribus cylindrulis produci potuiſſe; & clariſſimè quidem, poſteà quam vitreum cylindrum ſatis capacem aqua impleviſſem, ſolido cylindro ligneo minus craſſo intus ſuſpenſo. Eum enim variè Soli oculoque meo objiciens, tum circulum magnum album ex reflexione ſola cylindrorum, tum Parhelia ad latus Solis ex geminata refractione, quæ verò in parte oppoſita, ex refractionibus duabus, & reflexione ortum ducere deprehendi, ea nimirum ratione quam deinceps exponemus.

§. 12. Pauca autem de generatione illorum, deque poſitu, figura ac magnitudine præmittenda ſunt. Sicuti ſupra monui ſphærica grana, quæ coronam efficiunt, inſtar ſeminis raparum, exigua vel minora eſſe, ut ab aſcendentibus halitibus ſuſtineri queant; ita ſuppono hos cylindrulos eadem de cauſa admodum exiguos, & tenues; quæ tenuitas tamen nequaquam figuræ perfectioni obſtat, ſed contra illi potius conducit. Hi primo non aliter ac Coronæ grana formari debent ex nive quam tenuiſſima, hoc eſt, ex minimis & fere viſum effugientibus particulis

ticulis nebulæ congelatæ, (nix enim nihil eſt, præter glaciei particulas) ex quibus particulis in unum collectis ubi primum ſphærula prodierit, facile intelligitur inferiori hujus ſphærulæ parti plurimas ſeſe adjuncturas particulas, non verò ad latera; cum enim nebularum particulæ, ſimul cum ſurſum vergentibus halitibus celeriter aſcendant, & ſphærulæ contrà gravitate ſua aſcenſui obnitantur, vel minimum tardius aſcendant, non alienum à vero eſt particulas nebulæ, quæ in inferiorem ſphærulæ partem impingunt ei adhærentes oblongam paulatim ſphærulæ figuram facere, eamque in Cylindrulum convertere; cum contrà aliæ nebulæ particulæ, quæ ad latus feruntur, facile illam præterlabantur. Cum ergo hi Cylindri denſo agmine, nec multum a ſe invicem diſtantes producantur, aëre, qui illos ſuſtinet, per illorum interſtitia tranſeunte, non abſonum eſt, illos in ſitu perpendiculari, hoc eſt, in eodem ſitu, quo producti fuere, manſuros: ſed quando vento, vel alia de cauſa à ſe invicem divelluntur, non ſemper ſitum perpendicularem retenturos, ſed ad omnes ſeſe poſitiones converſuros. Cum autem calor Solis vel aëris, eodem modo ac in granis Coronam conſtituentibus vidimus, hos cylindrulos exterius ex parte liquefaciat, manet in medio minimus cylindrulus ex tenuiſſima nive, undequaque aquæ immerſus; & eadem, quam illic attulimus, cauſſa efficiet, ut poſtquam ad certam quantitatem liquefacti fuerint, cylindrus internus perfecte rotundetur, & quod liquefactum eſt, non facile rurſus congeletur: notandum tamen ſi poſtmodum illa aqua iterum in glaciem conſtringatur, fieri forte poſſe, ut illa glacies ſatis pellucida, & ſuperficie ſatis polita ſit ad efficiendas refractiones, & reflexiones, de quibus deinceps agemus.

§. 13. Ut ergo ad phænomenon Romanum veniamus: Primo dico, magnum illum albicantem circulum, qui in eo apparuit, produci ex reflexione radiorum ſolis, in ſuper-

ſuperficiem externam Cylindrorum ad perpendiculum erectorum incidentium, & quando plurimi tales cylindruli in aere ſuſpenduntur, in quos Sol radios ſuos vibrat, neceſſario magnum circulum album appariturum per Solem tranſeuntem, & horizonti parallelum, hoc eſt, æqualiter ſuprà eum elevatum, & cujus latitudo ejuſdem cum Sole ſit diametri. Quod ut evidentius appareat, conſideremus primò majorem cylindrum, qui unum horum minorum cylindrorum referat, & perpendamus qua ratione Solis radii ab eo reflectantur. In Cylindrum ABCD perpendiculariter erectum incidat radius a ſolis centro adveniens FE, qui reflectatur ſecundum rectam EG; dico FE, EG, æqualibus angulis inclinari ad planum horizontis: ſit enim latus cylindri per punctum reflexionis E, ductum HK, ſecundum quod tangi cylindrus intelligatur plano LI; conſtat itaque radium FE, eodem modo a plano hoc reflecti, atque a cylindro ABCD; Hoc enim in Catoptricis, Dioptricisque axiomatis loco eſt, qualiſcunque fuerit curvæ ſuperficies reflectens. Quod ſi jam plano LI, aliud planum ad rectos angulos inſiſtere ponatur, quod in ſe contineat radios FE, EG, conſtat etiam ex legibus catoptricis, utriuſque plane communem interſectionem, quæ ſit recta MN, tranſire per punctum reflexionis E, anguloſque æquales eſſe FEM, GEN. Intelligatur itaque ſphærica ſuperficies, cujus E centrum, quæ abſcindat rectas æquales EF, EM, EO; itemque EG, EN, EP, quarum nempè EO, EP, ſint in recta HK, ſintque circulorum maximorum in ſphæræ ſuperficie arcus FO, FM, OM, itemque GP, GN, PN. Quia igitur planum per FMNG ductum rectum eſt ad planum LI, & utrumque per ſphæræ centrum E tranſit; ſunt autem in plano per FMNG, arcus FM, GN; & in plano LI, arcus MO, NP; erunt in triangulo ſphærico FMO, rectus angulus M, & in triangulo GNP, rectus angulus N. Latus autem MO æquale eſt lateri NP,

Vide Fig. VI.

quia angulus MEO æqualis angulo NEP. Itemque latus MF æquale lateri GN, quia æquales anguli FEM, GEN. Itaque & latus reliquum FO, æquale erit lateri reliquo GP; ac proinde angulus FEO æqualis angulo GEP; quorum complementa ad angulum rectum cum ſint anguli inclinationis ad horizontem radiorum FE, EG etiam iſti inclinationis anguli æquales erunt; quod erat demonſtrandum. Eadem eſt demonſtratio cum radius FE & intra cylindrum, & a ſuperficie ejus reflectitur, quod ad Parhelia pertinet, ut oſtendatur ea in circulo albo cerni debere.

§. 14. Hinc ergo patet, quando aër minimis illis cylindris ad perpendiculum erectis refertus eſt, radios ex ſolis centro, vel ex alio quolibet ejus diſci puncto in illos cylindros incidentes, reflecti verſus terram, eodem prorſus angulo quo idem punctum ſuprà horizontem elevatum eſt; quoniam ob immenſam ſolis diſtantiam, angulus incidentiæ FEO, in unumquemque cylindrum ſive minus altum incidens, ejuſdem eſt magnitudinis. Qui ergo terræ inſiſtit, Solis reflexionem tantum ex illis cylindris percipere poteſt, a quibus recta ad ſpectatoris oculum ducta angulum efficit cum plano horizontis æqualem Solis altitudini; ſi ergo quaquaverſum lineæ ex oculo ſpectatoris ducantur, quæ ſingulæ angulos cum plano horizontis efficiant Solis altitudini æquales, certum eſt illas omnes circulum in aëre effecturas horizonti parallelum. Manifeſtum itaque hunc ſpectatorem circulum lucentem album horizonti parallelum viſurum, in quo verus etiam Sol apparebit. Facile etiam percipi poteſt hujus circuli latitudinem æqualem fore diametro Solis; ſicuti enim de Solis centro diximus, ſic ob eandem cauſam, quodlibet Solis punctum cylindrulorum circulum eadem cum illo puncto altitudine apparentem illuminabit. Quo ipſo pars inferior, & ſuperior totius albi circuli, æquè a ſe invicem diſtabit, ac inferior & ſupe-

ſuperior Solis pars. Notatu quoque dignum eſt, Sole ſupra horizontem aſcendente vel deſcendente, hunc circulum itidem aſcenſurum vel deſcenſurum, ideoque majorem vel minorem fieri; ut & diverſos ſpectatores, etiamſi longè a ſe invicem remoti ſint, ſingulos tamen viſuros circulum ſibi peculiarem qui per Solem tranſit, ſicuti in Iride accidit. Quod nequaquam fieri poſſet in circulo quem *Carteſius* nobis ut cauſam hujus phænomeni proponit; hunc enim eſſe ſupponit magnum ex glacie ſolida annulum in aëre ſuſpenſum: ſed hic minimè eodem tempore diverſorum capiti imminere poteſt; præterquam quod nulla ſit ratio quare per Solem tranſeat, aliquando etiam per horas duas treſve continuas; ſicuti in ſequentibus obſervationibus videre eſt. Obſervandum prætereà, nullas denſiores nubes in aëre videri quando hi circuli apparent, ſed ita raras tantum, ut vel non, vel vix ſint conſpicuæ; in pleriſque enim obſervationibus invenimus relatum, cœlum fuiſſe ſerenum. Quod in hypotheſi noſtra nequaquam mirum videbitur conſideranti hos parvulos cylindros raram tantum & æqualiter extenſam nubem producere, per quam Sol, immo cæruleus cœli color facile appareant. Quod autem nonnunquam horum circulorum partes languidæ vel omnino non appareant, accidit tantum defectu materiæ, ſive horum cylindrulorum. Niſi quod pars quæ eſt intrà Coronam, etiamſi ibi materiæ ſatis reperiatur, minus videatur, & idcirco in quibuſdam obſervationibus non annotetur, propter vicinam Solis claritatem, & præcipuè quia circulus albus proximè extrà Coronæ ambitum ſeſe lucidiorem multò quam in aliis partibus exhibet; cujus rei cauſa percipietur, ubi de duobus Parheliis lateralibus N, & K, acturi ſumus. Fig. V.

§. 15. Ad quos ut accedamus, ajo eoſdem illos cylindrulos ad perpendiculum erectos, qui album efficiunt circulum, hos etiam duos Parhelios geminata refractione

radiorum Solis producere, eadem prorſus ratione, qua ſuprà vidimus rotundas guttas cum nivalibus nucleis in eorum medio poſitis Coronam producere. Cum enim horum cylindrorum pars quædam exterior liquefacta ſit, & complectatur oblongos nivales minores cylindros, Sol eadem de cauſa videri non poteſt per cylindros, qui partem circuli albi KN, conſtituunt; ſed quidem per illos qui extra illam ſunt; unde etiam fit ut diſtantia horum duorum Parheliorum eò major fiat, quo nucleus nivalis major eſt ratione totius cylindri. Sol porrò luucidiſſimus apparet per cylindrulos qui extra partem KN poſiti, ei tamen proximi ſunt; deinde per illos qui remotiores, ſed debilior magis magiſque uſque ad certum terminum; quod efficit, ut hi Parhelii cum cauda obſerventur: ſed tamen cum vividiores Iridis colores in cylindris, qui proximè extrà KN ſunt, fiant conſpicui, propter eandem prorſus cauſam a qua colores Coronæ produci diximus; hi colores itidem efficient ut diſtinguatur Parhelius a reliqua caudæ parte, quæ minus lucida, & parum colorata apparet; ſicut etiam Coronæ & Iridi parva tantum adſcribitur latitudo, etiamſi ad latus alterum terminatæ non ſint. Hæ autem caudæ, ut & Parhelii quibus adhærent, (uti ex ſequentibus patebit) ſemper verſus album vergunt circulum, & illum quouſque ſe extendunt illuſtriorem reddunt; quod enim cauda Parhelii N, extrà Circulum delineata ſit, vel errore accidit, vel quia obſervator hoc modo deſignare voluit illam a Sole averſam fuiſſe: quod apud Hevelium in phænomeno Anni 1661. accuratius annotatum fuit. Idcircò quamvis non referatur Parhelius K caudam habuiſſe, pars tamen circuli albi ejus cauda fuit: ſed quia hic Parhelius altero debilior fuiſſe dicitur, ejus cauda parum luminis habuit. Quod autem Parhelii ad Solis latera, ut & Paraſelenæ ad utramque Lunæ partem caudis ſint ornatæ, liquet ex obſervationibus Hevelii, in quibus omnes videntur

Vide Fig. V.

dentur caudis inſtructæ ut & ex mea. Tandem etiam cauſam maximi ſplendoris Parhelii, (ſicuti hic dicitur quod *amborum medius nitor æmulabatur ſolarem*; facile percipimus, ſi cogitemus, unumquemque cylindrum ſecundum totam longitudinem ſuam ſplendere: cum contrà rotundæ guttæ in Corona, vel in Iride rotunda tantum quid lucis emittant, ita ut unus ex minimis cylindris fortè plus luminis, quam decem rotundæ guttæ, exhibeat. Quod ſi igitur magna cylindrulorum copia in aëre ſuſpenſa ſit, nihil mirum eſt luculentas Solis imagines exiſtere: ſed jam hæc quæ dicta ſunt demonſtremus refractionibus, quas in trajectu cylindrorum iſtorum patiuntur radii Solares, accuratè expenſis; ac primo quidem oſtendemus hos Parhelios ſimul cum caudis in magno albo circulo neceſſario conſpici.

§. 16. Sit ABCD, unus ex his cylindris in aëre ad perpendiculum erectis in cujus aqueam ſuperficiem Solis radius EF incidat, qui in F refractus tendet intra cylindrum, ut in FG; in G verò, ubi rurſus ſuperficiei aqueæ occurrit, iterum refractus extra cylindrum egredietur, puta ſecundum GH, ajo hunc radium GH, neceſſariò cum horizontis plano facturum angulum æqualem illi, quem radii Solis EF, cum eodem plano faciunt, hoc eſt, angulum æqualem altitudini Solis. Ducto enim plano axi cylindri parallelo, ADCB, quod tranſeat per puncta F, G, patet hoc planum æqualibus utrimque occurrere angulis ſuperficiei cylindricæ, ſecundum lineas AB, DC, ſibi mutuo parallelas. Cum ergo in hoc plano ſit radius FG, intra dictas parallelas AB, DC, contentus, neceſſe eſt & hunc in punctis F, & G, cylindricæ ſuperficiei æquali inclinatione occurrere, ac facere ad dictas parallelas angulos æquales, GFC, FGA: Undè porrò manifeſtius eſt, quam ut demonſtrationem exigat, radii GF refractionem GH eodem angulo deorſum ferri debere, quo ejuſdem refractio FE ſurſum fertur,

Vide Fig. VII.

tur, hoc eſt, angulos æquales fore, quos dictæ refractiones efficiunt cum cylindri lateribus. Eſt autem radii GF refractio ſecundum FE, cum ipſius EF, refractio ponatur eſſe FG, ex nota refractionum proprietate. Æquales itaque erunt anguli EFD, BGH. Quod ſi vero & plana intelliguntur duci, alterum per rectam DC, & radium EF, alterum per AB & radium GH, perſpicuum eſt, & hæc utraque æqualibus angulis inclinata fore ad planum ABCD, in quo radius GF: Quorum quidem angulorum menſura ſunt anguli KCB, LBC, quos nimirum efficiunt interſectiones dictorum planorum cum plano baſis cylindri. Unde itaque & dicti anguli KCB, LBC, æquales erunt. Quandoquidem autem angulos EFD, BGH, æquales eſſe apparuit, liquet hinc etiam æqualibus angulis ad planum horizontis inclinatos eſſe radium EF a Sole venientem, & GH, qui poſt geminas refractiones è cylindro egreditur. Quare lux Solis per diaphanos cylindros ita tranſmiſſa, non poterit ad ſpectatoris oculum pervenire, niſi ab iis cylindris, a quibus recta ad oculum ducta angulum cum horizontis plano efficit æqualem illi, qui eſt Solis altitudinis, hoc eſt, niſi ab iiſdem, qui etiam circulo albo materiam præbent: adeoque Parhelia bina ex tali refractione generata, non poſſunt niſi in dicto circulo magno conſpici.

§. 17. Ut nunc examinemus quo loco, quaque a Sole diſtantia conſpici debeant, conſiderandus eſt Solis radius, qui per cylindrum tranſiens cylindrulum niveum qui in medio eſt aquei ſtringit: poſito enim in Figura ſuperiori radium FG dictum niveum cylindrulum tangere; & idcirco etiam rectam CB, quæ in plano baſeos ſubjacet ipſi FG; ſi ergo in eodem plano baſeos rectam ONM ducamus, per centrum baſeos cylindruli N parallelam KC, quæ ſubjacet radio a Sole venienti EF; quæ ONM occurrat in M rectæ BL, quæ ſubjacet radio GH; erit BMN angulus, quem faciunt plana duo verticalia, quo-

Vide Fig. VII.

quorum alterum per Solem, alterum per Parhelium, utraque vero per oculum ſpectatoris tranſire intelliguntur. Quamobrem etiam pars circuli albi CN, inter Solem & unum ex lateralibus Parheliis totidem gradus ſui circuli continebit, quot dictus angulus BMN. Hic autem angulus, vel diſtantia Parhelii lateralis a Sole eò eſt major, quo craſſior eſt cylindrulus niveus pro ratione aquei. Rurſuſque poſita certa proportione illius ad hunc, major fit eadem diſtantia, quo magis alte ſol ſuprà horizontem ſcandit, ſicuti ex ſequentibus duabus tribuſve tabellis videre eſt, quæ quo pacto conſtructæ ſint ad finem horum dicetur, ne nimis prolixæ demonſtrationi nunc immoremur.

Vide Fig. V.

Altit. Solis Gr.	*Angulus verticalium per Solem & Parhelium lateralem, cum cylindrus aqueus ad glaciatum ſecundum diametrum, ut* 1000 *ad* 473. Gr.	′	*Altit. Solis* Gr.	*Idem angulus cum cylindrorum aquei ad glaciatum diametri ut* 1000 *ad* 480. Gr.	′	*Grad. Alt. Solis.*	*Idem angulus cum cylindrorum aquei ad glaciatum diametri ut* 1000 *ad* 680. Gr.	′
0.	22.	0	0	22.	30	0	45.	
5. 0	22.	10	5	22.	38	5	45.	26
10. 0	22.	38	10	23.	8	10	46.	44
15. 0	23.	28	15	24.	0	15	49.	4
20. 0	24.	42	20	25.	16	20	52.	46
25. 0	26.	26	25	27.	4	25	58.	24
30. 0	28.	48	30	29.	26	30	67.	42
35. 0	31.	58	35	32.	42	35	94.	22
40. 0	36.	18	40	37.	10			
45. 0	42.	18	45	43.	14			
50. 0	51.	0	50	52.	26			
55. 0	64.	48	55	66.	54			
60. 0	92.	34	60	98.	24			

Ulterius Parhelium videri nequit in hoc cylindro.

Si ponatur proportio 1000 *ad* 714, *tum in alt. Solis* 25 *gr. fiet idem angulus* 88. 58; *quo major nequit eſſe in hac Solis altitudine. hoc ad duo Parhelia Heveliana.*

§. 18.

§. 18. Ex his autem tabellis patet, quod ſi varii cylindruli ſat magna copia ſupra ſe invicem poſiti ſint, quorum hi minus, illi magis liquefacti ſint, præter duos Parhelios ad Solis latera, duos vel plures ulterius, ſed tamen in circulo albo conſpici poſſe: quod etiam confirmant obſervationes Hevelii Anni 1661. 20. Februarii, & Scheineri Anni 1630. de quibus mox plura. Liquet itidem ex iiſdem tabellis, cylindris in eodem manentibus ſitu, Sole vero altius ſupra Horizontem aſcendente, diſtantiam duorum Parheliorum, qui inde producti fuerunt, a Sole, & a ſe invicem majorem fieri; vel contrà minorem Sole deſcendente; quod etiam revera obſervavi, ſicuti in narratione illius obſervationis referam. Sed major inſuper mutatio diſtantiæ horum Parheliorum accidere poteſt; ſi cylindruli ulterius liquefiant: qua ex re quidpiam notatu admodum dignum accidit priſcis temporibus; refert enim *Jul. Obſequens*, *Auguſti Cæſaris ætate*, *M. Lepido*, & *Munatio Planco* Coss. *tres Soles viſos*, *eoſque fuiſſe mox in unum orbem contractos*; quod quidem nunquam aliàs obſervatum legi; ſed quomodo evenerit facilè intelligimus, cum nihil aliud ad hoc requiratur, quam calor qui priorem aëris temperiem vincens cylindrorum nucleos totos liquefaciat; hoc enim brevi tempore perficere poteſt, eoque Parhelia utraque magis magiſque in Solis viciniam attrahere, donec tandem totis cylindrulis reſolutis, atque in rotundas aquæ guttulas abeuntibus, nullus præter verum Solem ſuperſit. Atque hoc cum tam aptè per hypotheſin noſtram explicetur, non puto quemquam in dubium vocaturum quin verborum *Obſequentis* is verus ſenſus ſit, quem ſecuti ſumus; licet in alium quoque vertere ea tentarit Gaſſendus, quaſi exiſtentibus prius Parheliis, circulus deinde exſtiterit, cujus ambitu illi tenerentur: neque enim hi recte ſic dicti fuiſſent tres in orbem unum contracti, ſed duo potius,

potius, neque etiam inſolitum adeò ſpectaculum fuiſſet. Accedit, quod & triumviratus imaginem tali prodigio ſignificari voluere, ſicut patet ex ſequenti *Dionis Caſſii* loco, cum altero *Obſequentis* collato, ſic enim *Dio* lib. XLV. *Solis lumen aliquando diminui exſtinguique, aliquando rurſus triplici orbe effulgere viſum* (ita enim intelligendum quod ait τότε δὲ ἐν τρισὶ κύκλοις φαντάζεσθαι.) *Quorum unum corona ſpicea ignita circumdabat. Quo quæ eventura erant prænunciabatur.* Caudarum longitudinem ſummam quæ his Parheliis lateralibus adhærent accuratè etiam definire poſſemus, ſed cum quo longius a Parheliis recedunt, eò magis extenuetur eorum fulgor, neque verus terminus proinde obſervatione facile comprehendatur, ſufficiat ſcire, eas uſque ad quadrantem circiter circuli albi, initium a vero Sole ſumendo, revera excurrere; & paulò quoque ulterius, prout major fuerit Solis altitudo. Cum tamen adeò debilis ſæpe eorum lux eſſe ſoleat, ut tantum pro parte dicti circuli ab obſervatoribus accipiantur.

§. 19. De Coronis autem, quæ cum Parheliis hiſce lateralibus ſemper ferè apparent, hoc loco nunc eſt videndum. Licet enim Coronæ abſque Parheliis quidem conſpiciuntur, nunquam tamen Parhelia abſque Corona per ea tranſeunte, niſi aliquando tam debilis ſit, ut vix animadverti queat. Quod itaque cum fortuito non accidat, a certa quadam cauſa producitur. Veriſimile eſt quando cylindruli in aëre producuntur, eodem etiam tempore ſphærulas ſemigelatas reperiri quæ materiam Coronis ſuppeditant; ſed haud facilè concipere poſſumus qua de cauſa ad talem præciſe proportionem liquefactæ ſint; ut Coronam per ipſos duos Parhelios extendant. Primo enim, licet ſupponamus rotunda grana & oblonga ad eandem proportionem ſecundum diametrum liquefacta eſſe, Parhelia nihilominus extrà Coronam, cadent uti ex ſuperioribus Abacis colligi poteſt; Nam cum

proportio diametri totius cylindri, ad illam interioris nuclei, eſt ut 1000. ad 473. diſtantia Parhelii ad varias Solis altitudines erit 22, 28, 36, 51. & plurium graduum circuli majoris albi, cum Corona ſemper ſit 44. grad. quando rotundæ guttæ ad illam proportionem liquefactæ ſunt. Deinde & hoc reputandum, quod intrà 3, 4ve horas per quas Parhelia apparent, eadem, aſcenſu, & deſcenſu Solis ſupra horizontem longius a ſe invicem recedant, vel proprius accedant, ſicuti paulo ante annotatum fuit; quamobrem etiam Corona major minorve fieri deberet, cum ſemper per Parhelios tranſeat; cujus rei tamen in granis rotundis nulla cauſa inveniri poteſt.

§. 20. At verò præter rotunda grana, etiam cylindros illos, quos incerto poſitu per aërem fluitare ſuperius dixi, Coronis producendis aptos eſſe certum eſt: hi enim intrà oculum & Solem in omni poſitionum genere fluitantes, propter nucleos interiores nivales, Solis radios non tranſmittunt, niſi extrà certum angulum a Sole diſtent; qui angulus determinatur a cylindrulis in quorum latera Solis radii perpendiculariter incidunt; alii enim in quorum latera iidem radii obliquè vibrantur, longius adhuc a Sole remoti eſſe debent, ut radios ad oculos noſtros tranſmittere poſſint; ſicuti ex propoſitis ſuprà tabellis liquet, ſi quod in illis eſt altitudo ſolis ſumitur pro ejuſdem altitudine ſuprà planum baſeos horum cylindrorum. Ita ut hi cylindri non aliter ac grana rotunda Coronam efficere valeant, quæ ad latus verſus Solem terminetur, & colore gaudeat rubro; & credibile eſt Coronas quæ eodem tempore cum Parheliis apparent, ab his produci cauſis.

Primò. Quia hoc modo ſola cylindrulorum generatio neceſſaria eſt. Secundo quia ſæpè cum Parheliis Coronæ vividioribus coloribus inſignitæ conſpiciuntur, quam quando nulli ſunt Parhelii; qui vividiores colores commodius

modius multo a cylindrulis producuntur, quia longe majori luce ſplendent per totam longitudinem tranſmiſſa Solis imagine, quam rotundæ guttulæ, quæ in uno tantum quaſi puncto eam exhibent; ſed ut ad propoſitum redeamus, nulla eſt cauſa, quare hæc Corona a cylindris producta per Parhelios potius tranſeat, quam illa quæ granis rotundis originem ſuam debet; eademque difficultas quæ a mutatione diſtantiæ Parheliorum oritur hic æque obtinet ac illic. Quocirca nullam cauſam habemus affirmandi, Coronam ab his incerto ordine diſpoſitis cylindrulis productam eam eſſe, quæ per Parhelios tranſit. Quod verò Romanum attinet phænomenum, haud dubito quin interior Corona DEF, a talibus cylindrulis fuerit generata; ita ut hæc phænomeni pars haud levem difficultatem continere videatur. Vide Fig. V. ut & Fig. VI. Tab. IV.

§. 21. Verum tamen & hanc facilè ſuperari apparebit, ſi penitius figuram iſtorum cylindrulorum inſpiciamus. Latera eorum hactenus tantum conſideravimus, nunc verò & extremas utrinque partes quales ſint videamus. Nam ſi planis baſibus terminari credamus, id quidem naturæ haud quaquam conſentaneum fuerit; ſed quia neceſſario ſuperius & inferius non aliter ac ad latera liquefacti ſunt, & undiquaque ad eandem quantitatem, certiſſimè aqua ad utraſque extremitates quantum potuit rotundam affectabit figuram; unde nucleus interior etiam ab utraque parte in hemiſphærium, vel ſemiellipſin efformatur: ita ut figura totius cylindri cum nucleo debeat eſſe qualis hic conſpici poteſt majori typo. Vide Fig. 8. Unde fiet ut non tantum cylindri qui juxta Solem jacent & Parhelios producunt radios tranſmittant ad oculos noſtros, ſed etiam ex perpendicularibus illi qui proximè extrà certum angulum ſuprà, infrà, & ad latera Solis animadvertuntur, quique idcirco etiam Coronam circa Solem producant. Per primos nempè ſuperiores tranſit radius ut hic DCBA, qui nucleum tangit in H, & ſimiliter per pro-

ximum inferiorum radius EFGA, qui nucleum tangit in K. Quia verò figura convexitatis in BCL, & MGF, non accuratè cognita eſt, fruſtrà horum radiorum refractionem definire conaremur, & multò minus illorum, qui verſus latera in hæc incidunt convexa; attamen cum vitreum cylindrum ad hanc formam confici curaſſem, qui nempe medietatem ejus, qui Fig. 8. depictus eſt, referret, atque intus, quod ſufficit, cylindri opaci HK medietatem intra aquam ſuſpendiſſem, qui undique æqualiter a vitri ſuperficie diſtaret, reipſa cognovi, ad Solis radios factitium hunc cylindrum erectum opponendo, atque in omnem partem circumducendo, ea lege eum Solis radios tranſmittere ut æquales ferè ſint anguli BAN, GAN; omneſque alii quibus radii tranſmiſſi, opacumque cylindrum ſtringentes inclinantur ad axem AN, qui ab oculo ad Solem extenditur.

§. 22. Quod cum eodem prorſus modo cylindrulis accidat, Corona inde præterpropter rotunda producetur. Ita ut iidem erecti cylindruli, qui magno circulo albo, ut & Parheliis a latere fulgentibus materiam præbent, Coronas itidem per Parhelios tranſeuntes, producant: ſi ergo conſideremus, cylindrulorum figuram neceſſario talem eſſe qualem diximus, & ſimul radios per binas illorum extremitates tranſeuntes, circuitus coloratos producturos, haud dubitabimus, quin hi circuitus ſint ipſæ Coronæ, ſecus enim irregulares & minimè rotundi inde orientur. Etiamſi autem oculus perfectæ rotunditatis defectum vix animadvertere queat, accidere poteſt, ut Coronæ Diameter major ſit ab una, quam ab altera parte; ſicuti in una ex ſequentibus obſervationibus ita factum reperitur. Quando enim in obſervatione A. 1630. Romæ facta, duo circuli Soli proximi, dicuntur ſe mutuò ſuperius & inferius interſecaſſe, & Parhelia in ambobus exterioribus arcubus fulſiſſe, in hac, inquam, omninò veriſimile eſt, loco duorum circulorum

ſe

ſe invicem interſecantium, concipiendum primo oblongum aliquantulum circulum, in quo duo erant Parhelia, producta ſcilicet a perpendiculariter erectis cylindrulis; & deinde alterum rotundiorem oblongum hunc ſuperius & inferius tangentem; qui ex confuſè jacentibus cylindris, vel rotundis granis originem ſuam ducebat. Figura enim quam hi duo efficiunt circuli, ita affinis eſt, illi binorum ſe mutuo interſecantium, ut vix diſtingui poſſit; & præterea vero admodum videtur conſentaneum unum eundemque ambitum duo Parhelia continuiſſe. Vide Fig. 9.

§. 23. Circulus autem per Parhelia tranſiens languidus ſæpenumerò & evanidus apparet verſus ſuperiora & inferiora; ſed maxime lucidus ubi proximè Parhelia attingit, uti in multis Hevelii obſervationibus accurate annotatum fuit; cujus phænomeni cauſa etiam in ſupra dicto cylindro vitreo detegitur: radii enim per ſuperius vel inferius convexum tranſeuntes parvulam ſolummodo & rotundam Solis imaginem, non aliter ac grana rotunda, exhibent; ſed qui tranſeunt ubi cylindrica ſuperficies paulatim verſus convexitatem vergit, hi non ſecus ac illi qui Parhelia producunt vegetius & magis oblongum lumen ejaculantur. Quod idcirco a Parhelii loco aliquouſque verſus ſuperiora & inferiora Coronam lucidiorem & magis coloratam efficit.

§. 24. Explicatis hoc modo cauſis duarum Coronarum, quæ in phænomeno Romano fuerunt obſervatæ, progrediemur cauſas inveſtigando binorum Parheliorum qui in parte circuli albi poſtica viſi ſint, quos etiam dico originem ſuam ad perpendiculares cylindros referre, per eaſdem ſcilicet refractiones radiorum Solarium, quæ in Iride obſervantur: & animadvertendum eſt interiorem cylindrulum opacum nihil ad hos Parhelios producendos conferre, ſed contrà aliquando impedire quominus videantur, ſicuti poſteà demonſtrabitur: ſciendum eſt tamen interiorem cylindrum nivalem plane neceſſarium eſ-

ſe, utrumcunque ponatur exteriorem partem ſive ex aqua ſive ex glacie pellucida conſtare; cylindrus enim aqueus illico in rotundam converteretur guttam; ex pellucida vero glacie integri conſtare nequeunt, quia haud facilè cogitari poteſt illos omninò diaphanos fore, niſi primum plane fuiſſent liquefacti.

§. 25. Priuſquam verò de cylindrorum refractione agamus utile erit, qualis ea ſit in rotunda gutta intelligere, ſimul cum cauſa Iridis, quam Carteſius primus invenit. Sit ergo ABC, aquæ gutta, & DA, Solis radius in illam incidens, qui ab A verſus B refringatur, & a B rurſus verſus C reflectatur, ita ut AB, & BC ſint æquales; in C vero iterum refringatur, & tendat ad oculum E; ductis porrò CH, & EF, parallelis Solis radio DA, & angulo FEG facto æquali CEF, patet ex tabulis Carteſii angulum HCE variæ magnitudinis fore, prout radius DA ponitur diverſimode in ſuperficiem guttæ ABC incidere, nunquam tamen majorem fore gr. 41. 36. Quare nec anguli CEF, & FEG, gr. 41. 36. ſuperabunt. Unde fit ut nulla gutta extrà Conum CEG refractos ſolis radios ad oculum E mittat, ſed illæ tantum quæ ſunt intrà conum, ita tamen ut quæ proximæ ſunt ſuperficiei Conicæ CEG plurimos radios ad oculum deferant; quo ipſo confinium inter guttas lucidas & obſcuras extra conum eò apparet evidentius, efficitque ut rotundus appareat circulus, qui integer videretur niſi terræ ſuperficies obſtaret; quo fit, ut ſummum dimidius circulus, ubi Sol horizonti proximus eſt, conſpici queat. Hæc vera Iridis eſt cauſa, quam unuſquiſque experientiæ convenire animadvertet, ſi ſphæram vitream aqua repletam tali poſitione ad oculum Solemque exponat, ac hæc ſphærula ABC poſita eſt. Quod ſi concipiamus circulum hunc ABC, eſſe ſectionem horizonti parallelam erecti cylindri, quorum maxima multitudo proximè ad horizontem ſupponenda eſt, & radium Solis horizontalis

Vide Fig. 10.

ſis iiſdem cum refractionibus per illum tranſire, ac radius DABCE per rotundam guttam, ita ut efficiat angulum HCE, vel CEF ſummum gr. 41. 36. ſequitur ſimiliter nullum cylindrum extra angulum CEG, refractum Solis radium ad oculum E tranſmiſſurum; & illos qui proximi ſunt ſuperficiei ſuperiori plurimos jaculaturos radios: idcirco particula veluti Iridis in cylindris verſus C, & itidem verſus G conſpicietur, & arcus horizontis qui inter illas intercedit tot erit graduum, quot angulus CEG; hoc eſt, 83. grad. & hinc fiunt duo Parhelia, quæ multò lucidiora ſunt partibus Iridis, quia a cylindris producuntur, qui majorem ſplendorem, quam rotundæ guttæ tranſmittunt, ſicuti ſæpius antea dictum fuit. Et hæc quidem Sole in ipſo horizonte exiſtente.

§. 26. Sed quando ſuprà illum elevatus eſt, dico duos Parhelios neceſſario fore conſpicuos in eodem albo circulo, in quo priores apparere oſtendimus. Quod ut fiat manifeſtum, ſit cylindrus, ABDC, perpendiculari ſitu in aëre ſuſpenſus, inque eum cadat Solis radius EF, qui ad F refractus occurrat intrinſecus ſuperficiei cylindricæ in G, unde reflexus eidem ſuperficiei occurrat in H, atque hic iterum refractus tendat extrà cylindrum ſecundum rectam HK; dico radios EF, HK, æqualibus angulis ad planum horizontis inclinatos eſſe. Vide Fig. 11.

§. 27. Sciendum enim primò eſt, radium FG, reflexum in GH, ita ferri propter leges reflexionis ad angulos æquales quæ fit intus in ſuperficie cylindri, ut ductis per FG, GH, planis axi cylindri parallelis, eorum interſectiones cum ſuperficie cylindri faciant rectangula æquali altitudine latitudineque PAQC, ABDQ; atque radii FG, GH, lateribus horum rectangulorum occurrunt æquali angulorum inclinatione. Hæc enim facilè demonſtrari poſſent, ſed attentè conſideranti per ſe ſatis clara ſunt. Cum itaque planè eodem modo, eademque inclinatione ſuperficiei cylindricæ intrinſecus occur- Vide Fig. 11.

rant

rant radii GH, GF, niſi quod hic ſurſum, ille verò deorſum feratur, manifeſtum eſt, & refractos in FE, HK, ita tendere debere, ut pares angulos cum cylindri lateribus, PC, BD, conſtituant: eſt autem radii GF refractio ſecundum FE, ſiquidem ipſius EF refractio ponatur eſſe FG, ex proprietate nempè refractionum in Dioptricis oſtenſa; æquales igitur eſſe debebunt anguli PFE, DHK. Jam verò prætereà ſi in plano baſeos cylindri DQC, qui ad horizontis planum uſque extenſus ſit, intelligatur recta CL ſubjacere directe radio FE; atque itidem DM radio HK, conſtat & angulos QCL, QDM, æquales fore. Ex æqualitate autem angulorum PFE, DHK, intelligitur etiam ad horizontis planum æqualiter inclinatos fore radios EF, HK; quamobrem lux Solis iſtis flexibus per cylindros aqueos in aëre pendentes tranſmiſſa non poterit ad oculum ſpectatoris pervenire, niſi ab illis cylindris, unde recta ad oculum ducta angulum ſuper horizontis plano fecerit altitudini Solis æqualem; hoc eſt, niſi ab illis qui & circulo albo, de quo ſuprà, materiam præbent. Atque ita liquet Parhelia bina hoc modo genita non niſi dicto circulo inſerta ſpectari poſſe.

§. 28. Ratio autem quare hi Parhelii certis in locis circuli albi conſpiciuntur, ſimilis planè eſt illi, quam ſuprà de Iride attulimus; ſi enim in præcedenti ſchemate, in plano baſeos cylindri rectam ducamus DN, itemque MO, parallelas LC, quæ dicta eſt radio EF ſubjacere, invenimus angulum MDN, ſive DMO, certam determinatam magnitudinem excedere non poſſe, quæ magnitudo anguli maximi diverſa eſt pro varia Solis altitudine: ex. gr. quando Sol ad 25 grad. elevatus eſt, angulus ad ſummum eſt gr. 33. 18. Cum vero multo plures radii in cylindrum incidentes ad hunc maximum angulum concurrant, quam ad minores, ſicuti in gutta Iridem efficiente dictum fuit; efficit hæc radiorum multitudo, ut

ut Parhelii ad illum angulum ab utraque parte lineæ MO, videantur; ſi ergo angulum OMR, æqualem ſumimus OMD, in eodem plano baſeos cylindri, diſtantia duorum Parheliorum æqualis erit totali angulo DMR, plana enim verticalia ſuper rectis MD, MR, erecta per utrumque tranſeunt Parhelium; ita ut arcus horizontalis circuli, atque etiam arcus circuli albi horizonti paralleli iis planis intercepti, tot exacte ſit graduum, quot angulus DMR continet; dimidia ergo pars diſtantiæ horum binorum Parheliorum in albo circulo ſecundum varias Solis altitudines in ſequenti tabella exhibetur. Cujus conſtruendi ratio, quia prolixior eſt, ad finem hujus, uti & ſuperius traditarum relegatur.

Altit. Solis Gr.	*Ang. verticalium per Solem & Parhelium transzenith.* Gr.	′
0	41.	30.
5	41.	8.
10	40.	14.
15	38.	36.
20	36.	16.
25	33.	18.
30	29.	36.
35	25.	16.
40	20.	12.
45	14.	40.
50	8.	44.
55	3.	6.
58	0.	32.

§. 29. Ubi verò ſecundum hanc tabellam binorum Parheliorum poſticorum phænomeni Romani diſtantiam examino, fuit illa circiter 60 grad. Nam cum poli altitudo ſit Romæ gr. 42: 2′ fuit 20 Martii hora 3 pomeridiana, Solis altitudo circiter 30 graduum, quæ altitudo in hâc tabella nobis exhibet dimidiam diſtantiam 29. grad. 36. min. In Scheineri quidem ſchemate, prout in Gaſſen-

di libello exprimitur, Parheliorum diſtantia 90 grad. excedit: ſed diſtantiæ hujus menſura nec obſervata, nec annotata fuit: idcirco majorem diſtantiam, quam revera fuit, delineatam eſſe affirmare auſim; diſtantia enim duorum punctorum, quæ in cœlo apparent, eò major videtur quo horizonti ſunt propiora; ſicuti ſæpiſſimè ſtellæ plauſtri borei quando ad horizontem accedunt, duplo magis a ſe invicem diſtare videbuntur quam quando puncto verticali ſunt propinquæ. Nec diſſimili ratione illis, qui hæc duo Parhelia aſpiciebant, diſtantia inter ea majorem viſa eſt habere proportionem ad arcum qui per verticem tranſiens amplitudinem circuli albi LMNK referebat, quam revera habebat. Quod in diſtantia Parheliorum K & N, non accidit, quia circuli DE, magnitudo nota erat, circiter 45 graduum. In quibuſdam autem ſequentium obſervationum hanc viſus fallaciam in diſtantia duorum talium Parheliorum clarius advertemus, ut & alibi. Qua eadem de cauſa quoque Solis diſcus ferè duplo major ad horizontem apparet, quam ubi eſt elevatior, ſimulque Iris videtur pars maximi circuli, cum tamen ad dimidiam circuli maximi amplitudinem non accedat.

Vide Fig. 5.

§. 30. Ut verò & cauſam ejus erroris paucis indicemus, hinc eum manare ſciendum eſt, quod Solem vel aliud quodcunque in cœlo corpus horizonti propinquum remotius ab oculo noſtro eſſe exiſtimemus, quam quando idem vertici appropinquat; quia ſcilicet res in aëre ſublimes cum multum ab horizonte abſunt, non magis a nobis diſtare imaginamur, quam nubes quæ ſupra verticem noſtrum volitant; cum contrà inter nos & illa quæ horizonti ſunt proxima magnum intercedere terræ ſpatium ſoleamus advertere, ad cujus extremum cœli convexum inchoari apparet; quod idcirco ſimul cum iis quæ in eo conſpiciuntur aſſueti ſumus concipere a nobis multo remotius. Jam verò quando duo corpora æqualis magnitu-

nitudinis, eodem viſionis angulo comprehenduntur, illud quod remotius exiſtimamus ſemper majus judicamus. Quæ vera cauſa eſt hujus, quam diximus, deceptionis.

§. 31. Ad Parhelia verò ut revertamur, haud prætereundum quod in hac obſervatione alba dicantur apparuiſſe, cum contra colorata eſſe debuiſſent, quia eidem cauſæ & refractioni cui Iris, originem ſuam debent, & in cylindro noſtro vitreo aqua repleto colorata videntur. Illud autem eadem ratione eveniſſe credendum, qua & Coronæ aliquando albæ apparent, quando ſunt debiliores lumine; quod etiam accidit Parheliis quæ a Solis latere fulgent; ut ex accurata obſervatione Sam. Kechelii Vide inferius inſerenda, videre eſt; in quà Parhelium C, Fig. 2ɸ.1. quod altero minus lucidum erat, dicitur è flavo candidum fuiſſe, qui color convenit cum argenteo, qui in noſtris hiſce Parheliis obſervatus fuit; nempè flavus, atque albicans color quem cylindri ſuprà dictis refractionibus ejaculantur, cum rubro longè ſit ſplendidior, fieri neceſſe eſt, cum rarior Parheliis materia ſuppetit, ut prius hic quam ille videri deſinat; atque ita lux ſine colorum tinctura in Parheliis ſuperſit. Quod autem & colorati aliquando hi poſtici Parhelii conſpiciantur, comprobat obſervatio Anglica, petita ex hiſtoria Matth. Paris cum cæteris inferius cernenda, ubi narrantur præter Vide Fig. 20. Solem verum, apparuiſſe in circulo magno cryſtallini coloris quatuor Soles adulterini rubei coloris, ex quibus duos fuiſſe poſticos, figura manifeſtum facit, etſi forte vitio alioqui non carens.

§. 32. Ex hac cylindrorum raritate fortaſſe etiam contingit ut in pluribus obſervationibus hi Parhelii omnino viſi non fuerint, cum tamen apparuerit circulus albus; ſicuti in phænomeno Romano Anni 1630. & in illo Hevelii Anni 1661. 20. Februarii, ut & in aliis in quibus Parhelii propter nimis languidum lumen animadverſi non

 ſunt.

ſunt. Poteſt tamen alia hujus rei cauſa afferri; ſi ſcilicet in poſtica circuli albi parte, cylindri opaci in aqueorum medio nimis craſſi fuerint, & idcirco radiis hæc Parhelia producturis per cylindros tranſitum non conceſſerint. Reperio enim, Sole ad 25. gr. elevato, ſi diameter cylindri opaci ad totalem aqueum majorem rationem habuerit, quam 590, ad 1000, nulla Parhelia poſtica conſpicua fore. In phænomeno ergo Romano, anni 1630. ubi Sol adhuc altior, ſcilicet 28 grad. fuit; ſi ſoli cylindri, qui Parhelia O & P producunt verſus poſticas circuli albi partes fuiſſent, alii verò cylindri, quibus Parhelia lateralia M & N originem debent, eò uſque ſe non extenderent; nequaquam Parhelii in poſtica circuli albi parte apparere potuiſſent; cum in his cylindris, proportio cylindruli opaci ad totalem fuerit circiter, ut 624 ad 1000; ſimiliter in obſervatione Hevelii, ubi 6 apparuerunt Parhelia, Solis altitudine gr. 25. ſi cylindri qui Parhelia E & D, non verò illi, qui lateralia B & C conſtitunt, poſticam circuli partem occupaſſent, multum abfuiſſet, ut Parhelia poſtica apparere potiſſent. Diameter enim nucleorum in illis cylindris fuit circiter partium 714, qualium Diameter cylindri aquei circumambientis 1000.

Vide Fig. 16.

Vide Fig. 12.

§. 33. Jam igitur partes omnes phænomeni prioris, quod Romæ obſervatum fuit, explicuimus; omnium in eo Parheliorum, nec non & circulorum cauſis ad cylindros ſemigelatos relatis, partim quidem erecto ſitu pendentes, partim verò inordinatè volitantes; quæ cauſæ exactè adeò phænomenis conſentientes, ſibique invicem connexæ, non parum ubique ſeſe mutuò confirmant, adeo ut veras eſſe, haud quaquam ambigi poſſe videatur.

§. 34. Circulorum ergo, atque Parheliorum, quæ in Phænomeno Romano Anni 1629. apparuerunt, cauſas ad erectos vel inordinate volitantes cylindros retulimus, &

& nihil prætereà in ulla hujus Phænomeni parte reperitur, quod non exactè hypotheſi noſtræ quadret. Quod verò Parhelia poſtica ad ſphæricam magis figuram, quam duo lateralia acceſſerint, accidit; quia, etiamſi nonnulli ex cylindris arcus LM circuli albi, illi nempè qui non longè diſtant ab L & M radios quidem refractos ad oculum mittunt, longe tamen pauciores ſunt quam qui ab his qui in L & M progrediuntur. Quam ob rem hæc Parhelia, ſicuti lateralia, caudis lucidis in longum non extenduntur; prætereà refractiones, quæ in poſterioribus fiunt cylindris, æquabiliorem ordinem ſervant, quia radiorum curſus cylindri opaci objectu non terminatur, ſed leges tantum a politiſſima cylindri aquei ſuperficie accipit: cylindri enim opaci non ſunt accurate æquales in omnibus cylindris juxta ſe invicem pendentibus, ex quo ambitus lacunoſi nec permanentes Parheliorum lateralium oriuntur; caudæ porrò Parhelii N reciprocatio facta eſt, quia nunc plures, nunc pauciores cylindri eo ferebantur; qua ratione etiam intelligitur quare Corona DEF, nunc integra a parte inferiori, nunc aperta fuerit; & quare Parhelium L lucidius factum fuerit, N jam ad defectum vergente. Vide Fig. 5.

§. 35. Inſpiciamus porrò & Hevelianam obſervationem 20. Februarii, Anni 1661. in qua plures Soles, pluresque circuli, & in utriſque aliqui diverſo a præcedentibus ſitu notantur: quorum cauſa, cum nec in erecto ſitu pendentibus, nec in confuſè volitantibus cylindris inveniatur, (cylindrus enim noſter vitreus undique circumlatus, nihil, præterquam quod in ſuprà dicto Romano phænomeno exſtiterit, prodit) aliud quid prætereà in aëre acciderit neceſſe eſt; quod tamen oſtendam nihil aliud fuiſſe quam certam poſitionem cylindrorum, quam nondum conſideravimus: ſed primò Phænomenon ipſius Hevelii verbis, ſimilique figura repræſentemus.

Septem Soles Gedani obſervati.

Hevelius in appendice Mercurii in Sole viſi pag. 174. Rariſſima obſervatio Parheliorum.

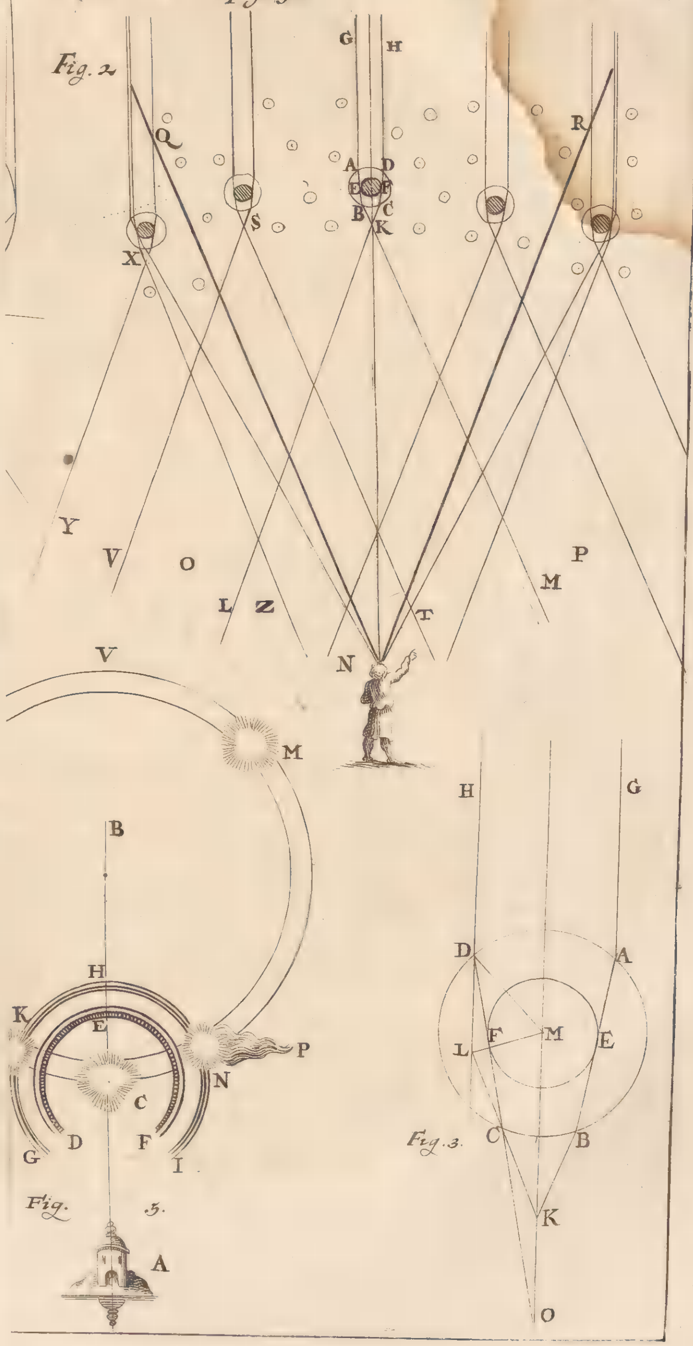
Vide Fig. 12.

Anno Chriſtiano 1661, *die Solis*, 20 *Febr. St. n. hor. ferè undecimâ, Sole circa meridiem conſtituto, ac Cœlo undique ſudo, ſeptem ſimul Soles, partim albicantes, partim diverſicolores, quibuſdam caudis longiſſimis à Sole averſis, ſubinde reciprocantibus, quibuſdam albicantibus crucibus, in diverſis circulis, clariſſimè apparuerunt; & quidem hâc omninò facie, atque ordine.* 1. *Solem genuinum* A, 25. *gr. circ. altum, circulus penè integer.* 45. *gr. variis coloribus, purpureo videlicet, rubicundo & flavo, inſtar iridis inſignitus*, GBIC *circumdabat, cujus limbus inferior vix gr.* 2. 36 *ad horiz. elevabatur.* 2. *Ab utroque latere, ad* B & C, *occaſum ortumque versùs, duo Pſeudo-Soles variegati, inprimis Solem versùs, longiſſimis ſpiſſiſque caudis, ſed albicantibus, & in mucronem terminantibus, videbantur.* 3. *Alius circulus* YXHVZ *longè major*, 90 *gr. propemodum quoad diametrum, Solem & priorem circulum minorem* GBIC *ambiebat, ad ipſum horizontem ſeſe exporrigens. A ſuperiore parte, coloribus admodum erat conſpicuus, ad latera verò aliquantò triſtior, & tenuior.* 4. *In ſummitate utriuſque dicti circuli duo arcus inverſi, itidem diverſicolores elegantiſſimi & lucidiſſimi, ex puncto Zenith tanquam centro, ad* G & H *deſcripti conſpiciebantur: illius inferioris arcus* QGR, *diameter* 90. *gr. erat; alterius verò ſuperioris & minoris* THS 45. *gr. In medio inferioris arcus ad* G, *ubi cum circulo* BGC *concurrebat, alius pſeudo-Sol emicuit, ſed colore, & lumine obtuſiori, ac debiliori.* 5. *Ingens circulus prioribus multo amplior, unicolor, albicans, horizonti parallelus, ſive à finitore undique* 25. *gr. ferè æquediſtans* BEFDC, *magnitudine* 130. *gr. quoad diametrum, ex ipſis pſeudo-Solibus collateralibus* B, C *ortum quaſi trahens, deprehenſus eſt. In quo*

Magnitudo circulorum & arcuum.

inſuper

De Parheliis pag. 38.



inſuper tres parhelii, colore omninò argenteo, ſeu albeſcente affulgebant: in D *ad Orientem gr.* 90. *propemodum à Sole genuino remotus, eorum unus, in occidente ad* E *alter, tertius verò* F *in ſeptemtrione, planè in veri Solis oppoſitione extabat; omnes ſimilis coloris & ſplendoris. Per pſeudo-Soles autem* D & E, *orientalem & occidentalem, aliæ ſectiones cujuſdam circuli maximi, per Polum Eclipticæ* K, *ad ipſum horizontem uſque* P & N, *atque per circulum horizonti parallelum ad angulos obliquos, per Eclipticam verò ad angulos rectos incidentes, cruceſque albicantes ibidem diſtinctè referentes, conſpeximus. Adeò ut ſeptem Soles ſimul clarè admodùm obſervarentur: imò, ſi citiùs hocce phænomenum ex edito loco advertiſſem, non dubito quin duos præterea Parhelios ad* H & I, *atque ſic numero novem deprehendiſſem: aderant enim ibidem ejuſmodi veſtigia, unde id haud malè colligi poterat.*

Quot gradibus albeſcentes pſeudo-Soles à genuino diſtiterint.

Duæ cruces Colore argenteæ.

Duravit autem inſigne & jucundiſſimum hocce phænomenum ab hor. fere 10. 36. *ad hor.* 11. 51'. *Verùm non eadem facie toto durationis tempore continenter affulgebat, ſed paullatim aliam atque aliam induebat formam. Initiò, circa undecimam, dictâ quidem ſpecie notabatur, poſtmodum autem pedetentim degenerabat. Primo pſeudo-Sol* F *Septentrionalis, cum portione ſui circuli evanuit; reliqui Parhelii cum ſuis arcubus integri ad hor.* 11. 16. *perſeverabant. Deinde, Pſeudo-Sol orientalis; poſtea occidentalis, cum utrâque cruce extinguebantur. Rurſùs, paullò poſt bini Parhelii collaterales* B & C *immutabantur, modò alter altero erat lumine clarior, & colore diſtinctior, modò obtuſior & obſcurior. Hor. namque* 11. 18' *Parhelius occidentalis* B *valde erat conſpicuus, evaneſcente contrà orientali* C. *Rurſùs hor.* 11. 24'. *Orientalis perquàm clarus extitit; ſic ut hor.* 11. 46. *diſtinctè adhuc cerneretur, occidentali interim penitùs diſparente; ut ut hic perpetuo orientali longiorem ferè caudam præ ſe tuliſſet. Sæpiùs enim mucronem* 30,

Quamdiù phænomenum hocce ſeſe ſpectandum præbuerit.

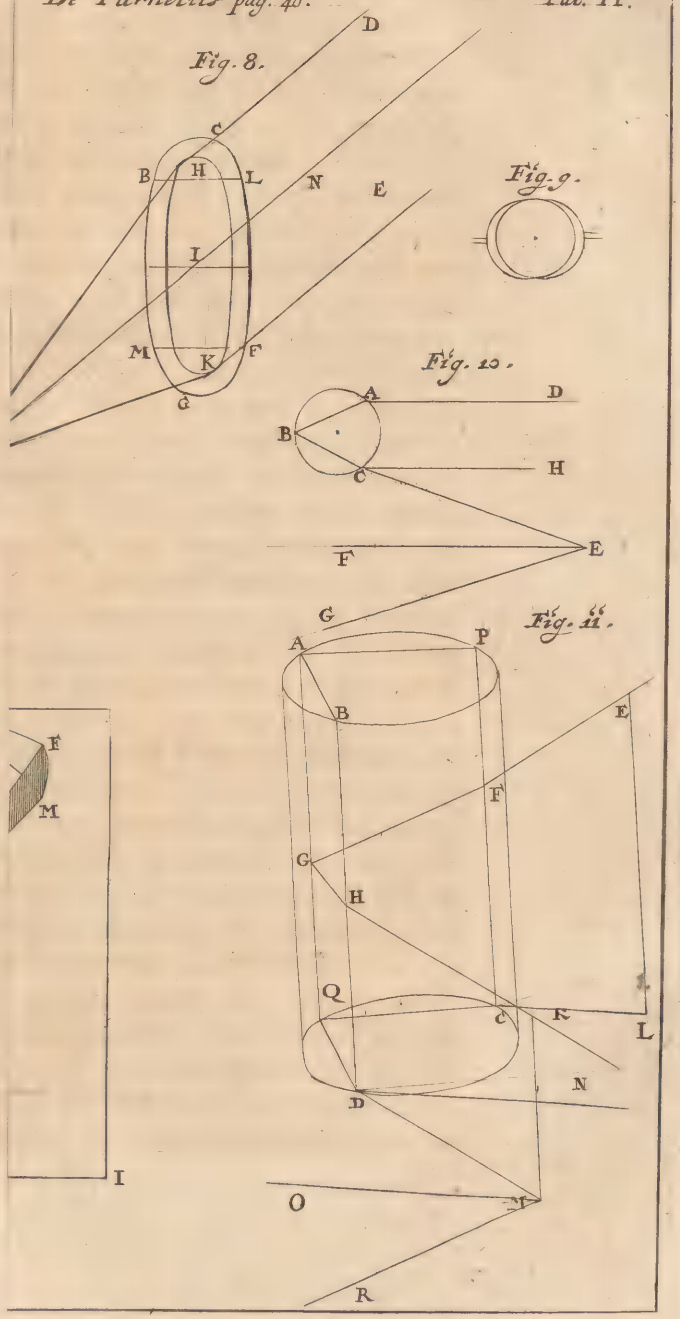
Quomodo degeneraverit.

gr.

Caudarum longitudo. *gr. nonnunquam 90. gr. ad ipſum pſeudo-Solem* E *exporrigebat, at orientalis* C *caudam ſuam vix ſupra* 20. *gr. extendebat. Hor.* 11. 36, *circulus maximus verticalis* YXHVZ *diſſipatus eſt. Inverſi verò arcus* H & G, *ſimul cum duobus illis Parheliis* B & C *ad finem uſque ſubſiſtebant.*

Quâ ratione hos Parhelios Autor delineaverit. *Ipſam delineationem, quod attinet, melioris intellectûs gratiâ, ita ſpectandam exhibuimus, adinſtar Fixarum in globo artificiali extantium; acſi extra ſphæram conſiſteremus: eâ enim ratione longè diſtinctiùs, & clariùs adumbrantur omnia. Interea tamen locus obſervationis fuit ſub puncto Zenith circiter, intra circulum horiz. parallelum: hincque genuinus Sol nobis in Meridie, alter pſeudo-Sol* F *in Septemtrione, & reliqui*
Genuinus modus exprimendi Parhelios E & D *ad latera conſpiciebantur. Quod ſi autem aliquantò clariùs hocce rariſſimum phænomenum Tibi ob oculos poni deſideras; deſcribe ex Sole* A *(in globo nempe artificiali) in* 2. *gr. Piſcium tunc conſtituto, & quidem ad noſtram Elevationem Poli Dantiſcanam, radio* $22\frac{1}{2}$ *gr. primùm circulum* GBIC; *deinde, radio* 45 *gr. circulum* YXHVZ; 3. *Circulum* NEKDP, *per duos albeſcentes pſeudo-Soles, a Sole* 90 *gr. diſtantes, tranſientem radio* 90 *gr,* 4. *Ex puncto Zenith radio* $22\frac{1}{2}$. *gr. rursùs arcum* THS. 5. *Ex eodem Centro radio* 90. *gr. arcum* QGR. *Denique Circulum* BEFDC *horizonti parallelum radio* 65. *gr. Re ſic peractâ, luculentiſſime patebit, omnium circulorum pulcherrima harmonia atque Symmetria; ſic ut inde eò faciliùs cauſas naturales omnium Parheliorum, & Paraſelenarum penetrandi, annuente Deo, dabitur occaſio.*

Vide Fig. 12. §. 36. In hoc phænomeno, non ſecus ac in Romano apparent, circulus magnus coloris albi, Parhelia lateralia B, C, & Corona BGCI, quæ omnia originem ſuam cylindrulis in ſitu perpendiculari poſitis debent, uti ſuprà oſtendimus; ut & Parhelia E & D, cum arcubus


Fig. 8.
D
C
B H L
N
E
I
M K F
G
Fig. 9.
Fig. 10.
A D
B
C H
F E
G
Fig. 11.
A P
B
E
F
G
H
Q
C K
L
N
D
O M
R
F
M
I

cubus NE, PD, per ea tranſeuntibus, ob rationes §. 21. & 22. allatas, qui arcus partes ſunt circuli ex Sole, A, quo & reliqui duo deſcripti. Ex illis autem, quæ §. 23. & 34. dicta ſunt, perſpicuum eſt, quare hic circulus verſus ſuperiora interruptus apparuerit. Quî autem fieri potuerit ut Parhelia poſtica non apparerent, §. 32. explicuimus. Diſtantia porrò inter Solem A, & Parhelia E, & D, intrà grad. 88. 48′. fuiſſe debuit. Nam cum Sol ad altitudinem 25. grad. pervenit, lateralia Parhelia Coronæ ulterius conſpici non poſſunt; quando autem ad hanc extremam pervenerunt diſtantiam, debiles admodum & languidi videri debent, reſpectu duorum aliorum B, & C. Quare & alibi tantum in hoc phænomeno apparuerunt, ut & arcus EN, DP, ſecundum ea quæ habentur §. 31. Circulus ZHY, vel a granis rotundis, vel a confusè volitantibus cylindris productus eſt; qua de re ſuprà §. 20. vel tandem etiam ab alia cauſa, de qua poſteà §. 41.

§. 37. Sed præcipuè hic nobis inquirenda eſt cauſa arcuum THS, QGR, & Parheliorum G, & H, in illis apparentium: Nam de Parhelio F, Soli vero è diametro oppoſito nondum hoc loco inquiremus, ſed poſtremo omnium. Diximus ſuprà halitus infernè ſurſum tendentes, venti inſtar, cylindros ſuſtinere, qui ventus ad cylindrorum productionem, & eorumdem ſitum perpendicularem multum confert. Jam verò præter hunc cylindrorum ſitum adhuc alium invenio, quem plurimi affectare debent, ut ſcilicet ſuis lateribus telluris plano paralleli hæreant. Hoc enim revera ita ſe habere experimenta quædam edocent. Nam ſi cylindruli efformentur, qui vel per aquam, vel per aërem leniori motu deorſum ferantur; ferme ſemper tranſverſo ſitu decident, quando ſcilicet, eò pervenerunt, ut celeritas eorum amplius non augeatur. Quod ſi aqua, vel aër, per quem decidunt hi cylindri, eadem ſurſum tenderet velo-

Vide Fig. 12.

citate; qua illi deorſum feruntur, exactè referrent cylindros ſemiaqueos, qui ab aëre ſuſtinentur; ita ut nulla dubitandi ſit ratio, quin multi cylindri huic ſeſe ſitui accommodent; immò ex ſuprà dictis experimentis inferendum eſſet, illos ferè omnes tranſverſo, & vix paucos perpendiculari hæſuros ſitu; ſed perpendendum eſt, nos ea quæ natura in ætherea regione perficit perfectè imitari non poſſe: perpendicularem enim cylindrorum ſitum abundè teſtantur ea quæ tam clarè ab his produci demonſtravimus.

Vide Fig. 12. §. 38. Dico igitur arcus inverſos atque coloratos, ut hic QGR, & THS conſpici a cylindris, quorum axes omnes, non quidem inter ſe, ſed terræ tamen plano paralleli ſunt. Quod ut intelligatur, ponamus maximum numerum cylindrorum promiſcue inter ſe jacentium, quorum axes verſus qualemcunque horizontis plagam, veluti Eurum, Notum, Euro-notum, Africum, & quæcunque inter ea puncta diriguntur. Dein conſideremus, ad hos arcus efficiendos, non aliter ad lateralia Parhelia producenda, Solis radios geminata refractione per cylindros tranſire. Sole ergo ex. gr. verſus Auſtrum poſito, arcuum partes, quæ ſunt juxta Solem, ut hic H & G, formantur in cylindris, quorum axes ad orientem, & occidentem vergunt; hoc eſt, in iis, in quorum latera Solis radii perpendiculariter incidunt; notum quippe ex præcedentibus ex omnibus cylindris, nullos, quam quorum axes hoc modo poſiti ſunt, propiores Soli, Solares radios ad oculum tranſmiſſuros; quod ut faciant illi, quorum axes aliter ſunt diſpoſiti, ſuperioribus remotiores a Sole ut ſint, requiri, cum Sol ſuprà planum baſeos illorum elevatus ſit; ſicuti patet ex tabella quam §. 17. exhibuimus; atque ità porrò in ſingularum poſitionum cylindris fieri neceſſe eſt, ut quo magis ab orientali & occidentali poſitione diſtent, eò remotiores arcuum partes, (ſi nempè a medio incipiamus)

mus) efficiant. Horum verò arcuum figuram curioſè inveſtigans, hoc invenio diſcrimen; ubi nempè Sol horizonti incumbit, inverſi arcus, qui circulos alterum 45. gr. alterum vero 90. gr. tangunt, ſimiles ſunt arcubus figuræ 6. Tab. IV. minor autem duorum cornuum figuram exhibet, & color ruber Soli ſemper eſt obverſus. Eadem autem figura exhibet etiam arcus, Sole ad 10, 20, 30, 40, gr. ſupra Horizontem elevato. Ex quibus patet arcus, in medio quidem, circuli portioni ſimiles eſſe, ſed verſus extrema in contrariam inflecti partem; verum cum cylindri qui medium arcum producunt, directius, uti diximus, a Sole illuſtrantur, remotiores vero obliquius, non mirum eſt, plerumque mediam tantum horum arcuum partem utpote lucidiorem apparere.

§. 39. Parhelia autem quæ exacte in horum arcuum medio conſpiciuntur, ut hic in G, nihil aliud ſunt, quam in prædictis arcubus pars omnium lucidiſſima; idcirco hæc Parhelia nunquam omnino diſtincta, vel ſuprà partes arcuum vicinas valde lucida apparent; ſicuti Hevelius in omnibus id genus imaginibus quas obſervavit nempè duo Parhelia, cum una Paraſelene, annotavit obſcuriores, obtuſiores, & luce debiliori fuiſſe. Notat quoque in H, dubium fuiſſe Parhelium; cauſa autem quare pars media a reliquo arcu nonnihil diſtincta appareat, vel hæc eſſe poteſt; nempè, quod in aëre magna copia inveniatur jacentium quidem ſed breviorum cylindrorum, qui idcircò parum vel nihil cylindricæ ſuperficiei retinent, ſed inſtar oblongæ ſphæroidis efformati ſunt; prætereà videmus Hevelianis obſervationibus planè conſentire, quod quo Sol, vel Luna, ut & Corona magis ſuprà horizontem elevata ſunt, eò arcus inverſi planiores videantur. Nam in ejus obſervatione Paraſelenarum, in qua Luna 26. vel 27. grad. ſuprà horizontem elevabatur, arcus primæ Coronæ fuit pars circuli admodum magni; ſicuti

Vide Fig. 12.

ſicuti etiam in Phænomeno 7. Solium; ſed in illo 6. Aprilis & 17. Decembris A. 1660. in quo Solis vel Lunæ altitudo 12. vel 13. gr. tantum fuit, hi arcus longe minorum circulorum partes fuerunt. Verum quidem eſt, ſuperiora horum arcuum in Heveliana obſervatione minora repræſentari, quam calculus noſter requirit; ſed hoc fit, quia arcus tam altè ſuprà horizontem conſpicui neceſſario viſum decipiunt, ita ut partes longe minores circuli, quam revera ſunt, eſſe videantur. Ex iis enim quæ §. 29. diximus, liquet eundem circulum vertici noſtro imminentem dimidia tantum magnitudine apparere, quam qua ad horizontem videretur: quod ſimiliter in arcuum partibus locum habet.

§. 40. Arcus autem, qui ſecundum hypotheſin noſtram inferiori interioris Coronæ parti adhærere deberent, in duabus Hevelii obſervationibus, altera 30. Martii A. 1660 altera verò 7. Solium, obſervari potuiſſent, immò quodammodo, certe in ultima, apparuerunt; dicit enim, *Parhelii veſtigium in* I viſum fuiſſe; ſed defectu materiæ, quæ raró ſeſe eòuſque extendit, debilis tantum fuit ſplendor.

Vide Fig. 13. §. 41. Porrò figuras arcuum prædictas inveniendi ratio eſt hujuſmodi; in ſphæra aliqua ABC, deſcribatur polo B, circulus maximus ADC, qui horizontem referat; deinde verticalis per Solem tranſiens BD, poſito nempè Solem eſſe in E, ita ut arcus DE, ſit tot partium, quot erat in obſervatione altitudo Solis; ſi igitur arcum inverſum qui minorem Coronam tangit invenire velimus, ſumantur arcus EF, EG, in verticali BED, 22. grad. erunt puncta F & G, ſuperiores & inferiores Coronæ partes, & ſimul puncta media inverſorum arcuum, quos quærimus. Ut reliqua porro inveniamus puncta, quæ quæri debent in cylindris vario ſitu diſpoſitis; conſideremus multos jacentes cylindros, quorum baſeos planum ſit parallelum alicui verticali circulo, ut MB, cui circulus

circulus ducatur parallelus per Solem HEK. Si in memoriam nobis revocemus, ea quæ ſuprà demonſtravimus, de cylindrulis perpendiculari ſitu pendentibus; & ſi circulum MB, horizontem eſſe nobis fingamus, in cujus centro N ſpectator collocatus ſit, & parallelum HEK concipiamus eſſe circulum album per Solem tranſeuntem; erit arcus HM, Solis altitudo ſupra horizontem MB, ut & altitudo Solis, ſuprà planum baſeos horum cylindrorum, de quibus hic agitur, eorum enim baſes parallelas circulo MB, ſuppoſuimus. Quibus ita ſeſe habentibus, conſtat in circulo HEK. puncta tantum K, & L, eſſe ſumenda, ubi Parhelia lateralia in cylindris conſpici deberent; quod ex tabula §. 17. exhibita, non arduum eſt: ſit enim ex. gr. arcus HM qui hic fingitur Solis eſſe altitudo ſupra cylindrorum baſes, 30. grad. tabula oſtendit arcus FK, EL, ſingulos grad. 28, 48′ eſſe: quibus binis punctis K, & L, ita cognitis, novimus ſimul duo quæſita puncta, alterum in arcu inverſo inferiori, alterum verò in ſuperiori: & eodem ritu tot hujuſmodi puncta inveniri poſſunt, ut tandem arcuum flexus manifeſti fiant: & eadem prorſus obſervanda ſunt, ad inveniendos arcus inverſos qui majorem tangunt circulum. Priuſquam autem ab hujus phænomeni conſideratione digrediamur, notetur cauſam circuli ZHY etiam ab his jacentibus cylindris eſſe potuiſſe, quam ſupra §. 36. ad cylindrulos confuſe volitantes, vel grana rotunda ſemiliquata retulimus: nempè ſicuti §. 21; quomodo cylindri ad perpendiculum erecti Coronam producere valeant, oſtendimus, ſic idem hi jacentes efficient, cum eorum extremitates veluti in ſemiſphæras, vel ſemiellipſes deſinant: imo veriſimile eſt rem hic ita accidiſſe, cum videamus circulum ZHY, ab utraque parte ex Parhelio H, progredi, idemque & in aliis Parheliis fieri animadverſuri ſimus; hoc enim ſignificare videtur, eoſdem ja- Vide Fig. 12.

 centes

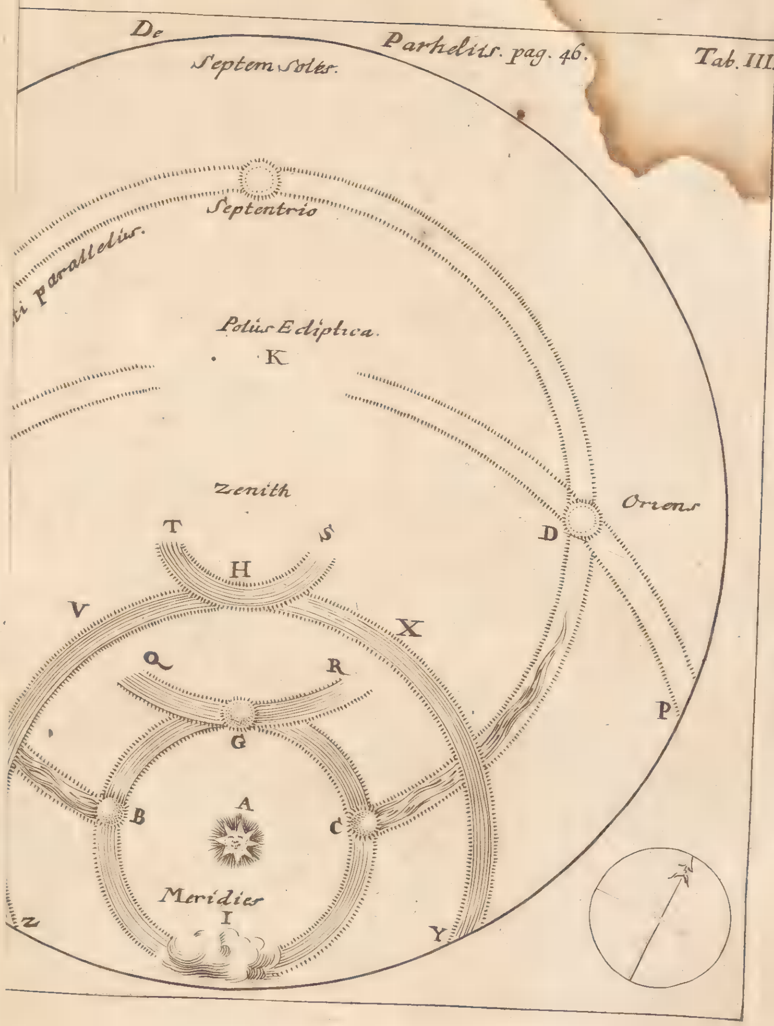
centes cylindros, & hos circulos & arcus inverſos producere.

§. 42. Quibus intellectis, nihil admodum quod remorari nos poſſit in Scheineri altera obſervatione anni 1630. reperiemus, in quo 6. Soles effulſere, quodque cum cæteris infrà exhibebimus. Animadvertendum tantum Parhelia O, & P in interſectionibus Coronæ majoris, & circuli albi apparuiſſe, eò quod erecti cylindri materia hujus Coronæ fuerint, ſecundum ſuperius oſtenſa §. 21. verum tamen cum & Parhelius ſuperior R in eadem Corona notetur, potuit ſuperior Coronæ pars, ex jacentibus quoque cylindris conſtitui, ut modo dictum. Trans Parhelium Q verò, arcum inverſum non eſſe notatum, cauſa fortaſſe fuerit, quod parum utrimque extenſus fuerit, ideoque a Corona ZQβ, non ſatis recedere viſus: nam in iſta Solis altitudine grad. 28½, valdè parum ſurſum curvatur arcus hic, quippe quem jam in altitudine Solis 27. grad. admodum planum fieri vidimus; de duplici denique circulo interiori, qui hic cernitur, cauſam attulimus §. 22.

Vide Fig. 16.

§. 43. Porro autem & alia tria phænomena Heveliana, nempè quæ 30. Martii & 6. Aprilis & 17. Decembris obſervavit, cauſas manifeſtas habent ex antè dictis; niſi quod in poſtremo horum crux albicans viſa eſt, è trabibus binis, tranſverſa rectaque, in ipſo Lunæ diſco ſeſe interſecantibus. Hujus verò cauſa in ipſis illis cylindris erectis tranſverſiſque, qui ad Paraſelenas, circulosque efficiendos in aëre pependere, ſponte ſeſe offert; primo namque trabs tranſverſa nihil aliud fuit, quam pars circuli magni albi, qui & per Solem tranſire ſolet, de quo §. 13. qui quo minus ſemper una cum Parheliis, aut Paraſelenis lateralibus appareat, vel raritate materiæ fit, hoc eſt, cylindrulorum erectorum, vel ipſorum luminum Solis, aut Lunæ fulgore vehementiore, ſicut jam ſuprà monui §. 14.

Vide Fig. 17. 18. 19.


De Parhelis. pag. 46.
Tab. III.
Septem Soles.
Septentrio
ti parallelus.
Polus Ecliptica.
K
Zenith
T
S
H
Oriens
D
V
X
Q
R
P
G
A
B
C
Meridies
I
Z
Y

§. 44. Trabs autem altera, quæ horizonti perpendiculariter inſiſtebat, producta fuit a reflexione radiorum Lunarium a jacentibus cylindrulis, qui etiam arcus inverſos hic effecerunt, ſicuti anteà diximus. Cum verò horum cylindrorum latera & axes terræ plano, non autem ſibi invicem ſint paralleli, ſequitur neceſſariò, Sole tam parum elevato, ut hic fuit, (fuit enim tantum 12. grad.) magnam multitudinem eorum, qui ab horizonte uſque ad certam ſupra Solem diſtantiam conſpiciuntur, punctum quod lumen ad oculum reflectit habere in perpendiculari hac trabe; quæ proximè ad Solem utrinque arctiſſima erit, & perfectius terminata quam alibi, & pars inferior inter Solem ſcilicet, & horizontem perfectior, quam illa quæ aliquantum ſuprà Solem conſpicitur, ubi neceſſario dilatatur & evaneſcit. Quæ omnia in hoc phænomeno ita ſeſe habuiſſe figura indicare videtur. Hoc unum deeſt, nempè quod eſt dicta cylindrorum reflexione hæc trabs erecta, non tam concinnè terminari potuerit ac figura exigere videtur; quia in multis jacentium cylindrorum punctum quod lumen reflectit etiam extra hanc trabem conſpicitur, ſed in longe paucioribus quam in ipſa trabe. Figura autem ſuperiori prorſus ſimili demonſtrari poteſt, hanc trabem lumine illuſtrem fore. Cum enim, ſicuti ſuprà dictum fuit, Vide ADC, ſit horizon, E, Sol, cujus altitudo, hoc eſt, ar- Fig. 13. cus verticalis circuli ED, 12. ſit grad. & aliquis verticalis circulus BM, qui ſupponitur parallelus baſibus certæ portionis jacentium cylindrorum, & circulus HEK, parallelus ipſi BM, circulus HEK erit ille in quo ſpectator in N, collocatus, tantum lumen dictæ cylindrorum portionis animadvertere poteſt; pariter etiam quælibet portio cylindrorum aliter directa circulum ſuum lucidum habet, qui per Solem E, ad horizontem uſque ſe extendit; ſicut autem hic circulus KEH, partibus Soli E vicinis, propè ad Solis verticalem accedit, idem etiam facit

cit aliorum magna quantitas, quod efficit ut lucida veluti columna ad verticalem BD, in qua Sol conſpicitur, appareat. Quanto autem humilior Sol erit, tantò lucidior & magis conſpicua erit columna, tunc enim intrà anguſtius ſpatium plures ex dictis lucidis circulis coguntur, & ſimul major multitudo cylindrorum inter nos, ac Solem interjicitur, quam quando Sol altè ſuprà horizontem ſublatus eſt.

§. 45. Ad eandem cauſam referri poſſet meteori genus a *Chriſtophoro Rothmanno* obſervatum *Caſſellis* 2. Januarii Anni 1586. quod ita deſcribit. *Apparebat primò antequam Sol oriretur in aurora, (erat enim cœlum circa horizontem clarum) columna erecta ad amuſſim in circulo verticali, latitudine ubique tanta, quanta apparebat diameter Solis, incendium alicujus pagi ultrà montes dixiſſes, ſi vidiſſes. Erat enim prorſus ſpecie ignea tanquam flamma, niſi quod ubique ejuſdem eſſet ſpiſſitudinis; paulò poſt oriebatur in illa columna idolum Solis, non aliter atque ſi eſſet Sol verus. Vix digitus de hoc idolo adhuc ſub horizonte latebat, cum in eadem columna oriretur Sol verus, quem eodem modo ſubſequebatur aliud idolum, permanebatque columna hæc cum tribus ſuis continuè ſe contingentibus Solibus, ut ita dicam, ſemper erecta in circulo verticali, ut quadrans oſtendebat; erantque Soles hi ejuſdem formæ, niſi quod intermedius & verus reliquos fulgore antecelleret, durabantque cum ea columna ad quadrantem ferè horæ, donec nubes nigra a vertice ſuperveniens eos obtegeret.*

Vide deſcriptionem ejus de Cometa anni 1585.

Huic autem phænomeno jacentium cylindrorum reflexio cauſam præbuit; niſi potius propter Solis imagines, exiſtimandum ſit magnam hic cylindrorum ad perpendiculum erectorum copiam exſtitiſſe, quorum extremitatibus planæ adhæſerunt ſtellulæ, quales *Carteſius* deciduas obſervavit. Hi enim etiamſi ſeorſim per aërem volitantes (ſic enim illos ſuppono) ab aura ſurſum

ſum tendente ſuſpenſi ut plurimum erectam poſitionem ſervare debent, qua & geniti ſunt, nec tamen adeò accuratè quin ſæpe pauxillo ab illa declinent. Hæ ergo lamellæ ſtellatæ totidem parva ſpecula plana ſunt, a quibus radii Solares ad angulos æquales reflectuntur, ita ut pars columnæ ſuperior ſimul cum Parhelio in illa fulgente, reflexione ab inferioribus baſibus cylindrorum viſa ſit, inferius verò Parhelium cum parte columnæ inferiore, reflexione a baſibus ſuperioribus. Dixi autem illos non ita accurate in ſitu perpendiculari permanere, quin nonnulli paululum, gradu puta uno; vel altero, inclinent; ſi enim erecti manerent, & baſes planæ ac horizonti parallelæ eſſent, nulla radiorum ſolarium reflexio a baſibus oculum verſus fieret.

Reliqua deſunt.

Tabellarum, quarum mentio fit §. 17. & §. 28. conſtructio his fundamentis nititur.

Sit cylindrus ſemigelatus, cujus axis BXN *ad horizontem perpendiculariter erectus, & cujus interior circumferentia ſit glaciati nuclei, exterior circumfuſæ aquæ, illiuſque diameter, ad diametrum totius cylindri habeat rationem datam. In hunc cylindrum incidat radius Solis* EF, *qui in* FG *refractus tangat interiorem nucleum, & ex puncto* F *erigatur recta* DC *in ſuperficie cylindri, per quam planum ducatur* IDCP, *quod tangat cylindrum in recta* DC *& huic perpendiculare aliud intelligatur planum ductum per* FE *quodque in plano* IDCP *communem ſectionem faciat* IFQ. *Erunt ergo in eodem hoc plano radius refractus* FG, *& triangula* EFI, GFQ, *poſitis ſcilicet* FE, FG *æqualibus, &* EI, GQ *normalibus in planum* IDCQ. *Hinc rectæ* QC *&* ID *tangent baſes cylindri* Vide Fig. 14.

dri in punctis C, D, & *ducta recta* GC *tanget in plano* ADCG *interiorem nucleum. Ducatur denique planum per* FE, FD, *quod faciat in plano baſium cylindri rectas* CK, DE, *ducaturque recta* MNO *per centrum baſeos parallela* CK; CK *autem producatur donec axi occurrat in* R, & *ex* R *per* G *ducatur recta* RGL, *erit ex dictis* §. 16. *angulus* GMN *ſive* LRT, *angulus, quo laterales Parhelii a Sole diſtant. Eſt autem angulus* EFS, *ducta recta* XFS *normali in planum* IDCQ, *ſive* IEF *angulus incidentiæ radii* EF, & *angulus* XFG *ſive* FGQ *angulus refractionis, adeoque* IF *ad* FQ, *ſive* DF *ad* FC *erit ratio refractionis. Angulus autem* FED, *cum* DE *ſit in plano Horizontali, eſt angulus elevationis Solis ſupra Horizontem, ideoque cognitus.*

Radius ergo EF = FG, *ſit* a.

FD *ſinus anguli altitudinis Solis ſupra Horizontem ſit* b.

Sinus anguli NCG, *qui datur ex ratione ſemiaxis cylindri totius ad ſemiaxem nuclei, ſit* d.

Ratio refractionis radii ex aere in aquam tranſeuntis ſit, ut e *ad* f.

Cum ergo DF *ſit* b, & DF *ad* FC *ut* e *ad* f *erit* FC $\frac{fb}{e}$, & *hinc* GC $\sqrt{aa - \frac{ffbb}{ee}}$. *Sed ut radius* a *ad ſinum anguli* NCG d, *ita* GC *ad* CQ, *propter angulos* NCG, CGQ *æquales* & *angulum* GQC *rectum. Erit itaque* CQ $\frac{d}{a}\sqrt{aa - \frac{ffbb}{ee}}$. *Cumque propter ſimilia triangula* DFI, CFQ, CQ *ad* DI *ſit, ut* CF *ad* FD, *ſive ut* f *ad* e, *erit* DI $\frac{de}{af}\sqrt{aa - \frac{ffbb}{ee}}$. *Eſt autem porro, ut* DE, $\sqrt{aa - bb}$, *ad* DI, *ita radius* a *ad ſinum anguli* DEI *ſive* CKP, $\frac{de\sqrt{aa - \frac{ffbb}{ee}}}{f\sqrt{aa - bb}}$ *Datur ergo angulus* CKP, *qui æqualis eſt angulo* NCR, *a quo*

quo igitur ſi dematur angulus NCG, *reſtabit angulus* RCG, *cujus duplus eſt quæſitus angulus* LRT *æqualis* NMG.

Hinc autem manifeſtum eſt, ſinum anguli CKP *ad ſinum anguli* NCG *fore, ut* $\frac{e\sqrt{aa-ffbb}}{ee}$ *ad* $f\sqrt{aa-bb}$, *ſive in ratione compoſita ex* GC *ad* DE *ſive* GC *ad* KC & *ex ratione refractionis* e *ad* f *quæ itaque ratio ſinuum* CKP *ad* NCG *alia & alia erit pro varia Solis altitudine.*

Poſtica Parhelia quod ſpectat, cum ea oriantur, ex iis quæ §. 25. & §. 28. *dicta ſunt, iiſdem de cauſis quibus Iris, eadem quoque ratione eorum diſtantia determinabitur, qua Iridis diameter; hoc ſolo diſcrimine, quod pro refractionis ratione ea ſumenda ſit, quæ ad datam Solis altitudinem proxime inventa fuit.*

Si ergo ponatur radius Solis DA, *qui incidens in ſphæram* ABC, *refringatur in* AB, *dein reflexus in* BC, & *iterum refractus in* C *pergat verſus oculum in* E *faciens cum recta* CH *parallela radio* DA, *angulum* HCE *omnium maximum, quem radii Solis ita per Sphæram tranſeuntes ad oculum cum* HC *facere poſſunt, non arduum erit ex iis, quæ de Iride demonſtrata ſunt, deducere, angulum* HCE *duplum fore anguli* BGI. *Eſt enim propter lineas* AB, BC *æquales & æquales angulos* GCB, GAB, *angulus* ECQ *æqualis* GAP, & ECM *æqualis* BAP. *Eſt autem* MCH *æqualis* ARB & *ideo* ECH *æqualis ang.* ARB — *ang.* BAR, *hoc eſt angulo* ABC — 2 *ang.* BAR. *Erit ergo angulus* ECH *duplus ang.* ABG — BAR *ſive anguli* ABG — BSG *hoc eſt, duplus anguli* BGI, *qui idcirco erit quoque maximus. Quod ſi porro quæratur radius* DA *qui faciat maximum angulum* BGI, *docebit calculus; fore* AL *ſinum arcus* AN, $\frac{a}{n}\frac{\sqrt{4nn-m^2}}{\sqrt{3}}$ & *idcirco* GK, $\frac{a}{m}\frac{\sqrt{4nn-m^2}}{\sqrt{3}}$ *ſi nimirum radius circuli* AG Vide Fig. 15.

vocetur a, & *ratio refractionis, quæ hic obtinet, ponatur, ut* m *ad* n.

Vide Fig. 14. *Quod ut exemplo illuſtretur, ſit altitudo Solis* 25 *gr. ratio refractionis* e *ad* f *ſit, ut* 250 *ad* 187. *erit*

Logarithmus ſinus 25. *gr.*	9. 62594
Logarith. $\frac{e}{f}$	0. 12610
Logarith. $\frac{f}{e}b$	9. 49984
Hujus ſinus compl. $\sqrt{aa-\frac{ffbb}{ee}}$ *Logarith.*	9. 97713
Logarith. ſinus comp. 25 *gr.* $\sqrt{aa-bb}$	9. 95727
Logarith. $\frac{\sqrt{aa-\frac{ffbb}{ee}}}{\sqrt{aa-bb}}$	0. 01986
Logarith. $\frac{e}{f}$	12610
Logarith. $\frac{\frac{e}{f}\sqrt{aa-\frac{ffbb}{ee}}}{\sqrt{aa-bb}}$	0. 14596, *qui eſt Logarithmus refractionis in data Solis altitudine.*

Si ergo ponatur ratio cylindri glaciati ad aqueum ut 1000. *ad* 473. *erit angulus* NCG *gr.* 28. 14′ *ejuſque ſinus Logarithm.* 9. 67492.

Hinc Logarith. ſinus anguli CKP *ſive* NCR 9. 82088. *qui eſt Log. ſinus anguli gr.* 41. 27, *a quo ſi dematur angulus* NCG *gr.* 28. 14′ *reſtat angulus* GCR *gr.* 13. 13′, *cujus duplus eſt quæſitus angulus* NMG *ſive* MRT, *gr.* 26. 26′. *diſtantia Parhelii lateralis a Sole. Si vero ex data refractionis ratione, radius* CG *poſt refractionem fiat ipſa tangens* CP, *ut ſcilicet* CK *in* CP *cadat, erit ille radius* CG *extremus*

ex

ex illis, qui refractione extra cylindrum prodire poſſunt. Unde ſequitur, ſi

a Logarithmo anguli recti	10. 00000
tollatur Logarithm. rationis refractionis inventæ	0. 14596
reſiduum	9. 85404 *fore*

Logarithmum ſinus anguli NCG, *qui idcirco eſt gr.* 45. 36′, *certe minor gr.* 45. 37′. *cujus complementum ad rectum eſt angulus* GCQ, *idem hoc in caſu cum* GCR, *gr.* 44. 24′. *cujus ergo duplus* MRT = GMN *gr.* 88. 48′. *eſt diſtantia Parhelii lateralis a Sole maxima, in hac ſcilicet altitudine* 25. *gr. Ex eo autem, quod angulus* NCG *eſt gr.* 45. 36′. *ſequitur qualium partium radius totius cylindri eſt* 1000, *talium ſinum anguli* NCG *ſive radium nuclei gelati fore* 714, *certe minorem* 715.

Ut nunc porro media diſtantia poſticorum Parheliorum inveniatur, erit in hac altitudine gr. 25. *Logarithm. refractionis* $\frac{m}{n}$. 0. 14596

Logarithm. radii a.	10. 00000	
Logarith. $\frac{am}{n}$.	10. 14596	
Logarith. numeri 2.	0. 30103	Vide Fig. 153.
Logarithm. $\frac{am}{2n}$.	9. 84493	

Sinus compl. hujus arcus $\sqrt{aa - \frac{aam2}{4nn}}$ *ſive*

$\frac{a}{2n}\sqrt{4nn - m2}$, *Logarith.*	9. 85398
Logarithm. $\frac{2}{\sqrt{3}}$	0. 06247
Logarithm. $\frac{a\sqrt{4nn-m2}}{n\sqrt{3}}$	9. 91645

G 3 *qui*

qui eſt Logarithm. ſinus arcus AN *gr.* 55. 35′.

Logarithm. $\frac{m}{n}$ 0. 14596

Logarithm. $\frac{a\sqrt{4nn-m^2}}{m\sqrt{3}}$ 9. 77049

Logarith. GK *ſinus arcus gr.* 36. 7′. *Hujus ergo duplus gr.* 72. 14′, *erit æqualis arcui* AN+BI

& hinc ſubductus arcus AN, *gr.* 55. 35

reſtabit arcus BI 16. 39

& hujus duplus 33. 18 *æqualis erit angulo* HCE *qui dimidiam Parheliorum poſticorum diſtantiam metitur.*

Ex quibus manifeſtum eſt, cum ſinus anguli gr. 36. 7′. *paulo minor ſit quam partium* 590, *qualium radius cylindri eſt* 1000, *radium* DA *gr.* 55, 35′, *non poſſe nucleum, ſi ejus ſemidiameter ſit major* 590 *partibus, aut tangere aut prætercurrere, adeoque in hac radiorum proportione, ad datam altitudinem Solis gr.* 25, *nullos fore poſticos Parhelios.*

NAR-

NARRATIO

Obſervationis Halonis ſive Coronæ circa Solem factæ Pariſiis, in Bibliotheca Regia, 12. Maji A. 1667. hora 9. matutina, ſimul cum Diſſertatione de cauſa, & origine horum Meteororum & Parheliorum.

Diameter hujus Coronæ ſive Halonis, quæ quam accuratiſſime obſervata fuit, inventa eſt 44. graduum, & latitudo Limbi ejus ½ gradus præterpropter. Partes ſuperiores & inferiores exhibebant admodum vividum colorem rubrum & flavum, quibus tamen præſertim in ſuperiori parte aliquantulum purpurei erat immixtum; Ruber color erat in interiori parte Coronæ. Reliquæ partes ſubalbidæ tantum & parum lucidæ apparebant. Spatium intrà coronam comprehenſum paululum tenebricoſius erat, præcipuè verſus partes magis coloratas, eo, quod undique Coronam cingebat. Apparebat prætereà pars quædam majoris circuli qui ſuperiorem Coronæ partem tangebat, & cujus extrema verſus inferiora vergebant, ſicuti fig. I. id nobis exponit. Quæ pars circuli iiſdem, quibus Corona, coloribus ſed dilutioribus ſplendebat. Altitudo Solis initio obſervationis erat circiter graduum 47. Albicantes nubeculæ per aërem ſparſæ, colorem cæruleum cæli nonnihil infuſcabant, & Solem qui lucebat, ac ſi Eclipſin pateretur, obſcurabant. Aſperum erat pro anni tempeſtate cælum, & ferebatur ſuperiore nocte gelaviſſe. Hæc Corona eadem planè ſpecie, & colorum ſplendore ſeſe exhibuit, ab hora 9 matutina, qua obſervationis initium factum fuit, uſque

TAB. IV. Fig. 1.

uſque ad horam circiter ſeſqui-decimam; deinde verò magis magiſque debilitata eſt uſque ad horam 2. pomeridianam qua ceſſavit; ita tamen ut paulum plus luminis recuperaverit aliquanto prius, antequam diſpareret.

Hujus Phænomeni obſervatio D. Hugenium impulit, ut ſocietati Regiæ, quæ illic loci congregatur proponeret illa, quæ antè aliquot annos meditatus erat, de cauſa non tantum harum Coronarum, ſed etiam Parheliorum, qui ad hoc uſque tempus, a multis ut prodigia, & ſigna futurorum mirabilium eventuum habiti ſunt. Quod coronas attinet, dicit illas produci a parvis granis rotundis factis ex glacie, cujus partes exteriores ſint pellucidæ, interiores vero (inſtar nivis tenuiſſimæ) opacæ, ita ut glacies pellucida opacam eodem modo convolvat, ac cerafum nucleus; quod videri poteſt fig. 2. ubi AA, nobis hujus grani figuram exhibet &
TAB. IV. Fig. 2. B nucleum, ſive partem opacam. Figura autem vero grano multo major facta eſt, ut res facilius intelligi queat. Retulit præterea obſervationes eorum qui grandinem hoc modo efformatam viderunt; inter quas fuit illa, quam *Carteſius*, in tractatu *de Meteoris* proponit; & explicuit porro quomodo quædam horum granorum per aërem inter nos & ſolem volitantium, cum minus remota ſunt ab axe qui a ſole ad oculum noſtrum progreditur, quam ad certum angulum, impediant neceſſariò quo-minus radii in illa incidentes uſque ad oculum perveniant, quia opacus ille nucleus poſt quodlibet granum efficit ſpatium figuræ Conicæ MNO, in fig. 2. intra quod quando oculus ſpectatoris collocatus eſt, ſolem per illud granum videre nequit, quem videbit alibi poſitus, ut in P.

Ut autem diſtinctius perciperetur effectus horum granorum in aere ſuſpenſorum fig. 3. Tab. IV. delineavit, in qua B, eſt locus oculi: BA, eſt axis qui ab oculo ad ſolem pertingit: C, M, F, ſunt glaciei

grana

grana cum nucleo, qui illa dimidia ſui parte opaca facit. Inter quæ cum granum C ſit in axe BA, & lineæ CK, LH, ſint radii ſolis axi quam proximi, quibus Nuclei opacitas tranſitum non impedit, certiſſimum eſt, non tantum granum C nullum radium Solis verſus B tranſmiſſurum; ſed etiam, ſi ſuperficiem concipimus coni, cujus vertex ſit in oculo, & ejus latera BD, BE, parallela radiis CK, LH, omnia grana MM, quæ intra hanc ſuperficiem continentur nullum ſimiliter tranſmiſſura radium verſus oculum, qui neceſſario intra conum granorum umbroſum continetur, ſed illa grana quæ ſunt ultra illam ſuperficiem, ſicut FF, nonnullis radiis tranſitum concedent verſus oculum, utpote qui poſitus eſt extrà granorum illorum umbroſum conum.

Unde ſequitur angulum hujuſce Coni DBE, illum eſſe qui coronæ diametrum conſtituit, qui pendet a proportione quam nucleus grani habet ad partem ejus pellucidam; ſi enim diameter coronæ eſt graduum 44. qualis in pleriſque coronis obſervatur, craſſities grani opaci erit ad craſſitiem pellucidi, ut 40. ad 19. quam tamen proportionem non ſemper cenſet eandem, imo hujus varietatem efficere, ut nonnunquam plures videantur Coronæ circa ſe invicem poſitæ, quæ omnes Solem in centro habeant.

Addidit, intellectu facile eſſe, quare Halones ſive Coronæ figura ſemper gaudeant rotunda, ſive Sol minus ſive magis ſupra horizontem eſſet elevatus; nec etiam difficilius eſſe cauſam afferre colorum, quæ hîc eadem eſt ac in vitreis Priſmatibus triangularibus, ſicuti liquet ex lineis tangentibus AC, ductis ad granum A, ad puncta per quæ radius Solis DA, intrat, & egreditur. Patere etiam, cur color rubeus ſit in interiori Coronæ circumferentia: & denique quare ſpatium quod comprehendit, præcipuè verſus partes vividiori- TAB. IV. Fig. 2.

 bus

bus coloribus tinctas, tenebricoſius aëre coronam ambiente appareat; quia nempè ibi maxima eſt copia granorum, quæ, dum nullum Solis radium ad oculos tranſmittunt, aërem obſcurant, ſicuti faciunt aquæ guttæ cum pluit.

Erraſſe Carteſium, cum harum coronarum cauſas explicare voluit, eo quod nullas habuerit obſervationes, in quibus hæc ultima circumſtantia accuratè relata fuerat. Dicit enim aërem intrà coronam ambiente magis luminoſum eſſe, ad cujus rei explicationem quædam grana ſupponit omnino pellucida lentium inſtar: quæ hypotheſis nequaquam vera eſſe poteſt, cum ex hac contraria iis quæ obſervantur, deducat; præterquam quod non conveniat rotunditati Coronæ in omnibus Solis altitudinibus, quod facilè demonſtrari poſſet.

Non moratus eſt in inquirendis cauſis horum granonorum ſemiopacorum, quia brevi tractatum, in quo fuſius hac de re aget, publici juris eſt facturus, in quo etiam exponere rationes conabitur, quare nucleus opacus, cum grano pellucido, quod illum circumdat, quaſdam determinatas proportiones, potius quam alias, ſervat. Quod vero attinet arcum majoris circuli, qui tangebat ſuperiora coronæ, quæ noviſſimè obſervata fuit 12 Maji, ut & quod colores ibi, ſicut etiam verſus inferiora vividiores erant, quam in aliis circuli partibus; dixit, hæc effecta non produci a granis, de quibus paulò antè locutus fuerat, ſed ab alia cauſa, quæ etiam inſervit productioni Parheliorum, & circulorum, qui illis ferè ſemper conjuncti ſunt.

De quibus circulis & Parheliis dixit, præter grana rotunda ſemi-opaca, in aëre etiam parvos cylindros ejuſdem generis formari; quales ſe quoſdam obſervaſſe *Carteſius* in tractatu de *Meteoris* aſſeverat, non quidem quod nucleos opacos continerent; verum nihil obſtare quin eadem cauſa quæ in granis rotundis locum

cum habet, illos quoque in cylindris efformet; ſuppoſitis itaque ejus figuræ, qualem fig. 4. Tab. IV. nobis ob oculos ponit, granis glaciei oblongis & ad extremitates rotundatis, & in quibus nucleus contineatur ejuſdem figuræ; ex diverſis horum diſpoſitionibus, omnia parheliorum, & eos comitantium circulorum phænomena, neceſſariò ſequentur.

Primò enim, ſi par horum cylindrorum ad perpendiculum erecta ſit, quem ſitum habuiſſe cum producerentur veriſimile admodum videtur, neceſſe eſt ut in cælo appareat magnus circulus albus, horizonti parallelus, per Solem tranſiens, & ejuſdem præter propter cum illo aſtro latitudinis; ſicut apparuit in Phænomeno Romæ obſervato A. 1629. de quo Carteſius & Gaſſendus ſcripſerunt, & quod Fig. 5. Tab. IV. oculis ſubjicitur. Hic autem circulus LKNM, fit reflexione radiorum Solarium a ſuperficie horum cylindrulorum; cum facilè demonſtrari queat, nullos cylindros Solis radios ad oculos reflexuros, niſi qui ſuprà horizontem ad eundem cum Sole angulum elevati ſint; unde evidentiſſime ſequitur circulum appariturum album ubique ejuſdem cum Sole altitudinis, adeoque parallelum horizonti; quod ſi præterea conſideremus pelluciditatem horum cylindrulorum ad perpendiculum erectorum, eorumque nucleos opacos, facile patebit illos circuli albi cylindrulos, qui ad determinatum angulum a Sole ſunt remoti, radios tranſmittere ad oculos noſtros, ſicut de granis rotundis ſemi-opacis ſuprà dictum fuit. Hi autem ſunt cylindruli qui ab utraque Solis parte Parhelium in magno circulo albo exhibent, ſicuti apparuit in obſervatione facta Romæ, ubi deſignantur litteris K & N; & in multis aliis. Hi Parhelii perſæpe caudas habent lucidas, quia cylindri, qui primos hos, qui Parhelios efficiunt, ſequuntur & magis a Sole diſtant quibuſdam etiam radiis verſus oculum noſtrum tranſi-

Vide Fig. 5. TAB. IV.

tranſitum concedunt, ita ut hæ caudæ ad longitudinem 20 graduum, imò ad majorem accedere poſſint. Hi Parhelii variis ſemper coloribus ſunt inſigniti, quia originem ſuam, haud ſecus ac coronæ, refractioni debent.

Præterea duæ aliæ ſunt Solis imagines, productæ ab his cylindris perpendicularibus, quæ ita in magno circulo albo ſunt diſpoſitæ, ut ſpectator verum Solem aſpiciens, illas a tergo habeat; uti in ſchemate obſervationis Romanæ videri poſſunt Parhelii deſignati litteris L. & M. Hi fiunt a duabus refractionibus & una reflexione per hos cylindros, eodem prorſus ritu quo Iris per pluviæ guttas, ſicut Carteſius explicuit, ita ut nuclei opaci nihil conferant ad hos duos Soles producendos, imo ſi nimium ſunt craſſi impediunt potius quominus videantur.

Quo autem Sol magis vel minus altus eſt, eo hi duo Parhelii magis vel minus ad ſe invicem accedunt, cujus rei veras menſuras in tractatu de Parheliis exponet. Hi autem non aliter ac Iris variis diſtinguentur coloribus, quales nonnunquam apparuerunt, niſi quando debiliores ſunt, & albi videntur, ſicut coronæ, ubi minus vividis coloribus ſunt tinctæ.

Poſtremò iidem cylindri ad perpendiculum in aëre ſuſpenſi Coronam circa Solem conficere poſſunt, propter rotunditatem extremitatum; quæ efficit ut cum a Sole ad quendam angulum ab omni parte diſtent, incipiant radios ad ſpectatoris oculos tranſmittere. Hæ autem veriſimiliter ſunt coronæ, quæ ferme ſemper tranſire videntur per duos Parhelios, qui ad latera veri Solis apparent, ſicuti Corona GKNI, in phænomeno Romano.

Alius etiam horum cylindrulorum eſt ſitus valde notabilis, illorum ſcilicet, qui ita ſunt poſiti ut eorum axes plano horizontis ſint quidem paralleli, diverſas tamen

tamen cœli plagas ſine ullo ordine reſpiciant inſtar acuum, quæ confuſe in terram projectæ eſſent. Qualis ſitus horizontalis maximè convenit his cylindricis corporibus, ſuffultis halitibus a terra aſcendentibus; ſicuti experientia id oſtendit in corporibus talis figuræ, quibus liberum per aërem deſcenſum permittimus.

Ex his cylindris fiunt arcus, qui Coronarum ſuperiores & inferiores tangunt partes, quales fuerunt in phænomeno Romæ obſervato A. 1630. quod a Scheinero deſcribitur in epiſtola ad Gaſſendum, & ſimiliter in omnibus aliis, quæ *Hevelius* retulit verſus finem libelli, quem appellavit, *Mercurium in Sole.*

Arcus autem qui ſuper Corona nuperrimè Pariſiis obſervata apparuit, ejuſdem fuit generis, Horum arcuum figura varia eſt, ſecundum varias Solis altitudines, & prout Coronarum Diametri majores minoreſque ſunt. Quando enim Sol horizonti eſt proximus, arcus hic ſuperius Coronam 44. graduum tangens, duo veluti cornua exhibebit; qualia in Fig. 6. Tab. IV. ſunt AB, AC; ſed quando Sol altius, altiuſque aſcendit, hæc cornua magis magiſque deprimuntur, & efficiunt arcus quales videre eſt eadem Fig. 6. ubi altitudo Solis adſcripta eſt arcui quem efficit, cujus rei demonſtrationes, ad tractatum de Parheliis, de quo ſupra locuti ſummus, rejectæ ſunt.

Cum verò partes ubi hi arcus Coronas attingunt, magis luminoſæ & coloratæ ſint cæteris, hinc fit ut exiſtimemus illic Parhelios eſſe.

Ratio autem propter quam hi arcus plerumque Coronas attingunt eſt, quod iidem cylindri jacentes qui arcum efficiunt, etiam per eorum extrema rotunda & pellucida Coronas producunt, ſicut de cylindris ſitu perpendiculari erectis dictum fuit. Corona autem poſtremò Pariſiis viſa, formata fuit a cylindris jacentibus;

Quod eò etiam confirmatur, quod in ſuperiori, & inferiori parte lucidior erat, quam in reliquis; quod neceſſariò accidit in Corona ab his cylindris ita poſitis producta; cum contrà illa, quæ a granis fit rotundis, ubique æquali lumine lucere debeat.

Prætereà in iiſdem cylindris horizonti parallelis, invenimus cauſas crucis albæ, obſervatæ cum Paraſelenis ab *Hevelio*, quam exponit in fine libelli *Mercurii in Sole*, quem ſupra memoravimus. Pars enim illa crucis, quæ perpendiculariter alteri inſiſtit, producitur a reflexione radiorum Lunæ a ſuperficie horum cylindrorum, ſicut altera pars horizonti parallela a reflexione cylindrorum ad perpendiculum erectorum, qui magnum circulum album, cujus eſt pars, efficiunt. Luna tamen haud multum ſupra horizontem elevata eſſe debet, ut cylindri jacentes hoc efficere poſſint, & accuratè obſervandum erit, ſi quando tale Phænomenum apparebit, an pars erecta non fiat arctior ubi per Lunam tranſit quam alibi, & præcipuè verſus ſuperiora, ubi dilatari debet, & evaneſcere.

Præter cylindros ad perpendiculum erectos, & horizonti parallelos, dantur ſæpe quam plurimi, qui per aërem in omni ſitus varietate diſperſi ſunt; & ii non ſecus ac grana rotunda Coronam circa Solem efficient, imò vividiorem quam grana, quia unuſquiſque cylindrus plures radios ad oculum noſtrum tranſmittit, quam unaquæque harum ſphærularum. Corona autem interior DEF, in Phænomeno Romano, a talibus cylindris formari potuit.

Quod verò attinet Parhelios, qui nonnunquam e diametro vero Soli oppoſiti apparent, qualem invenimus in obſervatione *Hevelii* facta 20. Februarii Anni 1661. ſe nec in granis rotundis, nec in cylindricis, cauſam, ait, invenire potuiſſe, quare hi Parhelii ſemper neceſſario invenirentur in circulo albo magno horizonti parallelo;

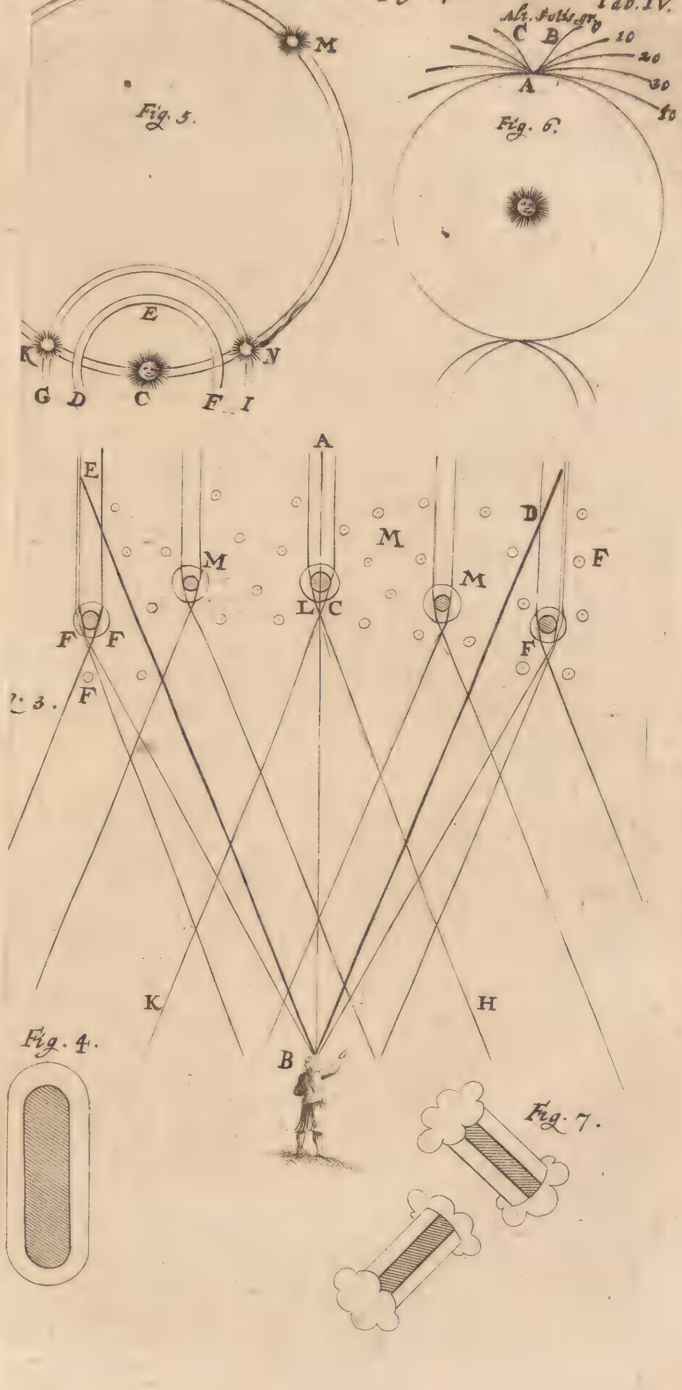
rallelo; imo ſi illud omnibus obſervationibus confirmaretur, cauſam aliunde eſſe quærendam; exiſtimare tamen ſe, illud tantum fortuitò contingere; quo poſito, ratio horum Parheliorum reddi poteſt eadem ex hypotheſi, qua explicantur cauſæ Anthelii quem Hevelius 6. Septembris 1661. obſervavit, ubi è regione Solis, duo erant arcus circuli colorati, ſe mutuò interſecantes, qui locus interſectionis erat ille falſi Solis. Qui etſi in figura *Hevelii* repræſentetur, quaſi ejuſdem altitudinis cum verò Sole fuiſſet, revera tamen fuit altior 15. grad. vel amplius, uti poſteà ipſe confeſſus eſt. Ita ut ſi magnus circulus albus fuiſſet in hoc Phænomeno, Parhelius minimè in illo fuiſſet.

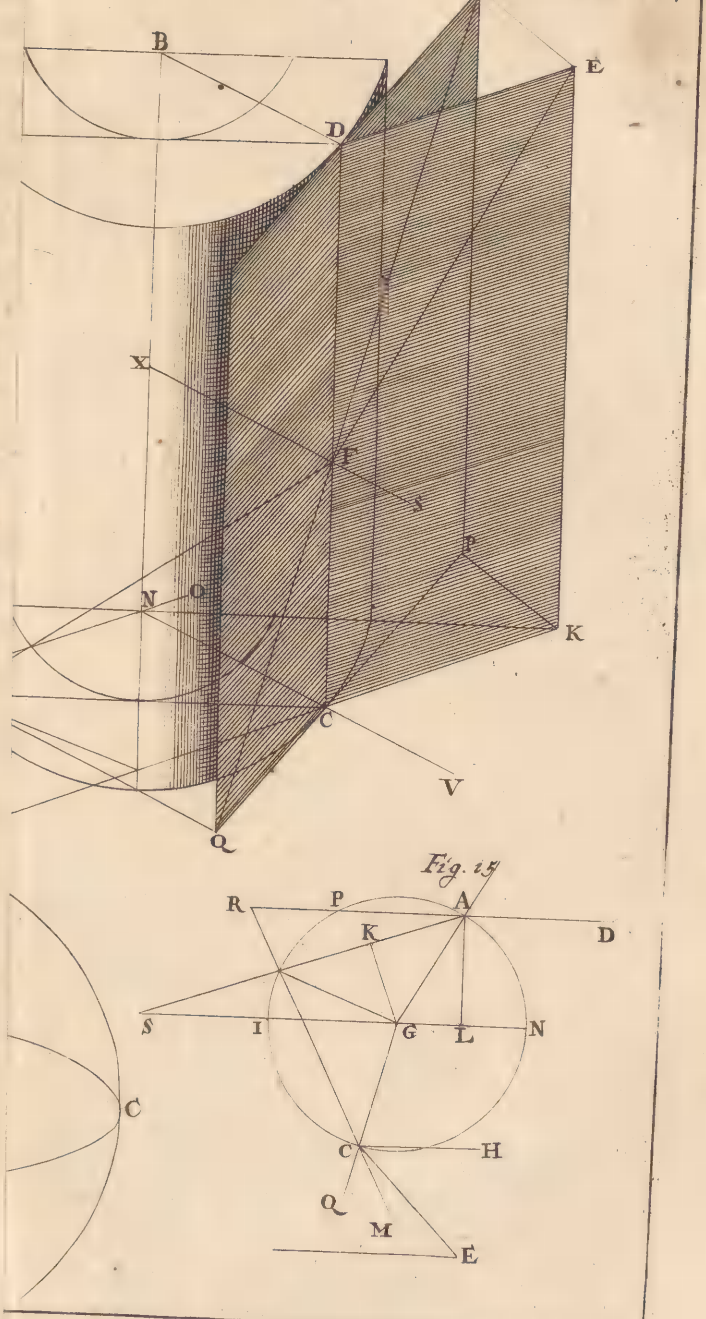
Ad horum Solium generationem, ſupponit multitudinem parvorum cylindrorum cum nucleis, ut ſuperiores, opacis, qui per aërem ferebantur nec ad perpendiculum, nec paralleli horizonti; ſed certo angulo ferè ſemirecto ad planum horizontis inclinati; ad quod præcipuè apti erant cylindri, quos *Carteſius* decidentes de cælo vidit, qui ſtellati ad utramque extremitatem erant; ſicuti experientia liquebit, ſi cylindros talis figuræ, qualem videmus Fig. 7. per aërem, vel aquam demittamus. TAB. IV.
In his cylindrulis inveniri poteſt, ſecundum calculum, qui in tractatu de Parheliis inſtituetur, non tantum cauſa Antheliorum, qui a duorum circulorum interſectione efficiuntur, ſicut in fig. 8. ſed etiam aliorum quorundam arcuum, & virgarum minus frequentium, quæ TAB. IV.
nonnunquam propè Solem apparent; de quibus tamen hactenus certi nihil affirmari poteſt, cum accuratæ, & fide dignæ obſervationes deſint, ſed ut ad oculum varios hos cylindrorum effectus oſtenderet Hugenius, cylindrum ſecum attulit ex vitro confectum, pedali longitudine, ejus figuræ quam videre eſt Fig. 4. Tab. IV. Nuclei opaci in medio officium præſtabat, cylindrus ligneus, & reliquum ſpatium aqua repletum

erat,

erat, loco glaciei pellucidæ. Quo cylindro Soli expoſito, oculoque debito in ſitu collocato, apparebant ſucceſſivè omnes reflexiones & refractiones de quibus ſermo factus eſt: unde haud difficile concludi poterat, quod ſi magnus talium cylindrorum numerus, licet hoc vitreo incomparabiliter minorum, in aëre hærerent, atque diverſos, quos ſuppoſuimus, ſitus obtinerent, omnia phænomena Parheliorum, & comitum circulorum inde neceſſario ſecutura; optandum quidem eſſet, ad firmandam certius veritatem hypotheſeos, ut eo, quo Parhelii obſervantur, tempore hi cylindruli verſus humum delapſi videri poſſent; ſed oſtendit haud facile hoc fieri poſſe, quia exhalationes quæ tunc temporis è terra cœlum verſus aſcendunt, & efficiunt ut figuram obtineant cylindricam, faciunt etiam ut penſiles in aëre hæreant. His addidit, minimè mirum videri debere; parvula grandinis grana ab exhalationibus ſuſtineri poſſe, quæ rarefiendo, & verſus ſuperiora pergendo, ſatis motus ad id efficiendum habere poterant. Hoc autem facilius multò concipi, quam eoſdem halitus ſuſtinere poſſe ingentem, & grandem glaciei circulum, qualem *Carteſius* ad explicandas cauſas Parheliorum, & magni circuli albi phænomeni Romani, ſuppoſuit. In qua hypotheſi hæ præterea difficultates ſunt obſervandæ, nullam ſcilicet inveniri rationem, quare circulus albus, ſicuti ſemper obſervatur, per Solem neceſſario tranſeat, illumque ſequatur, altitudine licet ejus mutata, etſi hoc phænomenum ſubinde per horas tres, quatuorve duret. Deinde eundem circulum album, è glacie confectum ſpectatoribus a ſe invicem valdè remotis, rotundum apparere non poſſe, atque per Solem tranſeuntem, uti revera tamen fit: præterea quando Parhelii obſervantur, minimè videri illam nubem rotundam circulo glaciei circumdatam, quæ craſſitie ſua

De Parheliis. pag. 64. Tab. IV.




I
E
B
D
X
F
S
P
N
O
K
C
V
Q
Fig. 15
R
P
A
K
D
S
I
G
L
N
C
C
H
Q
M
E

ſua ſpectatoribus cœli partem occultaret, quod è contrario ferme plane ſerenum apparet, præter nubeculas quaſdam, quas locum immutare ſuum videre poſſumus, dum magnus circulus, & Parhelii eidem inhærent loco. Poſtremò ſecundum hanc hypotheſin tantum fortuito accidere ut Parhelii, qui ad latera Solis apparent, ſint in interſectionibus Coronæ & magni circuli albi, quod tamen ſemper obſervatur, & oſtendit clariſſimè cauſas Coronarum & Parheliorum, parum abs ſe invicem differre, contrà ſententiam *Carteſii.*

OBSERVATIO

SCHEINERI anno 1630.

Gaſſendus viſo rudi ſchemate Parheliorum anno 1630. *obſervatorum à Scheinero, accuratiorem ab ipſo deſcriptionem petit. Epiſt. pag.* 43. tom. 6 & tandem ſic inquit:

QUia vereor tamen ne videar parum conſiderate agere, rogo te ſaltem, ut exprimas (quod meminiſſe haud dubie potes) quemadmodum Irides illæ affectæ fuerint inter ſe. Videlicèt non ſatis capio, an majores minoribus concentricæ fuerint, & an majores ita ſeſe in vertice interſecuerint ut portiones, quæ deſinunt in verticali deſcripto intelligi debeant protenſæ ad horizontem verſus Boream? (quo caſu Irides debuiſſent videri longè ſolitis majores, imò penè arcus eorum circulorum qui magni in ſphæra dicuntur.) An potius duo illa crura quæ ad horizontem uſque depreſſa fuere, repræſentarint unum quendam & continuum ſemi-

mi-circulum? portiones autem crurium quæ ad verticem fuerint quaſi arcus unus circuli alterius inferiorem contingentis, uti apparet, dum ſpeculum, aquamve extremam arcu quodam contingimus. Non capio item an quæ dicuntur Irides minores ſeſe ſurſum deorſumque ſubingreſſæ mutuo fuerint, an contigerint, an ſecuerint; an, quod probabilius videtur æquidiſtantes undique fuerint; an Sol demùm (qui ad eas partes) vel in nodo vel in contactu vel in interſtitio apparuerit. Non ſum, inquam, adeo acutus ut iſta ex ſola figuræ inſpectione pervideam. &c.

Reſpondet his Scheinerus pag. 401., *ejuſdem tom.* 6. *Operum Gaſſendi.*

CUm qua etiam adjungo exemplar Parheliorum anno præterito (1630.) obſervatorum, eorumque explicationem petitam ſubnecto; quanquam ſatis ambigo, horum an eorum Parheliorum quæ anno 1629. obſervavi, quæque tu commentariis tuis illuſtraſti, explicationem deſideres; ſed utut ſit, quicquid de uno, idem fere de altero dicatur: ad ſingula igitur venio. Diagramma ad te manu exaratum recte perlatum eſt, quia Romæ illud typis nunquam commiſi. Iridum Solem proximè ambientium diametri fuere grad. 45. plus minus: remotiorum in impreſſo ORP grad. 95. & 20. min. circiter. Colores ut Iridum Solarium primarum, puniceus vel ruber Soli proximus: reliqui ordine & more ſolito. Omnium iſtorum arcuum craſſitudo ſeu latitudo æqualis & eadem, Solari tamen Diametro minor quaſi tertia parte, prout ſchemata recte docent: quanquam inficias non iverim circulum lacteum horizonti parallelum reliquis arcubus aliquanto fuiſſe latiorem. Cujus diameter apparens ſecundum Solis altitudinem in ſphæra metienda eſt, juxta rationem circulorum in ſphæra maximis minorum. Parhe-

Vide Fig. 16.

Parhelia anni 1629. ſatis videntur explicata in tranſmiſſa charta, anni vero 1630. ita ſe habuere. Duo quidem M & N ſatis vivacia: altera duo O & P minus vegeta extitere; M & N qua parte Solem reſpiciebant rubore purpureo, averſa colore candido fulgebant; O & P tota alba. Omnium iſtarum imaginum durationes erant differentes. Nam imago P debiliter & raro emicuit obliterata ante omnes, nubibus ibidem craſſiuſculis conglobatis. Imago O & illa debilis ſed tamen ſatis ſtabilis, diuque hæſit. Duæ laterales M & N per 3. horas conſtanter viſæ: elanguente tamen & poſt multas conflictationes extincto prius Sole fictitio M: alter autem N ultra horam ſuperſtes fuit, neque ultimum ipſius obitum egreſſus domo animadvertere potui, certus ipſum cum Sole genuino diu ſolum inceſſiſſe, neque nubibus neque vaporibus aut halitibus, inſtar aliorum, oppreſſum. Tandem tamen inſecutis pluviolis, & ipſe comparere deſiit.

Igitur ſi initium cum fine obſervationis conferamus reperiemus minimum horas $4\frac{1}{2}$: cum autem ad initium animadverſi phænomeni jam omnia in pleno curſu ſeſe ſtiterint, facile mihi perſuadeo ad quinque aut plures horas totam durationem perveniſſe.

Parhelia in plano verticali Q & R ubi ſeſe arcus Iridum vel interſecant, vel everſo ſitu prope verticem in plano verticali per oculi F & Solis G centra tranſeunte contingunt, ſplendoris vehementia qua viſum feriunt, aliis quandoque cedunt, quandoque præcellunt, figura & candore ordinarie ſuccumbunt neque figuram eadem magnitudine neque picturam ſimili ſemper elegantia diſpenſant, ſed modo augent modo minuunt pro varia nimirum Solis G agentis, & materiæ Q atque R patientis temperie. Unde hæc Parhelia in perpetua propemodum lucta, atque lucis colorumque fluctuatione verſantur. Prima fere & poſtrema in Parheliis viſuntur, quanquam in hac apparentia imago Solis N, ulti-

mas tenuit partes, prout ex induſtria obſervavi; diſtantia ſive altitudo jubaris Q ſupra horizontem, tempore primæ obſervationis fuit 49. gr. 40. min. Jubaris R, 76. gr. 10. min. Solis altitudo 28. gr. 30. min. unde diſtantia ipſius Q a Sole in circulo verticali fuit 21. gr. 10. min. At vero ipſius R diſtantia à Sole fuit 47. gr. 40. min. tempore antemeridiano quo primam obſervationem peregi. Initio harum obſervationum ventus boreas erat, ſed ſenſim in orientalem tandemque meridianum mutatus, pluvias non tamen magnas nec diuturnas cauſavit: diebus ſubſecutis penè quatuordecim cœlum quotidie ſemivapidum apparuit & quotidie ante prandium Sol novos filios creare conatus eſt, irrito tamen ſucceſſu, ex defectu ſcilicet vel materiæ vel debitæ diſpoſitionis. Vidi enim in circulo verticali initia Parheliorum manifeſta per ſat longa temporis intervalla; vidi etiam Solium lateralium manifeſtas reciprocationes. Iris ORP videtur fuiſſe portio una arcus circularis, ideoque ſemicirculus Soli concentricus tametſi juxta θ & K horizontem AB non penitus attigerit; fueruntque portiones OK, & Pθ, extenſionis inconſtantis, modo longioris modo brevioris. Arcus ZQα, βQ$\gamma\delta\epsilon\zeta$, ſolem proxime ambientes, oſtentabant quidem viſui unum quaſi quendam ambitum circularem confuſum, non æquabiliter latum, neque conſtanter ſibi ſimilem, ſed perenni quaſi fluctuatione exundantem atque varium: revera tamen, ex arcubus in ſchemate expreſſis conflabatur, quemadmodum ex inſtituto obſervationibus accuratiſſimis obſervavi. Cornua HRC videntur eſſe ſegmentum ſemicirculi minoris majorem ORP ſitu contrario contingentis in communi nodo R. Iridum ZQα, βQγ in nodo Q ſeſe interſecant, ibique Parhelium Q efficiunt. Soles duo N & M enati ſunt in communibus nodis ſeu interſectionibus M & N, quas facit iris $\zeta\epsilon\delta$ cum circulo lacteo ONMP. Cœli pars ſeptemtrionalis purgatior fuit auſtrali,

auſtrali, quæ tenuibus & viſcoſis vaporibus obſeſſa huic apparentiæ occaſionem & materiem majorem ſubminiſtravit. Atque hæc ſunt quæ ad tua quæſita reponenda occurrerunt modo. *In opuſculo de Parheliis plura* fortaſſis ad guſtum tuum promentur; delectavit me admodum tuus eruditus ille ſuper Parhelia mea commentarius; manum certe & calamum accuratiorem haud expecto, & gaudeo adumbrationibus meis tantum Apellem ſuperveniſſe; *ad guſtum faciunt, omnia quæ de geneſi*, natura & ſignificatu hujus phænomeni diſputas, uti ex meo tractatu ſatis perſpicies, &c.

HEVELII OBSERVATIONES.

Anno 1660. die 30. Martii mane conſpectæ GEDANI.

INitiò, horâ primâ poſt mediam noctem. Lunam A *integer circulus albicans* BCDE *circumdabat, in quo ad Lunæ latera binæ Pſeudo-Lunæ* B & D, *ſeu paraſelenæ diverſi coloris, albicantibus longiſſimis, ſubinde autem reciprocantibus radiis videbantur; illa ad ſiniſtram, caudam femur Serpentarii; hæc verò ad dextram, Jovem versùs exporrigebat: ut ex priore appoſito ſchemate liquet. Paulò poſt, horâ ſcilicet ſecundâ, alius major circulus, ad ipſum horizontem ſeſe extendens, minorem ambiebat. In utriuſque vertice deinde colorati arcus, inſtar inverſæ Iridis, naſcebantur: inferior* C *ſectio erat majoris, ſuperior verò, in quâ Arcturus clare affulgebat, minoris circuli. Quod egregium ſpectaculum per tres integras penè horas duravit: primùm exterrimus maximus iſte circulus albicans, deinceps arcus inverſus major variegatus* C, *denique minor ſuperior* F, & *ultimò interior circulus* BCDE *penitùs evanuit. Diameter hujus interioris circuli, nec non arcûs ſuperioris erat* 45. *grad.; majoris verò circuli,* & *inferioris arcus* 90. *grad.* Vide Fig. 17.

Anno 1660. die 6. April. hor. 5. 36. veſp.

Vide Fig. 18.

SOlem ad occaſum vergentem, arcus circuli diverſis picti coloribus, ad inſtar Iridis coronabant, in quibus ad utrumque ſcilicet latus duo pſeudo-Soles itidem variegati, longiuſculis caudis albicantibus, à Sole averſis, conſpiciebantur; circa Zenith verò, ubi ſectiones iſtius circuli quaſi leviter conjungebantur, alius arcus inverſus, pariter coloratus emicuit, referens in medio tertium, ſed paullò obſcuriorem Pſeudo-Solem. Hocce phænomenum ad ſemihoram, Cœlo perquàm ſereno, ad occaſum uſque Solis apparuit; ſic ut primùm ſuperior arcus, cum ſuo Pſeudo-Sole; dein ſiniſterior diſparuerit, occidente tertio cum ipſo Sole genuino. Diameter circuli Solem cingentis, quantum nudo oculo dijudicare dabatur, erat 45. ferè gr.

Anno 1660. die 17. Decemb. GEDANI.

Vide Fig. 19.

PRimâ die poſt oppoſitionem Solis & Lunæ, horâ ſextâ 36 matutinâ, Lunâ 12. gr. altâ, tres Pſeudo-Lunas, cum genuinâ, in occidente, conſpexi: hâc quidem facie. Primò, ipſam Lunam aëre defæcatiſſimo: duplex Corona elegantiſſimis, & lucidiſſimis coloribus tincta circumdabat. Ab utróque Lunæ latere, ſectiones magni cujuſdam circuli, 45. propemodùm gr., pariter inſtar Iridum variegatæ, ad horizontem uſque ſeſe exporrigentes, apparebant; in quibus binæ Pſeudo-Lunæ, longiſſimis, ac candidiſſimis caudis extabant: ſiniſtra prope Procyonem caudam aliquanto breviorem; dextra verò multò longiorem præ ſe ferens. In ſuperiore parte, non procul à Geminis, ubi collaterales diverſicolores circuli ſectiones concurrebant, alius arcus inverſus pariter variis coloribus conſpicuus, cum tertiâ Pſeudo-Lunâ paullò obtuſiori conſpectus. Præterea per ipſam genuinam Lunam, id quod

Magnitudo crucis, erat 30. & amplius grad.

quod rariſſimum, ampliſſima crux albicans, ſeu argentea incedebat, quæ ab inferiore parte, ad horizontem uſque protendebatur; à lateribus verò reliquis non omnino circulum attingebat; prout ex delineatione videre eſt. Erat autem inſuper adeò ſplendida, atque luminoſa, ut ad ipſum Solis exortum clarè atque diſtinctè affulſerit: at Pſeudo-Lunæ cum ſuis arcubus aliquantò citiùs extinctæ ſunt.

OBSERVATIO ex MATTHÆO PARIS.

Signum in cœlo admirabile viſum in *Anglia*, Anno Domini M. CC. XXXIII. ſexto Idus Aprilis, regni verò *Henrici III.* anno XVII. Duravit ab ortu Solis uſque ad meridiem.

E*Odem quoque tempore, ſexto ſcilicet Idus Aprilis, circa horam diei primam, in finibus* Herefordiæ & Vigorniæ, *apparuerunt in cœlo quatuor Soles adulterini, præter Solem naturalem, rubei coloris; quidam magnus circulus cryſtallini coloris, latitudine quaſi bipedali, amplitudine cingens quaſi totam* Angliam; *à cujus lateribus exibant ſemi-circuli, in quorum ſectionibus apparuerunt illi quatuor Soles memorati; vero Sole exiſtente in plaga Orientali, & aëre puriſſimo. Et quoniam non poteſt illud prodigiale portentum verbis deſcribi, ſigno demonſtrativo figuratur; ipſo cœlo ſic circinato exiſtente exemplari immediatè, multi ſimilitudinem rei ſic apparentis pinxerunt, propter rei novitatem admirandam.* Vide Fig. 20.

Vera delineatio Parhelii cœlo ſereno viſi Lugd. Bat. A. 1651. *Jan.* $\frac{14}{24}$ inter primam & ſecundam pomeridianam & in obſervatorio Academico obſervati a Samuele Car. Kechelio a Hollenſtein.

I*Ris alba* B.D.C. *lata* 35'. *fere, ejus pars ſumma ad*, D, *elevata gr.* 38 23'., & *centrum Sol verus* A, *altus gr.* Vide Fig. 21.

15.

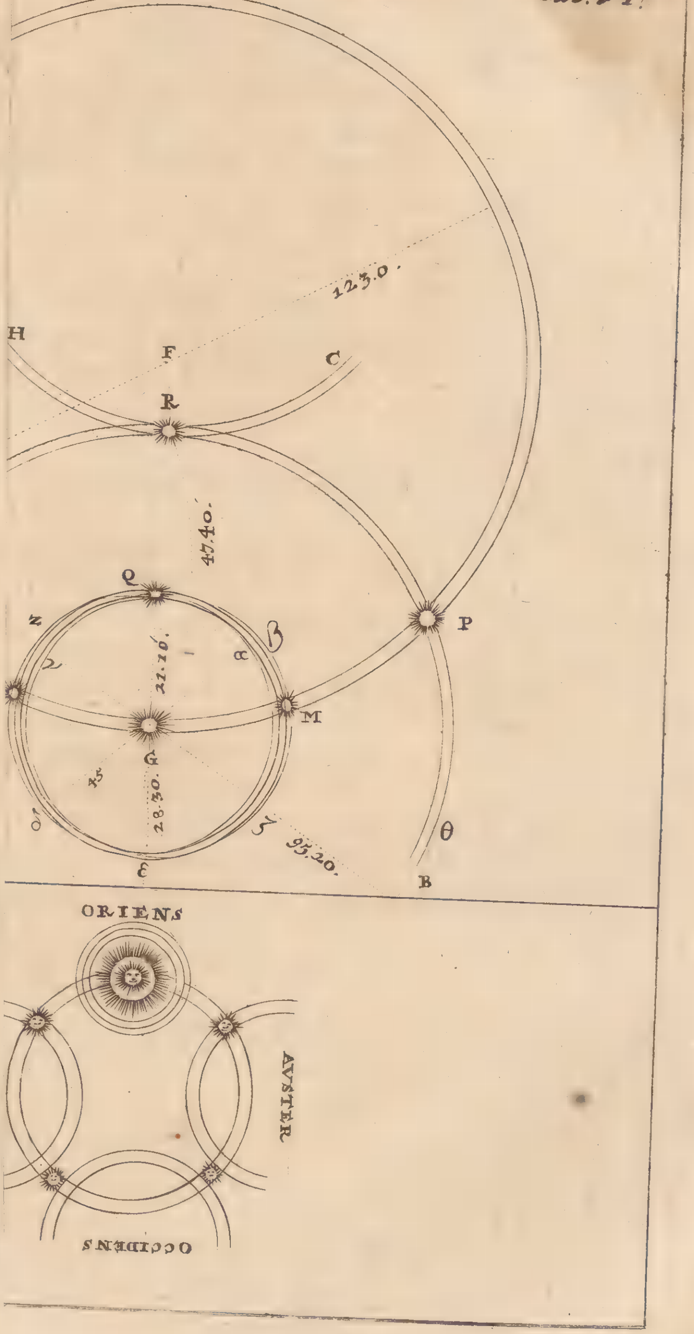
15. 48′. id eſt, H. 1. 36′., *in Azim. Occ. gr.* 23. 40′. *unà cum ang. vertic. & Eclipt. gr.* 60. 54′; *Pſeudo-Soles* B. C. *oblongi & inæquales, æqualiter diſtantes à Sole vero gr.* 22. 35′. *& ei co-alti.* C. *Pſeudo-Sol occiduus e flavo candidus minus lucidus, non longe diſtans a nubecula* G, *& prior diſparuit.* B *Pſeudo-Sol orientalis forti lumine cum arcu ſoli obverſo: & variegato coloribus, purpureo, rubicundo, & flavo, & cauda* B. F. *fig. conicæ: cujus baſis Sol ipſe, directe à Sole vero averſa gr.* 27. 0′. *Ejus pars* BE *gr.* 13. 10′. *conſtabat radiis flavis & rubicundis rutilantibus, reliqua* F. E. *candeſcente, qua ante Pſeudo-Solem evaneſcente, ipſe poſtea diſparuit, viſus fere ad ſemihoram, & poſt Pſeudo-Solem* C. *ad quadrantem. Iride paulo poſt videri deſinente.*

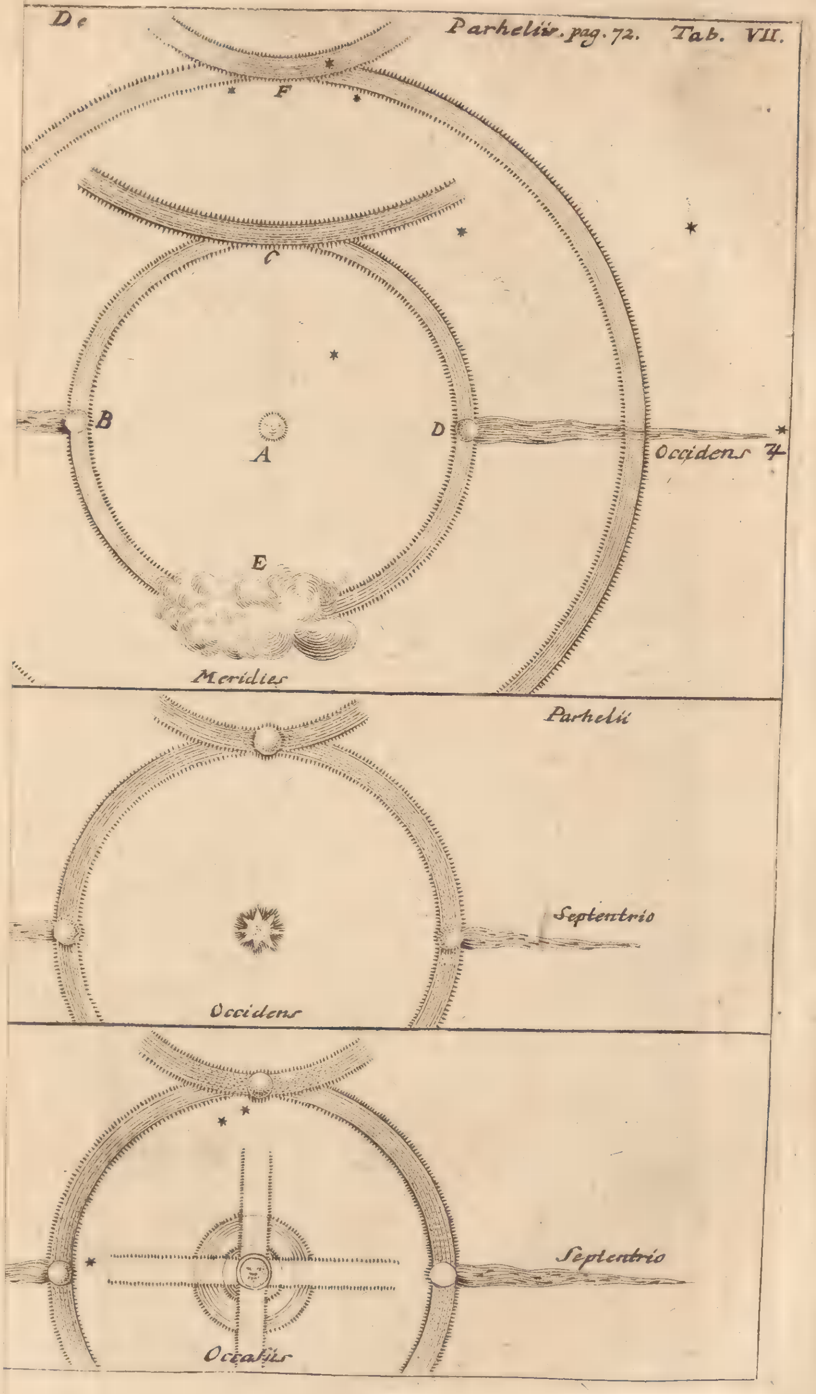
Hugenii Observatio.

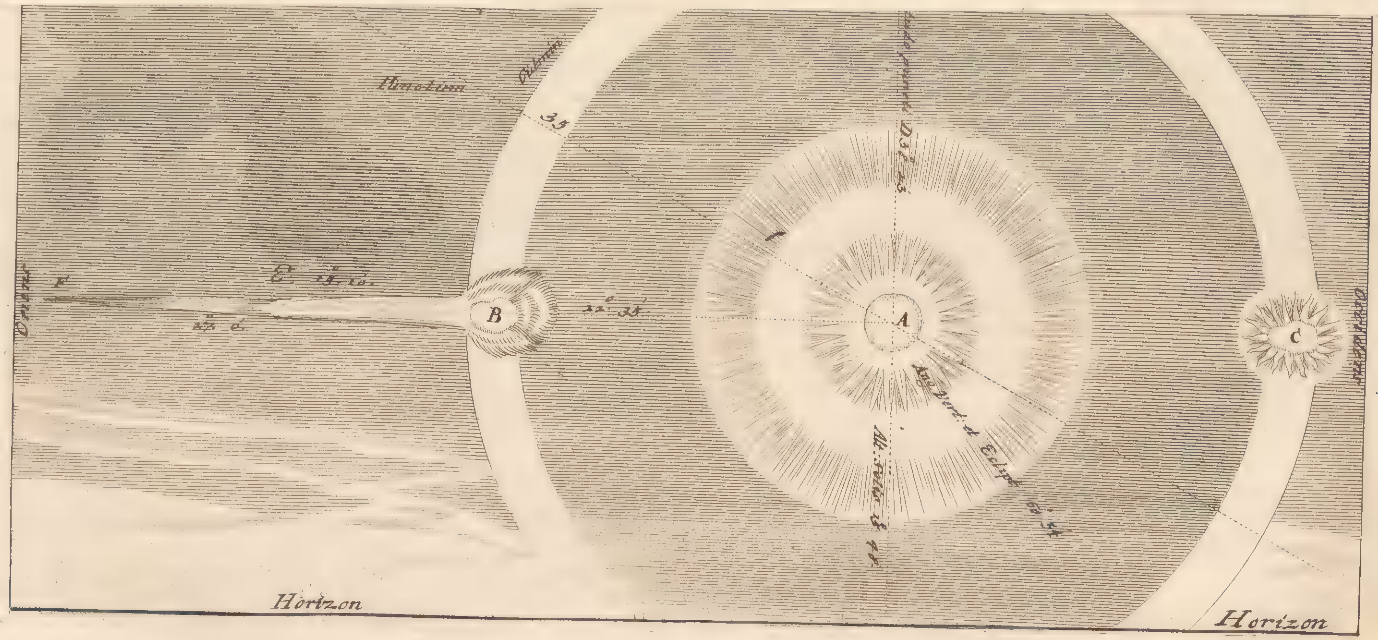
30. Maji 1652. Circulum in aëre circa Solem obſervavi. Sol erat in centro poſitus. Circuli Diameter 46. graduum circiter. Latitudo vero ut eſt Iridis Vulgaris. Sed & colores, quales in Iride, verum admodum debiles, ut vix apparerent, & contrario ſitu, ut ruber propior Solem eſſet. Cæruleus valde candicabat. Spatium omne quod circulus includebat, obſcuriori vapore tenebatur, quam reliquus aër: cujus ea fuit conſtitutio, ut veluti continua tenui nube cœlum offuſcaret, æthere tamen cæruleo interlucente. Ventus e Septentrione flabat, ſed placidiſſimus.

FINIS.

Tab. VI.


123.0.
H
F
C
R
47.40.
Q
Z
P
21.10.
M
G
45
28.30.
θ
95.20.
B
ORIENS
AVSTER
OCCIDENS


De Parheliis. pag. 72. Tab. VII.
F
C
B
A
D
Occidens ♃
E
Meridies
Parhelii
Septentrio
Occidens
Septentrio
Occaſus


A
B
C
F
Horizon
Horizon

CHRISTIANUS HUGENIUS
DE
MOTU CORPORUM
EX
PERCUSSIONE.

CHRISTIANUS HUGENIUS
DE
MOTU CORPORUM
EX
PERCUSSIONE.

Hypotheses.

I.

Corpus quodlibet ſemel motum, ſi nihil obſtet, pergere moveri eadem perpetuo celeritate & ſecundum lineam rectam.

II.

Quæcunque ſit cauſa corporibus duris a mutuo contactu reſiliendi cum in ſe invicem impinguntur; ponimus, cum corpora duo inter ſe æqualia, æquali celeritate, ex adverſo ac directè ſibi mutuo occurrunt, reſilire utrumque eâdem qua advenit celeritate.

Dicuntur autem directe occurrere, cum in eâdem lineâ rectâ utriusque centra gravitatis conjungente & motus fit & contactus.

III.

Motum corporum, celeritateſque æquales aut inæquales reſpective intelligendas eſſe, factâ relatione ad alia corpora quæ tanquam quieſcentia conſiderantur, etſi fortaſſe & hæc & illa communi alio motu involvantur. Ac proinde cum corpora duo ſibi mutuo occurrunt, etiamſi alteri præterea motui æquabili utrum-

que ſimul obnoxium fuerit; haud aliter illa ſe invicem impellere reſpectu ejus, qui eodem communi motu defertur, ac ſi omnibus adventitius ille motus abeſſet.

Veluti ſi quis navi vectus, quæ æquabili motu progrediatur, globulos duos æquales æquali celeritate in ſe invicem impingere faciat, ſuo nimirum & partium navis reſpectu, dicimus æquali quoque celeritate utrumque reſilire debere ejuſdem vectoris reſpectu; plane ſicut contingeret, ſi in navi quieſcente, aut in terra conſiſtens, eoſdem globulos æquali celeritate collidi faceret.

His poſitis in corporum æqualium occurſu quibus legibus illa a ſe mutuo impellantur demonſtrabimus, alias vero Hypotheſes quibus ad inæqualium caſus opus habebimus, ſuis locis inſeremus.

Propositio Prima.

Si corpori quieſcenti aliud æquale corpus occurrat, poſt contactum hoc quidem quieſcet, quieſcenti vero acquiretur eadem, quæ fuit in Impellente, celeritas.

INtelligatur navigium quodpiam juxta ripam ſecundo flumine deferri, ac tam propinquum ripæ, ut vector in illo ſtans poſſit ſocio in ripâ ſtanti manus porrigere. Teneat vero vector manibus ſuis A & B duo corpora æqualia ex filis ſuſpenſa E, F, quorum diſtantia EF bifariam diviſa ſit puncto G: motuque æquali manus ad occurſum mutuum promovens, ſui nempe & navigii reſpectu, etiam globulos E, F æquali celeritate inter ſe collidi faciet, quos itaque neceſſe eſt & æquali celeritate * a contactu mutuo reſilire ejuſdem vectoris & navigii reſpectu: Navigium autem ponatur interim ferri dextram verſus celeritate GE, eâdem nempe quâ manus dextra A delata fuit ſiniſtram verſus.

Vide Fig. I.

* Hyp. II.

Patet

Patet itaque vectoris manum A, reſpectu ripæ & ſocii in illa conſiſtentis, immotam ſtetiſſe; manum vero B, reſpectu ejuſdem ſocii, motam fuiſſe celeritate EF, duplâ ipſius GE vel FG. Quamobrem ſi ſocius in ripâ ſtans prehendiſſe ponatur manu ſuâ C manum vectoris A, cumque eâ caput fili globum E ſuſtinentis; alterâ vero manu D manum vectoris B, quæ ſuſtinet funiculum e quo pendet F; apparet dum vector globulos EF æquali celeritate concurrere facit, ſuo & navigii reſpectu, ſimul ſocium in ripâ ſtantem globulo E quieſcenti impegiſſe globulum F motum celeritate FE, reſpectu ripæ & ſui ipſius. Et conſtat quidem, vectori globulos ſuos, uti dictum eſt, moventi, nihil officere quod ſocius in ripâ ſtans manus ejus & filorum capita apprehenderit, cum tantum comitetur earum motum, nec ei ullum impedimentum afferat. Eâdem ratione nec ſocio in ripâ ſtanti globulumque F verſus immotum E deferenti, quidquam obſtat, quod vector manibus ſuis manus conjunctas habeat, ſiquidem manus A & C utraque reſpectu ripæ & ſocii quieſcunt, duæ vero D & B moventur eâdem celeritate FE.

Vide Fig. I.

Quia autem uti dictum fuit globuli E, F, poſt mutuum contactum, æquali celeritate reſiliunt, reſpectu vectoris & navigii; globulus nempe E celeritate GE, & globulus F celeritate GP, ipſumque interim navigium pergit dextram verſus celeritate GE ſeu FG; ſequitur, reſpectu ripæ & ſocii in illâ ſtantis, globulum F poſt impulſum reſtare immotum, alterum vero E, ejuſdem reſpectu, pergere ſiniſtram verſus, celeritate duplâ GE, hoc eſt, celeritate FE, quâ eâdem globulum F verſus E impulit. Itaque oſtendimus in terrâ ſtanti, corporique immoto corpus æquale impingenti, hoc quidem poſt contactum omnem motum amittere, illi vero omnem acquiri. Quod erat demonſtrandum.

Propositio II.

Si corpora duo æqualia inæquali celeritate lata ſe mutuo impellant, poſt contactum permutatis invicem celeritatibus ferentur.

Vide Fig. 2. FEratur corpus E celeritate EH dextrorſum, F vero, ipſi æquale, celeritate FH minori tendat primùm ex adverſo; convenient igitur in H. Dico, poſt mutuum occurſum, corpus E motum iri celeritate FH ſiniſtrorſum, F vero dextram verſus celeritate EH.

Intelligatur enim homo in ripâ fluminis conſiſtens dictos corporum motus efficere, ſuſtinendo nimirum manibus ſuis C, D, capita filorum ex quibus illa ſuſpenduntur, manuſque concurrere faciendo dictis celeritatibus EH, FH, atque una corpora E & F. Secta ſit porro diſtantia EF bifariam in G; & intelligatur prætervehi navigium celeritate GH dextram verſus, in quo conſiſtat alius homo, cujus quidem reſpectu movebitur globus E celeritate EG tantum, at globus F, celeritate FG, adeo ut ipſius reſpectu globi duo æquali celeritate ferantur ad mutuum occurſum. Quamobrem ſi prehendiſſe ponatur manibus ſuis A, B manus ſocii in ripâ ſtantis C, D, cumque iis capita filorum quibus globi ſuſpenduntur, eveniet, ut ſimul, qui in ripâ conſiſtit, illos concurrere faciat celeritatibus EH, FH; qui vero navigio vehitur eoſdem concurrere faciat celeritatibus inter ſe æqualibus, EG, *Hyp. II. FG; conſtat itaque, hujus reſpectu, * etiam æquali celeritate utrumque a contactu reverſurum; nempe, E celeritate GE, & F, celeritate GF: atqui navigium interea moveri pergit celeritate GH. Itaque reſpectu ripæ & hominis in illâ conſiſtentis habebit F celeritatem ex utriſque GF & GH compoſitam, hoc eſt, ipſi

EH

EH æqualem, E vero, celeritatem HF, quâ nimirum differunt inter ſe celeritates GE, GH. Adeoque oſtendimus homini ripæ inſiſtenti, globuloſque E & F ſibi mutuo impingenti celeritatibus EH, FH, poſt impulſum, reverſurum E celeritate FH, F vero celeritate EH; quod erat demonſtrandum.

Moveatur jam utrumque corpus E & F verſus dextram; E quidem celeritate EH; F vero præcedens minori celeritate FH; aſſequetur igitur E corpus F, convenientque in H; dico autem poſt contactum F inceſſurum celeritate EH, E vero inſecuturum celeritate FH. Eſtque demonſtratio eadem quæ ſuperior. Vide Fig. 3.

HYPOTHESIS IV.

Si corpus majus minori quieſcenti occurrat, aliquem ei motum dare, ac proinde de ſuo aliquid amittere.

PROPOSITIO III.

Corpus quamlibet magnum a quamlibet exiguo corpore & qualicumque celeritate impacto movetur.

INtelligatur navigium propter ripam fluminis ferri, in quo conſiſtens vector ſuſtineat corpora A & B, ex filis ſuſpenſa; ſitque A, quod ſiniſtra tenet, majus; B minus; teneatque dextram F, quæ ſuſtinet corpus B, immotam, ſui nempe & navigii reſpectu; verſus ipſam vero moveat manum E, unaque corpus A, celeritate quavis AB. * Impelletur ergo B, & amittet corpus A aliquid de celeritate ſuâ, ideoque in partem dextram perget celeritate minori quam fuerat AB. dum autem hæc contingunt, ponatur ferri Vide Fig. 4. *Hyp. IV.

navi-

navigium celeritate BA, ſiniſtram verſus; unde eveniet, ut dum vector corpus A transfert celeritate AB, reſpectu ſui naviſque, quâ vehitur, idem immotum ſtet reſpectu ripæ, ſpectatoriſque in eâ conſiſtentis, pariterque manus E. Altera vero F. cum corpore B movebitur, ejuſdem ſpectatoris reſpectu, celeritate BA ſiniſtrorſum, quoniam navigii reſpectu immotam poſuimus, navigiumque fertur celeritate BA verſus ſiniſtram. Quare ſi ſpectator in ripâ ſtans, prehendiſſe ponatur manibus C, D manus vectoris E, F, apparet, dum hic globum A movet verſus B immotum ſui reſpectu, ſimul illum movere B verſus A, qui ſui & ripæ reſpectu immotus quieſcit. Diximus autem ab impulſu globum A reſpectu vectoris & navigii, ferri in dextram partem minori velocitate quam AB; atqui navigium fertur celeritate BA verſus ſiniſtram; ergo, reſpectu ripæ & ſpectatoris in eâ ſtantis, manifeſtum eſt A ab impulſu moveri aliquantum in partem ſiniſtram. Itaque oſtenſum eſt in terrâ ſtanti, corporique quieſcenti & quamlibet magno A, quamlibet exiguum B, celeritate qualicunque BA, impingenti, motum iri corpus A: quod erat demonſtrandum.

Hypothesis V.

Corporibus duobus duris ſibi mutuo occurrentibus, ſi, poſt impulſum, contingat alteri eorum omnem quem habebat motum conſervari, etiam alterius motui nihil decedere neque adjici.

Pro-

De Motu. pag. 80. *Tab: 1.*



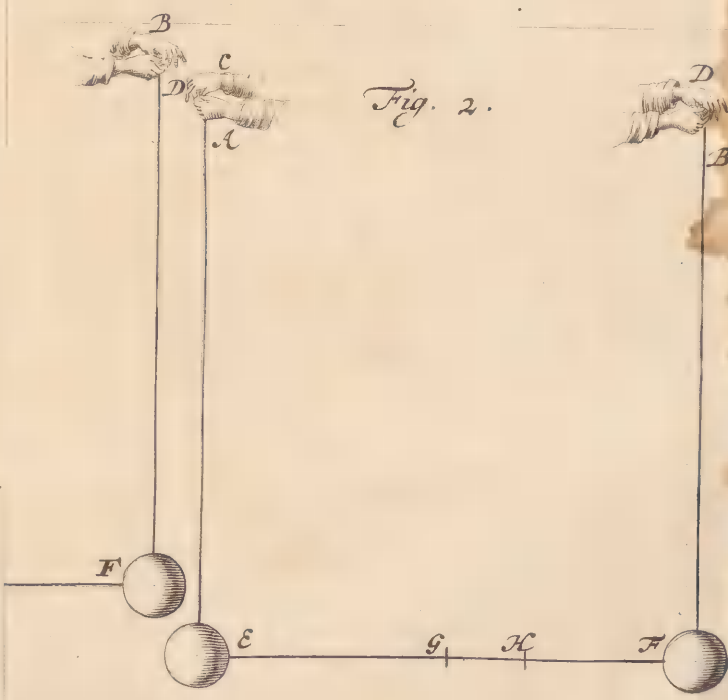


Fig. 2.

PROPOSITIO IV.

Quoties duo corpora inter ſe colliduntur, eadem eſt, mutuo reſpectu, diſcedentibus celeritas, quæ fuit appropinquantibus.

DE æqualibus corporibus manifeſtum eſt ex propoſitione II. Sint igitur nunc inæqualia, primumque is caſus proponatur, quo, majori A quieſcenti, impingitur corpus minus B, celeritate BA dextram verſus pergens. Dico ipſa poſt contactum eâdem celeritate BA ſeparatum iri, adeo ut, ſi parte una temporis corpus B confecerit ſpatium BA, poſt alteram ſimilem temporis partem, rurſus ſpatio, quod ipſi BA æquale ſit, ſeparata inveniantur. Vide Fig. 5.

Conſtat enim A celeritatem aliquam accipere impulſu corporis B; ſit ea AC, minorem autem eſſe oportet celeritate, BA qua ipſum B movebatur: nam ſi ipſi B æquale eſſet A, tum demum celeritatem BA ex impulſu acciperet. * Dividatur AC in duo æqualia puncto D, ſitque AE æqualis AD. Si igitur navigio hoſce motus contingere exiſtimemus, quod ſiniſtram verſus prætervehatur celeritate DA: neceſſe eſt ut ante impulſum, corpus A quod in navigio quieſcebat, motum fuerit reſpectu ripæ dictâ celeritate DA, ſiniſtram verſus; poſt impulſum vero, cum in navigio motum dicatur celeritate AC dextrorſum, ipſum vero navigium celeritate DA in partem contrariam feratur, movebitur A, ripæ reſpectu, celeritate DC ſeu AD in partem dextram. Itaque, reſpectu ripæ, corpus A ante & poſt impulſum, eandem ſervat celeritatem. Quare etiam B, * ejuſdem reſpectu, nihil de ſuâ celeritate perdidiſſe oportet. Movebatur autem B reſpectu ripæ ante occurſum celeritate BE dextrorſum, quia

*Prop. 1.

*Hyp. 5.

quia in navigio habebat celeritatem BA dextram verſus, ipſum vero navigium celeritatem DA ſeu AE in partem oppoſitam. Igitur & poſt occurſum, reſpectu ripæ, moveri debebit celeritate BE, ſed ſiniſtram verſus: nam quominus poſſit verſus dextram obſtat tardior motus corporis A; cum igitur poſt impulſum moveatur B, ripæ reſpectu, celeritate EB ſiniſtram verſus, at A dextrorſum celeritate AD ſeu EA, neceſſe eſt ipſa a ſe mutuo diſcedere celeritate ex utriſque BE, EA compoſitâ, hoc eſt, celeritate BA, neque id tantum ripæ, ſed & navigii reſpectu, quum reverâ eâ celeritate ſeparentur. Quod autem in navigio progrediente ſibi occurrentibus contingit, etiam extra navigium ubique eodem modo contingere conſtat.

Hoc caſu demonſtrato reliqui facile conſequuntur, ſuperſunt autem quatuor diverſi, nam vel minus corpus quieſcit, vel utraque adverſis motibus cientur, vel celeriore motu minus inſequitur majus, vel contra; quos omnes ſimul proponere licebit.

Vide Fig. 6. Sit enim ut ante corpus A majus quam B, & feratur A celeritate AC, B vero vel omnino quieſcat, vel habeat celeritatem BC; cum igitur corpora ſic mota, mutuo reſpectu, habeant celeritatem AB; dico, & poſt impulſum, eadem celeritate ipſa ſeparatum iri.

Etenim ſi denuo hi motus in navigio fieri conſiderentur, quod prætervehatur celeritate CA, eâdem nempe quâ fertur corpus A, ſed in partem contrariam; evidens eſt ripæ reſpectu, A quidem immotum ſtare, B vero, omni caſu, ipſi occurrere celeritate BA. Eſt autem A majus quam B; ergo exiſtit caſus præcedens, ex quo patet eadem celeritate AB, poſt impulſum, corpora ſeparari debere ejuſdem ripæ reſpectu. Unde etiam navigii reſpectu, & reverâ hac celeritate ipſa à ſe invicem recedere perſpicuum eſt.

Pro-

PROPOSITIO V.

Si duo corpora, eâdem celeritate ſingula ad occurſum revertantur quâ ab impulſu reſilierunt, ſingula, poſt alterum impulſum, eandem acquirent celeritatem, quâ ferebantur ad occurſum primum.

Ponatur corpus A motum fuiſſe celeritate AC, B vero celeritate BC, eaque ſibi invicem occurriſſe; & ab occurſu diſceſſerit A celeritate CD; B celeritate CE: poſtmodum vero iiſdem hiſce revertatur utrumque ad occurſum, nempe A celeritate DC; B celeritate EC. Dico inde receſſurum A celeritate CA; B vero celeritate CB, quibus primo ad occurſum tetenderant. Etenim dum pergunt ad ſecundum occurſum, A quidem celeritate DC, B vero celeritate EC, ſi imaginemur in navigio hoſce motus accidere, quod prætervehatur celeritate AD, feretur jam, ripæ reſpectu, A celeritate AC, quia in navigio movetur celeritate DC, ipſum vero navigium celeritate AD: B vero, reſpectu ripæ, celeritate BC: nam quia DE æqualis eſt AB *, demptâ communi DB, erit BE æqualis AD; movetur ergo navigium celeritate BE; B autem in navigio celeritate EC; unde, reſpectu ripæ, movebitur B celeritate BC, ſicut diximus: Neceſſe eſt igitur, ejuſdem ripæ reſpectu, diſcedere ipſa ab occurſu, A quidem celeritate CD, B vero celeritate CE, poſitum enim fuit ab initio, ſi A tendat ad occurſum celeritate AC, & B celeritate BC, diſcedere poſt impulſum, A quidem celeritate CD, B vero, celeritate CE. Dum ergo A, reſpectu ripæ movetur celeritate CD, navigium vero celeritate AD, fiet, ut in navigio feratur A celeritate CA. Item quum B ripæ reſpectu moveatur celeritate CE, & navigium ce-

Vide Fig. 7.

* Prop. IV.

leritate AD ſeu BE, erit ipſius B in navigio celeritas CB. Quæ igitur in navigio ferebantur ad occurſum celeritatibus DC, EC, ea in navigio referri oſtenſum eſt celeritatibus CA, CB, unde ubivis idem contingere neceſſe eſt, & conſtat propoſitum.

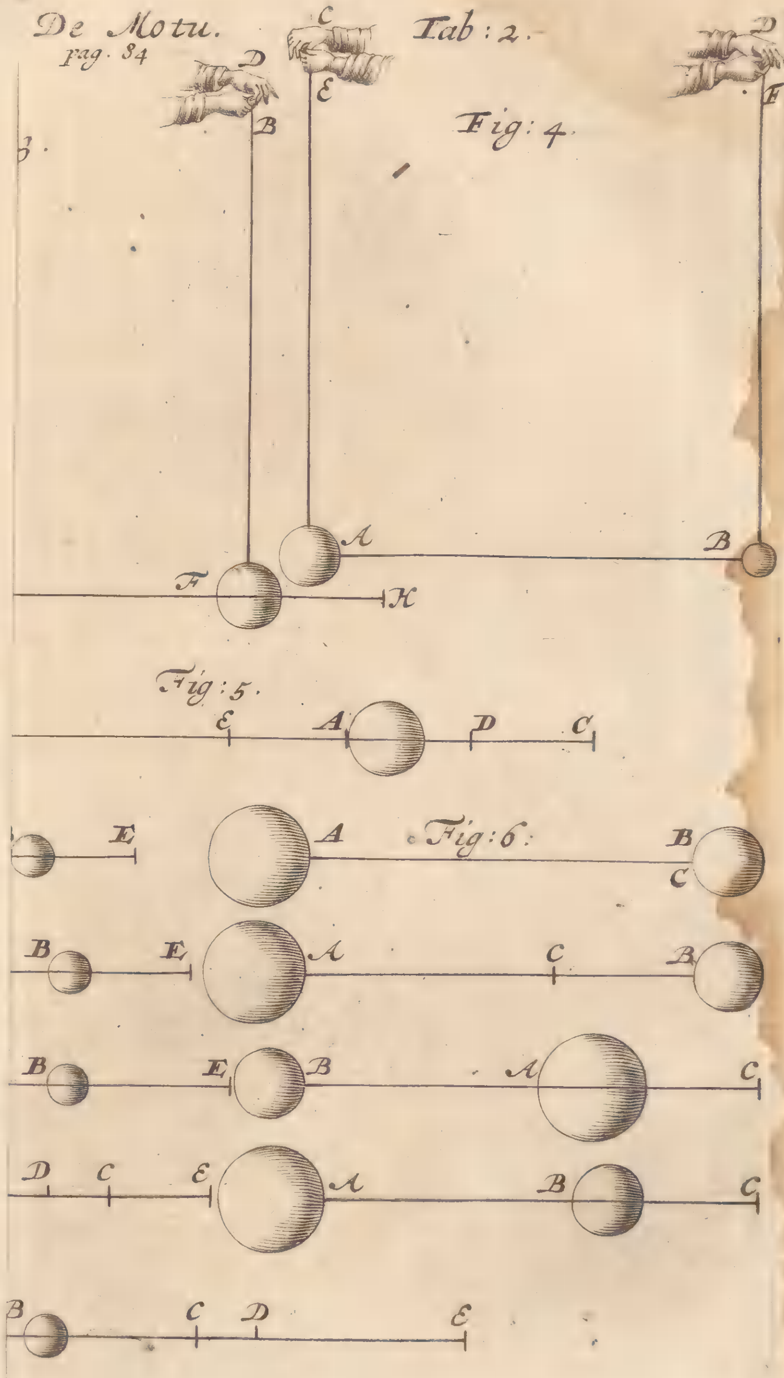
Propositio VI.

Corporibus duobus ſibi mutuo occurrentibus non ſemper poſt impulſum eadem motus quantitas in utroque ſimul ſumpto conſervatur quæ fuit ante, ſed vel augeri poteſt vel minui.

Quantitas motus ſic æſtimatur, ut in corporibus inæqualibus æque celeriter motis, tanto majorem motus quantitatem quodque conſtituat, quanto majus eſt. In corporibus autem æqualibus inæquali celeritate motis, quanto alterum altero eſt velocius: ut igitur quod propoſitum eſt demonſtremus:

Vide Fig. 8. Eſto corpus A majus quam B; A vero quieſcat & B ad ipſum feratur celeritate BA: movebitur igitur A, * Prop. III. * & aliquam celeritatem acquiret, puta AC. revertetur autem B celeritate AD, ita ut tota celeritas CD, quam mutuo reſpectu habebunt, æqualis ſit celeritati * Prop. IV. AB. * Quod ſi igitur corpus A ipſi B æquale eſſet, eadem motus quantitas exiſteret poſt impulſum atque ante; etenim manifeſtum eſt eandem conſtitui, ſive duo corpora ipſi B æqualia moveantur, alterum celeritate AD, alterum celeritate AC, ſive ſolum B moveatur celeritate CD ſeu BA. atqui corpus A majus eſt quam B; ergo apparet majorem motus quantitatem conſtitui quum poſt impulſum corpus A fertur celeritate AC, & corpus B celeritate AD, quam antea, quum ſolum B haberet celeritatem BA. Rurſus quod minui poſſit motus quantitas ſic oſtenditur. Etenim ſi occurrente B, corpori

De Motu. Tab: 2.
pag. 84



corpori A, quieſcenti, celeritate BA, acquiritur ipſi A celeritas AC, remanetque in B celeritas AD: fiet viciſſim, ſi A adveniat celeritate CA, B vero ex adverſo celeritate DA, ut A, poſt contactum, motus expers remaneat, B vero reſiliat celeritate AB *; unde, ex iis quæ antea oſtenſa ſunt, minor jam motus quantitas erit poſt concurſum quam fuerat ante. * Prop. V.

Propositio VII.

Si corpus majus minori quieſcenti occurrat, minorem ei velocitatem dat quam duplam ſuæ.

Occurrat corpus A celeritate AB, minori quieſcenti B: dico ipſi B minorem imprimi celeritatem quam ſit dupla AB. Quia enim poſt impulſum eadem celeritate AB a ſe invicem diſcedere debent corpora *, neceſſe eſſet ſi dupla fieret celeritas corporis B celeritatis AB, ut A, poſt impulſum, eâdem celeritate AB corpus B inſequeretur, quod fieri non poteſt *: ſi vero major quam dupla, oporteret ut A, poſt impulſum, majori celeritate quam AB moveri pergeret; quod ſimiliter abſurdum eſt; quare conſtat propoſitum. Vide Fig. 9. * Prop. IV. * Hyp. IV.

Sicuti de corporibus æqualibus oſtenſum fuit in univerſum, qua ratione alterum alteri motum transferat, eo conceſſo quod æqualia æquali celeritate ſibi impacta æqualiter quoque reſiliant. Ita, in diverſæ magnitudinis corporibus, omnes caſus determinari poſſunt; qui quidem plurimi exiſtunt, hoc quod ſequitur poſito: Nimirum, ſi inæqualia duo corpora ad occurſum mutuum ferantur, celeritates autem magnitudinibus contrariâ ratione reſpondeant, quod tum ſingula a contactu, eadem quâ venere celeritate, retrorſum agantur.

 Veluti

Veluti ſi A ſit triplum ad B: celeritas autem BC, quâ movetur B ſit tripla celeritatis AC quâ movetur A; quod facto concurſu in C, corpus utrumque, eâdem quâ prius ferebatur celeritate, revertatur. Cæterum, quia hoc non æque evidens eſt (licet a ratione non alienum, experimentiſque apprime conſentiens) atque illud quod circa æqualia corpora aſſumptum fuit, demonſtratione ipſum confirmare conabimur.

Vide Fig. 10.

Conſtat ſane, quoties corpora duo gravia deorſum feruntur motu naturaliter accelerato, duplicatam eſſe rationem ſpatiorum ab ipſis peractorum rationis maximorum graduum celeritatis ipſis acquiſitæ. Hoc enim a Galilæo demonſtratum eſt, dialogo de motu tertio, & experimentis innumeris exquiſitiſſimiſque deprehenſum: uti hoc quoque, quod celeritas cadenti corpori acquiſita, poſſit ipſum ad eandem, unde deſcendit, altitudinem reſtituere. Quorum etiam utriuſque demonſtrationes, in iis quæ de horologio ſcripſimus, exhibentur. Hinc autem dictum theorema jam demonſtrari poterit.

Propositio VIII.

Si corpora duo ſibi ex adverſo occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contrariâ ratione reſpondeant, utrumque eâdem quâ acceſſit celeritate reſiliet.

Vide Fig. 11.

Occurrant ſibi corpora A & B, quorum illud quam hoc majus ſit, & quam rationem habet magnitudo A, ad magnitudinem B, eandem habeat celeritas corporis B, quæ ſit BC, ad celeritatem corporis A, quæ ſit AC. oſtendendum eſt, poſt contactum mutuum, utrumque eâdem quâ venit celeritate reverti, nempe A, celeritate CA, B vero, celeritate CB: conſtat autem, ſi A reflectatur celeritate CA, etiam B reflecti cele-

celeritate CB, quia alioqui non eadem eſſet mutuo reſpectu celeritas recedendi, quæ fuit appropinquandi. * Prop. IV. Si igitur corpus A non revertitur celeritate CA, reſiliat primò, ſi fieri poteſt, celeritate minori CD; ergo B reſiliet celeritate CF, majori quam quâ advenerat, ita ut DE, ſit æqualis AB *. Ponamus corpus A * Prop. IV. acquiſiviſſe celeritatem priorem AC, quâ tendebat ad occurſum, cadendo ex altitudine HA, ut nimirum poſtquam deſcenderit uſque in A, motum perpendicularem mutaverit in horizontalem cujus celeritas AC; corpus autem B acquiſiviſſe ſimiliter celeritatem BC, cadendo ex altitudine KB; ſunt igitur hæ altitudines in celeritatum ratione duplicatâ, hoc eſt, ſicut quadratum AC ad quadratum CB, ita HA ad KB. Quod ſi deinde, poſt occurſum, corpora A & B motus ſuos Horizontales, quorum celeritates metiuntur CD, CE, convertant in motus perpendiculares ſurſum: conſtat corpus A perventurum ad altitudinem AL, ita ut ſit AL, ad AH, ſicut quadratum CD ad quadratum CA. Quando enim hujuſmodi rationem habet AL ad AH, certum eſt corpori decidenti ex altitudine LA, acquiri velocitatem CD: unde & viciſſim, velocitatem habens CD, attingere poterit altitudinem AL, per ea quæ ſuperius poſita fuere; corpus autem B convertendo celeritatem CE in motum perpendicularem ſurſum, perveniet ad altitudinem BM, ut ſit MB ad KB ſicut quadratum CE ad quadratum CB. Jungantur HK, LM quæ neceſſario ſe mutuo ſecabunt, puta in P; & dividantur utraque ſimiliter in N & O, ut, ſicut magnitudo B ad A, hoc eſt, ſicut AC ad CB, ita ſit HN ad NK, itemque LO ad OM. Itaque cum corporis A, centrum gravitatis poſitum eſt in H, & corporis B centrum gravitatis in K, compoſitæ ipſorum gravitatis centrum eſt in puncto N. Poſtquam vero ex H & K deciderunt, ac poſt mutuum occurſum rurſus

in

in altum ſeſe ſuſtulere uſque in L & M, centrum compoſitæ ex ipſis gravitatis erit in O: quod fieri non poteſt; quoniam, ut mox oſtendemus, altius eſt punctum O quam N: certiſſimum enim in mechanicis eſt axioma, motu corporum qui a gravitate ipſorum proficiſcitur, centrum commune gravitatis ipſorum non poſſe attolli. Quod autem punctum O ſit altius quam N, ſic oſtenditur: Exceſſus quadrati EC ſupra quadratum BC, æqualis eſt * duobus rectangulis CBE, cum quadrato BE, hoc eſt, rectangulo quod fit ex duabus EC, CB tanquam unâ, & BE. Similiter exceſſus quadrati AC, ſupra quadratum CD, æquatur rectangulo ſub duabus AC & CD tanquam unâ, & AD. Eſt autem AD æqualis BE, quum ſit AB æqualis DE. Itaque patet illum exceſſum, nempe quadratorum EC, CB, ad hunc exceſſum quadratorum AC, CD, ſeſe habere; ſicut utraque ſimul EC, CB ad utramque ſimul AC, CD. Quum autem majores ſint duæ EC & CB quam dupla CB; at duæ ſimul AC, CD minores quam dupla AC, major utique erit ratio duarum ſimul EC, CB, ad utramque ſimul AC, CD, quam CB ad CA, ergo & exceſſus quadrati EC, ſupra quadratum CB, ad exceſſum quadrati AC ſupra quadratum CD majorem habet rationem quam BC ad CA. Quia vero, ſicut quadratum EC ad quadratum CB, ita eſt MB ad BK longitudine; erit dividendo, ut exceſſus quadrati EC, ſupra quadratum CB, ad quadratum CD, ita MK ad KB: ſicut autem quadratum CB ad quadratum CA, ita eſt KB linea ad HA: utque quadratum CA ad exceſſum ſuum ſupra quadratum CD, ita HA ad HL, erat enim ut quadratum AC, ad quadratum CD, ita HA ad AL: Itaque, ex æquo erit, ſicut exceſſus quadrati EC ſupra quadratum CB, ad exceſſum quadrati AC ſupra quadratum CD, ita MK ad HL. Quare major quoque

* Eucl. l. II. Prop. IV.

que erit ratio MK ad HL, quam BC ad CA. Eſt autem ut MK ad HL, ita MP, ad PL; ut autem BC ad CA ita MO ad OL. Ergo major quoque ratio MP ad PL, quam MO ad OL; &, componendo, major ratio ML ad LP, quam ML ad LO. Itaque LO major quam LP; unde liquet punctum O cadere ad eam partem interſectionis P, quæ eſt verſus M; quæ autem conjungit puncta ON, parallela eſt perpendicularibus MB, HA, quoniam iis punctis rectæ LM, HK ſecundum eandem rationem dividuntur. Igitur ſicut ſublimius eſt M quam K, ita quoque O ſublimius eſſe apparet quam N. Quod ſupererat demonſtrandum.

Jam ſi fieri poteſt reflectatur ab occurſu corpus A celeritate CD, majori quam CA, quâ ad occurſum pergebat. Erit autem CD minor quam CB, quæ fuit celeritas corporis B ante occurſum. Etenim ſi B non eſſet minus quam A ſed ipſi æquale, tum demum A ab impulſu recederet celeritate CB *; reflectetur autem B ab occurſu celeritate CE, ita ut DE ſit æqualis AB *. Jam cætera facta intelligantur, conſtructioque peracta ſicut in caſu præcedenti, eveniet igitur ut L ſit ſublimius quam H, quoniam DC major quam AC; utque M, ſit humilius quam K, quoniam EC minor quam CB. Porro oſtendetur ſicut prius, differentiam quadratorum DC, CA eſſe ad differentiam quadratorum BC, CE, ut duæ ſimul AC, CD, ad duas EC, CB. Quum vero hæ ſint ſimul minores quam dupla CB, illæ vero majores quam dupla AC, erit major ratio duarum ſimul AC, CD ad duas EC, CB, quam AC ad CB. Itaque differentia quadratorum DC, CA, ad differentiam quadratorum BC, CE, majorem habet rationem, quam AC ad CB. Ut autem dicta differentia, ad dictam differentiam, ita demonſtrabitur rurſus eſſe LH ad KM. Ergo major quoque ratio LH ad KM, hoc eſt, LP ad PM, quam AC ad CB, hoc

Vide Fig. 12.

* Prop. II.

* Prop. IV.

eſt,

eſt, quam LO ad OM; quamobrem punctum O cadet ad eam partem interſectionis P quæ eſt verſus L. ON autem, ſicut ante, parallela eſt LH. Ergo ſicut punctum L ſublimius eſt quam H, etiam O ſublimius erit quam N; hoc autem, ob eandem quam in caſu præcedenti diximus rationem, abſurdum eſt.

Vide Fig. 13. Quod ſi vero dicatur conſiſtere poſt occurſum corpus A, ſolumque B reflecti, reflectetur ergo celeritate AB *, quoniam etiam ante occurſum corpora habuere celeritatem AB reſpectu mutuo. Ponendo autem, ſicut ante; celeritatem BC corpori B acquiſitam eſſe cadendo ex altitudine KB, ſequitur, ſi fiat ut quadratum CB ad quadratum AB, ita BK ad BM longitudine; ipſam BM fore altitudinem ad quam aſſurgere poterit corpus B, ſi convertat motum horizontalem, quo fertur celeritate AB, in motum perpendicularem ſurſum. Corpus autem A, cum, poſt occurſum, motus expers dicatur, manebit in rectâ AB. Itaque ſi jungatur MA, ſeceturque in O ut ſit AO ad OM, ſicut AC ad CB, erit punctum O ad cujus altitudinem aſcendet centrum gravitatis ex utroque corpore compoſitæ. Poſitis autem corporibus in H & K, unde decidiſſe ponuntur, erat ipſorum commune gravitatis centrum in puncto N, quod ſimiliter dividit rectam HK, ſecundum rationem AC ad CB; itaque ſi rurſus oſtendatur punctum O ſublimius eſſe puncto N, ad idem quod ſuperius abſurdum deducta erit demonſtratio. Illud vero ſic oſtenditur. Quum ſit ut quadratum AB ad qu. BC, ita MB ad BK longitudine, erit dividendo, ſicut exceſſus quadrati AB ſupra qu. BC ad qu· BC, ita MK ad KB; ſicut autem qu. BC ad qu. CA, ita & KB ad HA, namque poſitum hoc eſt, ſicuti in caſu primo; igitur ex equo ſicuti exceſſus quadrati AB ſupra qu. BC ad qu. CA, ita erit MK ad HA; exceſſus autem dicti ad qui CA,

* Prop. IV.

CA, omnino major eſt ratio quam rectæ BC ad CA: itaque & MK ad HA, hoc eſt, MP ad PA, major erit ratio quam BC ad CA, hoc eſt, quam MO ad OA. Et componendo igitur major ratio MA, ad AP, quam MA ad AO; unde liquet punctum O cadere ad eam partem interſectionis P quæ eſt verſus M. Eſt autem M altius quam K: ergo quum ON ſit neceſſario parallela ipſi MK, erit quoque punctum O altius quam N: quod oſtendere reliquum erat.

Si denique dicatur corpus A poſt occurſum verſus eandem partem pergere moveri celeritate CF, ea quidem non major erit quam AC quâ ante occurſum movebatur: debebit autem corpus B ipſum præcurrere celeritate CG, cujus ſupra celeritatem CF exceſſus FG æqualis ſit AB *. At hoc fieri non poſſe ſic conſtabit: ſumatur CD æqualis CF; deinde DE æqualis AB; fit igitur CE minor quam ED quanto CG eâdem ED, ſive FG, major eſt; quum autem, ponendo, ut in caſu primo, corpus A, ab occurſu retro verſum fuiſſe celeritate CD, evincatur ne quidem celeritatem CE corpori B convenire poſſe, quin ad abſurdum deveniatur, ut nimirum converſis motibus qui ſecundum Horizontem ſunt, in motus perpendiculares, altius aſcendat corporum compoſita gravitatas quam unde deſcenderat; idem multo magis fieri neceſſe eſt ſi corpus B celeritatem CG adhuc multo majorem quam CE acquirat, A vero celeritatem CF habeat ipſi CD æqualem. Igitur neque perget moveri corpus A, poſt occurſum, in eandem partem. Quamobrem ſupereſt ut retro feratur celeritate CA qnantâ prius ad occurſum tetendit: atque ideo B quoque reſiliet celeritate CB. Quod erat demonſtrandum.

Vide Fig. 14.

* Prop. IV.

Propositio IX.

Datis corporibus duobus inæqualibus, directè ſibi occurrentibus, quorum utrumque vel alterum tantum moveatur, datâque utriuſque celeritate, vel unius, ſi alterum quieſcat; invenire celeritates quibus utraque poſt occurſum ferentur.

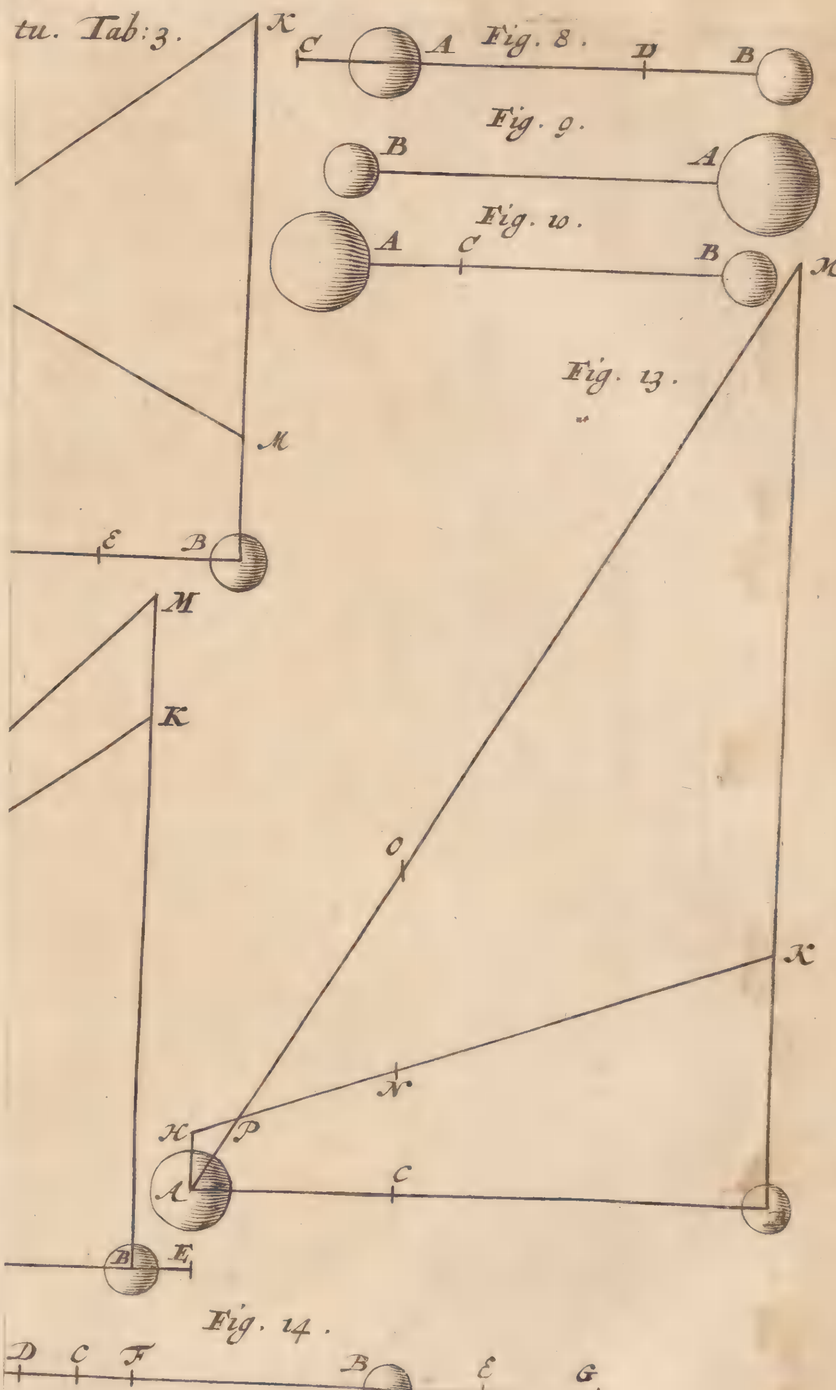
Vide Fig. 15.

MOveatur corpus A dextram verſus celeritate AD: B vero, vel in partem contrariam moveatur, vel in eandem partem præcedat celeritate BD, vel denique quieſcat, hoc eſt, cadat punctum D in B. Erit igitur ipſis mutuo reſpectu celeritas AB.

Dividatur AB in C ut ſit AC ad CB, ſicut B ad A magnitudine, & ſumatur ipſi CD æqualis CE. Dico EA fore celeritatem corporis A poſt occurſum, EB vero corporis B, idque in eam partem quam demonſtrat ordo punctorum EA, EB. Quod ſi in A incidat punctum E, ad quietem redigetur corpus A; ſi vero E incidat in B, quieſcet corpus B.

Si enim hæc ita contingere oſtenderimus in navi quæ æquabili celeritate provehitur, conſtabit & in terrâ ſtanti eodem modo eventura. Intelligatur itaque navem ferri juxta ripam fluminis, in quâ conſiſtens vector ſuſtineat manibus globos, A, B, ex filis ſuſpenſos, quos ita movendo celeritatibus AD, & BD, reſpectu nimirum ſui naviſque, concurrere faciat in puncto D, navis autem pergere ponatur celeritate DC, in partem eam quam oſtendit ordo punctorum DC; eveniet igitur ut, reſpectu ripæ & ſpectatoris in eâ ſtantis, globus A moveatur celeritate AC dextram verſus, quia reſpectu navis habebat celeritatem AD. Globus autem B cum in navi habeat celeritatem BD, habebit, reſpectu ripæ, celeritatem BC ſiniſtram verſus.

Quod


tu. Tab: 3.
Fig. 8.
C
A
D
B
Fig. 9.
B
A
Fig. 10.
A
C
B
K
M
E
B
M
K
B
E
M
Fig. 13.
O
K
N
H
P
A
C
Fig. 14.
D
C
F
B
E
G

Quod ſi igitur ſpectator in ripâ ſtans prehendat manibus ſuis, manus vectoris, cumque iis capita filorum quibus corpora AB ſuſtinentur; apparet dum vector, ſui reſpectu, illa movet celeritatibus AD, BD, ſimul eum qui in ripâ conſiſtit illa movere, reſpectu ſui & ripæ, celeritatibus AC, BC, quæ celeritates quum ſint in proportione reciprocâ ipſarum magnitudinum, neceſſe eſt ut corpora A, B, ejuſdem ſpectatoris reſpectu, reſiliant a contactu iiſdem celeritatibus CA, CB, ut in præcedentibus demonſtratum fuit. Navis autem ſemper progreditur celeritate DC ſive CE; idque ſecundum ordinem punctorum CE; igitur neceſſe eſt ut A moveatur, navigii & vectoris reſpectu, celeritate EA, in partem eam, quam deſignat ordo punctorum EA. B vero, ejuſdem navigii reſpectu, celeritate EB, ſecundum ordinem item punctorum EB; cum autem E incidit in A, vel B, apparet corpus A vel B poſt occurſum, pari celeritate cum navi ipſâ, inque eandem partem ferri: unde illa eis caſibus, reſpectu navis & vectoris, quieſcere neceſſe eſt. Itaque oſtendimns corpora A & B, quæ in navi movebantur ad occurſum celeritatibus AD, BD, poſt occurſum in eâdem navi moveri celeritatibus EA, EB, ſecundum ordinem horum punctorum. Quod autem in navi contingit, idem in terrâ conſiſtenti, uti diximus, evenire certum eſt: Igitur conſtat propoſitum. Ad calculi vero uſum licebit ex conſtructione hujus problematis formare regulas ſequentes.

Si fuerint duo corpora A & B, quorum utrumque moveatur; ad inveniendam celeritatem corporis A poſt impulſum, fiat, ut ſumma coporum ad duplum corporis B, ita celeritas, quam habent reſpectu mutuo, ad aliam celeritatem quæ dicatur C: differentia inter hanc & celeritatem corporis A ante impulſum, vel uno caſu eorum ſumma, cum nimirum A in motu præcedit,

efficiet celeritatem, quâ hoc ipſum poſt occurſum movebitur, regrediendo quidem ſi exceſſus fuerit penes C, at pergendo ſi contra. Quod ſi nulla ſit differentia, corpus A poſt occurſum quieſcet.

Inventâ autem celeritate corporis A, etiam corporis B celeritas innoteſcit, ex eo quod mutuo reſpectu eadem debeat eſſe corporum celeritas poſt, atque ante occurſum.

Si corpus A quieſcens detur, ſolumque B verſus ipſum moveatur, apparet celeritatem ipſius A poſt occurſum, fore æqualem celeritati C, ita, ut jam diximus, inventæ. Hinc vero & theorema ſequens deducitur.

Propositio X.

Celeritas quam majus corpus dat minori quieſcenti, ad eam quam ſimili velocitate minus imprimit quieſcenti majori, eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem.

Vide Fig. 16. ESto corpus A majus quam B, & ponamus quieſcenti A, ſi impellatur a corpore B, moto velocitate BA, tribui velocitatem AC. Ipſi vero B quieſcenti, ſi impellatur a corpore A, pari velocitate AB, dari velocitatem BD: dico ut A ad B magnitudine, ita eſſe celeritatem BD ad AC.

Quia enim celeritas BD eſt ad duplam celeritatem AB ut corpus A ad utrumque ſimul B & A *; ſicut autem utrumque B & A ad B, ita dupla celeritas AB ad celeritatem AC *, erit ex æquo celeritas BD ad celeritatem AC, ſicut corpus A ad B; quod erat demonſtrandum.

* Prop. IX.

* Prop. IX.

PROPOSITIO XI.

Duobus corporibus ſibi mutuo occurrentibus, id quod efficitur ducendo ſingulorum magnitudines in velocitatum ſuarum quadrata, ſimul additum, ante & poſt occurſum corporum æquale invenitur: ſi videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineiſve ponantur.

SInt corpoa A & B, quorum A moveatur, ante occurſum, celeritate AD; B vero, celeritate BD. Poſt occurſum autem ſit inventa, per antecedentem, corporis A celeritas EA, & corporis B, celeritas EB: dividendo nempe AB in C, ut ſit ſicut A ad B ita BC ad CA, & poſitâ CE æquali CD. Quia igitur ratio magnitudinis A ad B, deſignatur ratione lineæ CB ad CA; oſtendendum eſt ſolidum ex lineâ CB in quadratum AD una cum ſolido è rectâ CA in quadratum BD, æquari aggregato ſolidi ab eâdem CB in quadratum EA, & ſolidi è rectâ CA in quadratum EB. Atqui, ſi ſint quatuor magnitudines, quarum prima ſecundam tantum exſuperet, quantum tertia quartam, vel quarum prima tantundem à ſecundâ deficiat atque tertia à quartâ; certum eſt, primam cum quartâ æquari ſecundæ & tertiæ. Itaque conſtabit propoſitum, ſi oſtenderimus ſolidum a quadrato AD in rectam CB tantum excedere vel ſuperari a ſolido ex quadrato EA in eandem CB, quantum quod fit a quadrato EB in rectam CA, ſimul excedit vel ſuperatur a ſolido ex quadrato BD in eandem CA. Hoc vero ſic oſtenditur. Vide Fig 17.

Omni caſu aut punctum C cadit inter A & D, aut D inter A & C. Quoties C ſitum eſt inter A & D æquabitur AD duabus ſimul AC, CD; AE vero, earundem

rundem differentiæ; nam CE, æqualis eſt CD, unde tunc ſemper major erit AD quam AE. Iiſdem vero caſibus erit BE æqualis duabus ſimul BC, CE; at BD earum differentiæ; ac proinde ſemper major BE quam BD. At quoties D cadet inter A & C, erit AE æqualis duabus ſimul AC, CE; AD vero, ipſarum differentiæ; ac proinde AE major quam AD. Sed & BD hiſce caſibus major erit, quam BE, quoniam illa æquabitur duabus ſimul BC, CD; hæc vero earundem differentiæ. Itaque apparet quoties AD major eſt quam AE, etiam BE majorem eſſe quam BD; quoties autem AE major quam AD, etiam majorem eſſe BD quam BE.

Porro quoniam DE ex æquo diviſa eſt in C, quomodocunque ſeſe habeat punctum A, erit ſemper differentia quadratorum AD, AE æqualis quadruplo rectangulo ACD vel ACE, per 8 ſecundi Elementorum; ſumendo nimirum pro lineâ utcunque ſectâ, in primo & quinto caſu, AC quæ dividitur in E: in ſecundo & octavo, AC quæ dividitur in D: in tertio & quarto caſu EC quam ſecat A: in ſexto & ſeptimo, ubi nullum eſt quadratum AE, apparet pro dictâ differentiâ eſſe quadratum AD, quod ſimiliter æquari conſtat quadruplo rectangulo ACD vel ACE. Eâdem ratione propter Biſectionem lineæ DE in C, quomodocunque ſe habeat punctum B, erit ſemper differentia quadratorum BE, BD æqualis quadruplo rectangulo BCD, vel BCE. Eſt autem, propter communem altitudinem, quadruplum rectangulum BCD, ad quadruplum rectangulum ACD, quod æquale erat differentiæ quadratorum AD, AE, ſicut BC, ad AC. Igitur differentia quadratorum BE, BD, ad differentiam quadratorum AD, AE, ut BC ad AC. Quamobrem quod fit ex differentiâ quadratorum AD, AE, in rectam BC, quod ipſum eſt differentia

ſoli-

ſolidorum ex quadrato AD in BC, & ex quadrato AE in BC, æquale eſt ei quod fit ex differentiâ quadratorum BE, BD in rectam AC, hoc eſt, differentiæ ſolidorum ex quadrato BE in AC, & ex quadrato BD in AC.

Semper autem cum quadratum AD ſuperat vel deficit a quadrato AE, etiam quadratum BE ſimul ſuperat vel exceditur a quadrato BD. Ergo apparet ſolidum ex quadrato AD in BC, ſemper tantum excedere vel ſuperari ab eo quod fit ex quadrato AE in BC, quantum id quod ex quadrato BE in AC, ſimul excedit vel ſuperatur ab eo, quod ex quadrato BD in AC: quod erat demonſtrandum.

LEMMA I.

Recta AB *ſecta ſit in* C *&* D *ita ut ſegmentum* AC *minus ſit quam* CD, *&* CD *minus quam* BD. *Dico rectangulum ex* AD, CB, *minus eſſe quam duplum utriuſque ſimul rectanguli* ACD, CDB.

DEſcribatur ſuper ſegmentum CD quadratum CGND, & producatur CG uſque in E, ut GE ſit æqualis CA, & perficiatur rectangulum ECBF, & producantur DN in K, & GN in H. Quoniam igitur CG eſt æqualis CD, & GE æqualis AC, erit tota CE æqualis AD. Itaque rectangulum CF eſt id quod ſub AD, CB continetur. Rectangulum vero EN æquale rectangulo ACD, & rectangulum NB, æquale rectangulo CDB; oportet igitur oſtendere quod rectangulum CF minus eſt quam duplum utriuſque ſimul rectanguli EN, & NB; ſumatur GL æqualis GE, & agatur LM parallela AB; quia autem minor eſt GL quam GC (nam GE ſive AC minor eſt quam CD) cadet LM inter GH & CB. Vide Fig. 18.

 Jam

Jam quia CD minor eſt quam DB, erit rectangulum LD minus quam rectangulum DM. At LN æquale eſt rectangulo NE, & rectangulum NM æquale eſt rectangulo NF, ideoque duo ſimul rectangula LN & NF æqualia duobus NE & NM, itaque ſi æqualibus inæqualia addantur, nimirum rectangulis LN & NF, rectangulum LD, & rectangulis NE, NM, rectangulum MD, fiet quod ex illis componitur nempe quadratum CN cum rectangulo NF minus quam quod ex his componitur, nempe rectangulum NB cum rectangulo NE: unde quod ex omnibus ſimul componitur, hoc eſt, rectangulum CF minus apparet eſſe quam duplum rectangulorum NB & NE; quod erat oſtendendum.

LEMMA II.

Vide Fig. 19. Sint tres proportionales rectæ AB, AC, AD, quarum major AB, omnibuſque adjiciatur eadem longitudo AE. Dico rectangulum ex BE, DE, majus eſſe quadrato CE. Quia enim proportionales ſunt AB, AC, AD, erit quoque exceſſus BC ad exceſſum CD, ſicut BA ad AC, ſive ut CA ad AD. Major autem eſt ratio CA ad AD, quam CE ad ED, itaque major quoque BC ad CD quam CE ad ED; &, permutando major ratio BC ad CE quam CD ad DE; &, componendo, major igitur ratio BE ad EC quam CE ad ED: Quamobrem rectangulum ex BE, ED, majus quadrato ex CE quod erat propoſitum.

Pro-

Fig. 16.

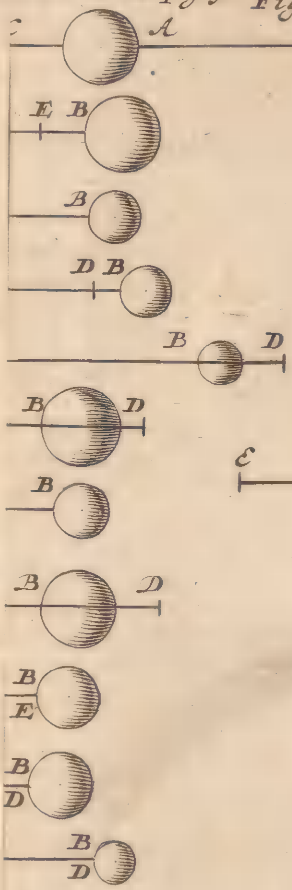


Fig. 17.

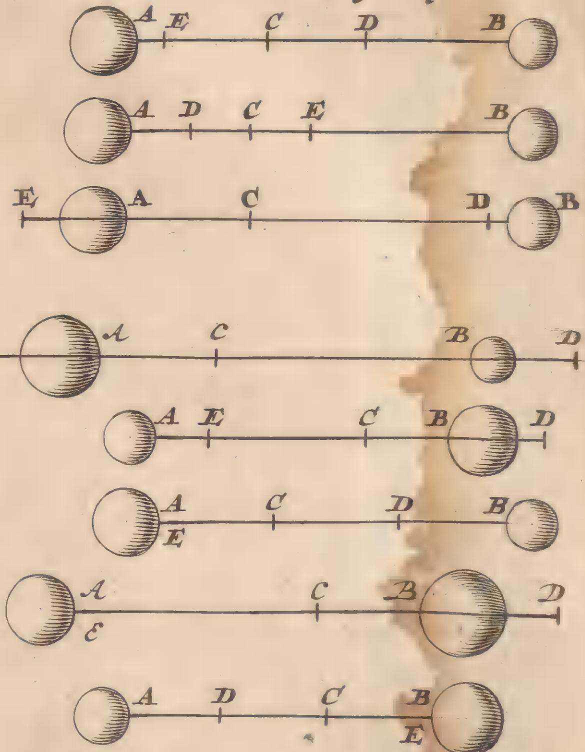
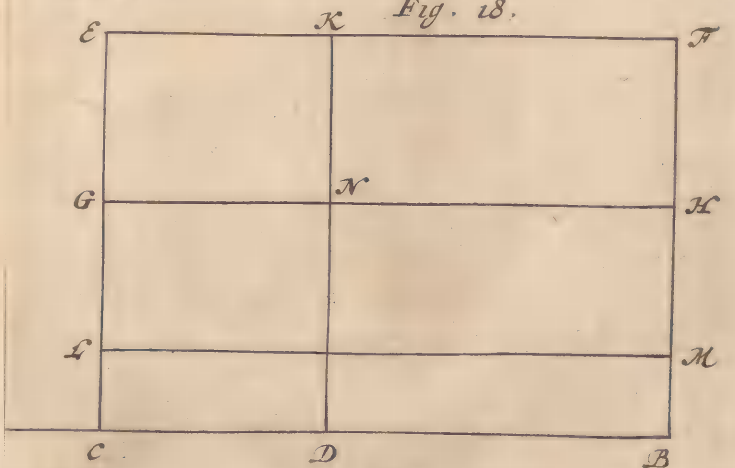


Fig. 18.



PROPOSITIO XII.

Si quod corpus majori vel minori quieſcenti obviam pergat, majorem ei celeritatem dabit per interpoſitum corpus mediæ magnitudinis itidem quieſcens, quam ſi nullo intermedio ipſi impingatur. Maximam vero celeritatem tum conferet, quum corpus interpoſitum fuerit medium proportionale inter extrema.

Moveatur corpus A verſus C quod quieſcat, ſitque A majus vel minus ipſo C, atque inter utrumque medium ponatur corpus B immotum, & mediocris magnitudinis; ita ut A primum impellat B, B vero deinde impellat C, dico majorem motum ſic acquiri corpori C, quam ſi ſimpliciter ei occurriſſet A. Quam rationem inter ſe habent corpora A, B, C, eandem habeant rectæ DE, EH, HK, ſitque LP celeritas corporis A, cujus dupla ſit LQ; ſi igitur fiat ſicut utraque ſimul DE, EH ad DE, ita LQ, ad MR; erit MR, celeritas acquiſita corpori quieſcenti B cum pellitur ab A *. ſit MS dupla ipſius MR, Rurſus igitur ſi ſit, ut utraque ſimul EH, HK ad EH ita MS ad N, erit N celeritas corporis C poſtquam impulſum eſt ab B celeritate MR *. Si vero ut utraque ſimul DE, HK ad DE ita ſit LQ ad O, erit O celeritas corporis C quæſita ſi pellatur a corpore A celeritate LP. Itaque demonſtrandum eſt majorem eſſe celeritatem N quam O.

Vide Fig. 20.

* Prop. IX.

* Prop. IX.

Ratio LQ ad N compoſita eſt ex rationibus LQ ad MR & MR ad N. Ratio autem LQ ad MR eadem eſt rationi HD ad DE. Et ratio MR ad N eadem rationi KE ad duplam EH. Eſt enim ut KE ad EH, ita SM ad N, unde KE ad duplam EH ut SM ad 2 N, hoc eſt, ut RM ad N. Ergo ratio LQ ad

ad N componetur ex rationibus HD ad DE, & KE ad duplam EH, ac proinde erit ea quæ rectanguli HD, KE ad duplum rectangulum DEH. Ratio autem LQ ad O eſt ea quam habet utraque ſimul DE, HK ad DE, ex conſtructione, hoc eſt, ſumpta communi altitudine EH, quam habent utraque ſimul rectangula DEH, EHK, ad rectangulum DEH, vel quam illa bis ſumpta ad duplum rectangulum DEH. Eſt autem rectangulum HD, KE, minus quam duplum rectangulorum DEH, EHK *. Ergo minor erit ratio rectanguli HD, KE, ad duplum rectangulum DEH, quam rectangulorum DEH, EHK, bis ſumptorum, ad idem duplum rectangulum DEH. Quam autem rationem habet rectangulum HD, KE ad duplum rectangulum DEH, eam dictum eſt habere LQ ad N. Et quam rationem habet duplum rectangulorum DEH, EHK, ad duplum rectangulum DEH, eam dictum eſt habere LQ ad O. Igitur minor erit ratio LQ ad N quam LQ ad O, ac proinde N major quam O.

* Lemm. 1.

Vide Fig 21. Eſto jam B proportione medium inter A & C, dico hac ratione maximam omnium celeritatum corpori C collatum iri.

Nam, ſi fieri poteſt, interpoſito primum loco B, corpore majori X, ita ut A pellat X, X autem pellat C, dicatur major ſic celeritas acquiri corpori C, quam ſi interponatur B. Et ſicut A ad X, ita ſit DE ad ET. Ergo ET major quam EH; poſitis videlicet, ſicut ante, proportionalibus DE, EH, HK, in eâdem ratione quæ eſt corporum A, B, C. Sit autem duabus TE, HE tertia proportionalis VE: atque inveniatur porro, ſicuti in præcedentibus, celeritas N corpori C acquiſita per interpoſitum B. Similique ratione inveniatur celeritas, quæ eidem C acquiretur per interpoſitum X *. Nempe ſi fiat ut utrumque ſimul A & X, hoc eſt, ut utraque ſimul DE,

* Prop. 12.

DE, ET ad DE, ita LQ ad IY, erit IY celeritas impreſſa corpori X impellente A: unde rurſus ſi fiat ut utrumque ſimul X & C ad X, hoc eſt, ut utraque ſimul ET, HK ad ET ita dupla IY quæ ſit ZY ad G; erit G celeritas quæſita corpori C. Quamobrem oſtendendum eſt N majorem eſſe quam G.

Ratio LQ ad N, ſicut antea, componi oſtendetur ex rationibus HD ad DE, & KE ad duplam HE; eſt autem ſicut KE, ad duplam HE, ita HD ad duplam ED, quia proportionales KH, HE, ED. Igitur ratio LQ ad N componetur jam ex rationibus HD ad DE, & HD ad duplam DE: ac propterea erit eadem quæ quadrati HD ad duplum quadrati DE. Ratio autem LQ ad G componitur ex rationibus LQ ad IY & IY ad G, quarum ratio LQ ad IY eſt eadem quæ TD ad DE ex conſtructione, ratio autem IY ad G eadem quæ utriuſque ſimul KH, TE ad duplam TE; etenim ex conſtructione eſt ſicut utraque ſimul KH, TE ad TE, ita ZY ad G, ideoque, ſumptis conſequentium duplis, ſicut duæ KH, TE, ad duplam TE, ita ZY ad duplam G, ſive IY ad G, uti dictum fuit: itaque ratio LQ ad G componitur ex rationibus TD ad DE, & duarum ſimul KH, TE ad duplam TE: quia vero proportionales ſunt DE, EH, HK, erit rectangulum DE, HK æquale quadrato EH. Sed & rectangulum EV, ET eidem quadrato EH æquale eſt, quoniam proportionales EV, EH, ET. Igitur rectangulum DE, HK æquale rectangulo EV, ET. Unde ſicut VE ad ED ita HK ad ET, & componendo, ſicut VD ad DE, ita utraque ſimul KH, TE ad TE; & ſumptis conſequentium duplis, ſicut VD ad duplam DE, ita duæ KH, TE ad duplam TE. Itaque ratio LQ ad G componitur ex rationibus TD ad DE & VD ad duplam DE, ac proinde eſt eadem quæ rectanguli TDV ad duplum quadratum DE. Ratio

tio autem LQ ad N oſtenſa eſt eadem quæ quadrati HD ad duplum quadratum DE. Itaque cum rectangulum TDV majus ſit quam quadratum HD, per lemma II. (ſunt enim proportionales TE, HE, VE, quibus adjecta eſt longitudo ED) ſequetur majorem eſſe rationem LQ ad G quam LQ ad N; adeoque majorem eſſe N quam G, quod erat oſtendendum.

Vide Fig. 22. Dicatur deinde interpoſito corpore X minori quam B, acquiri majorem celeritatem corpori C. Sit rurſus ut A ad X ita DE ad ET. igitur quia jam minor ponitur X quam B, erit quoque ET minor quam EH, nam, ſicut A ad B, ita eſt DE ad EH. De cætero autem eadem repetatur conſtructio & demonſtratio quæ modo adhibita fuit, quâ quidem rurſus celeritas N major oſtendetur quàm G. Itaque conſtat maximam celeritatem acquiri corpori quiſcenti C per interpoſitionem corporis B, quod ſit medium proportionale inter A & C.

Propositio XIII.

Quo plura corpora interponentur inter duo inæqualia, quorum alterum quieſcat, alterum moveatur, eo major motus quieſcenti conciliari poterit. Maximus autem per unam quamque interpoſitorum multitudinem ita conferetur, ſi interpoſita cum extremis continuam proportionalium ſeriem conſtituant.

Vide Fig. 23. Sint proportionalia corpora A, B, C, e quibus A moveatur, reliqua duo quieſcant; itaque maximus motus acquirendus corpori C per unius corporis interpoſitionem eſt ille qui efficitur per interpoſitum B *. Quod autem ope duorum interpoſitorum major adhuc effici poſſit hinc conſtabit. Etenim ſi inter A & B medium proportionale interponatur D, major jam motus acquiritur

* Prop. XII.

ritur

ritur corpori B quam ſi ſimpliciter a corpore A fuiſſet percuſſum; quo autem major eſt celeritas in B, eo & major inducetur in C. Igitur C magis movebitur per interpoſita corpora D, B, quam per ſolum B. Quod ſi vero in locum B aliud poſtea conſtituatur, quod ſit medium proportionale inter D & C, evidens eſt adhuc majorem motum in C tranſiturum, quam per interpoſita D, B corpora. Porro quod maximus motus per interpoſitionem duorum corporum corpori extremo concilietur, cum A, D, B, C fuerint continue proportionalia, ſic oſtendetur. Principio conſtat celeritatem corporis C per interpoſita duo corpora non poſſe in quantumvis magnam excreſcere; nam celeritas corporis D ſemper minor erit quam dupla celeritas A *. Item celeritas B ſemper minor erit quam dupla celeritas D & celeritas acquiſita corpori C ſemper minor erit quam dupla celeritas B. adeo ut minor ſaltem futura ſit celeritas C quam octupla celeritatis A. Itaque hinc intelligitur certam quandam celeritatem exiſtere quâ major corpori C, per interpoſitionem duorum corporum, acquiri nequeat. Eſto ea celeritas E, quam quidem corpori C acquiſitam ponamus interpoſitis inter ipſum & A corporibus D, B; dico A, D, B, C continue proportionalia eſſe. Etenim primo, ſi tria A, D, B non ſunt proportionalia, fiet ſubſtituendo corpus aliud pro corpore D, quod medium proportionale ſit inter A & B, ut major motus tranſeat in B quam per interpoſitum D. ac proinde etiam C majorem acquirit velocitatem quam per interpoſita D, B, hoc eſt, majorem quam ſit velocitas E, quod abſurdum eſt, quia poſita fuit E maxima eſſe velocitas quam duorum corporum interpoſitione corpus C adipiſci poſſet. Similiter ſi D, B, C non ſunt proportionalia, poterit in locum B aliud medium proportionale conſtitui inter D, C, quo fiet ut rurſus major acquiratur velocitas corpori

* Prop. VII.

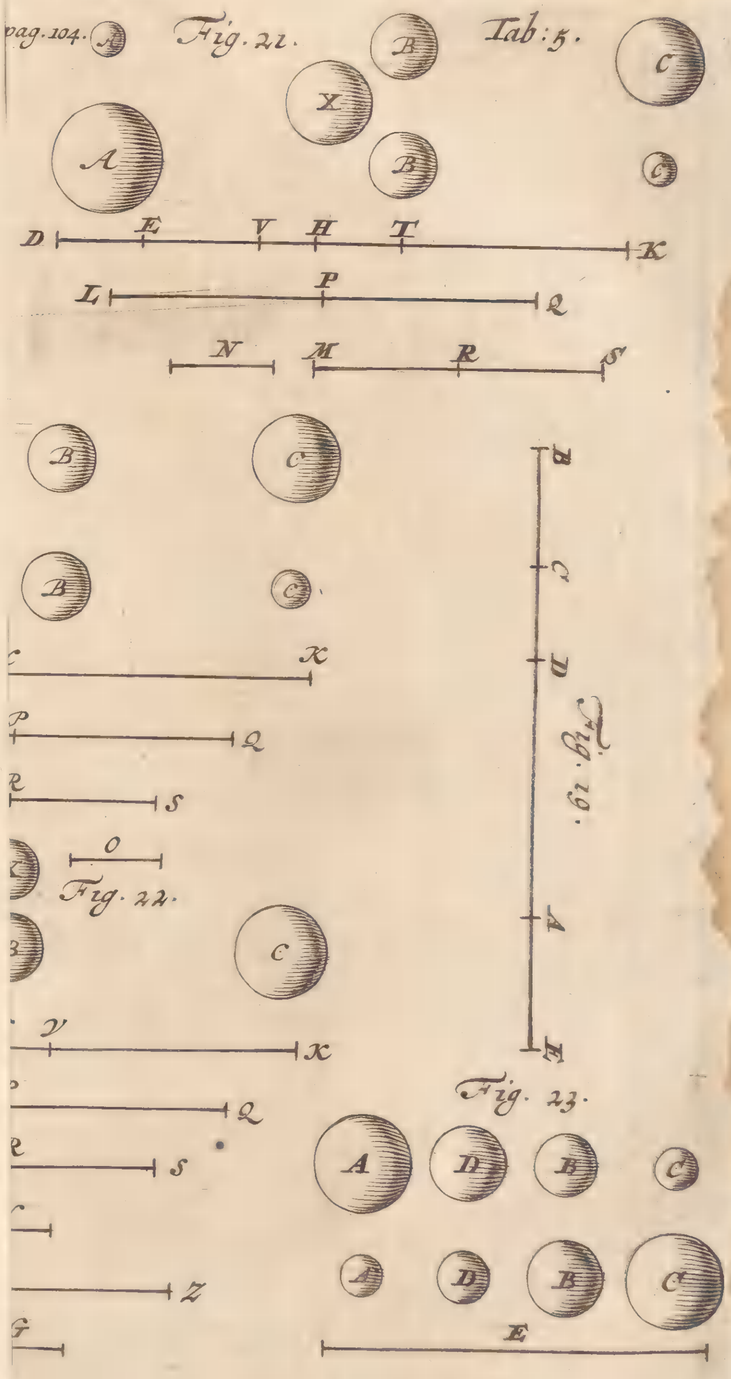
C

C quam per interpoſita D, B, hoc eſt, major velocitate E; quod eâdem ratione abſurdum eſt. Itaque quum & A, D, B & D, B, C ſint proportionales, erunt corpora omnia A, D, B, C in proportione continua, quod erat oſtendendum. Hinc vero jam eâdem ratione oſtendi poterit, interpoſitis inter A, C, tribus corporibus majorem adhuc motum corpori C tribui poſſe quam cum duo tantum interpoſita fuere, atque ita deinceps; ſimilique etiam argumentatione maximus motus corpori C acquiri oſtendetur cum omnium corporum continua eſt proportio. Itaque conſtat propoſitum.

Si corpora centum ex ordine dentur in proportione duplâ, incipiatque motus a maximo, invenitur ſubducto calculo ad præceptum regulæ propoſitione nona traditæ ſed in compendium redactæ, celeritas minimi ad celeritatem quâ movebatur maximum proxime ea quæ 14760000000 ad 1. Si vero a minimo motus incipiat, augetur in univerſum motus quantitas ſecundum rationem proxime quæ 1 ad 4677000000000.

F I N I S.

CHRI-


pag. 104.
Fig. 21.
Tab: 5.
Fig. 19.
Fig. 22.
Fig. 23.

CHRISTIANUS HUGENIUS
DE
VI CENTRIFUGA.

CHRISTIANUS HUGENIUS
DE
VI CENTRIFUGA.

GRAVITAS eſt conatus deſcendendi: Ponendo itaque, gravia cadentia ſive ad perpendiculum ſive in planis inclinatis moveri ea acceleratione, ut temporibus æqualibus æqualia accreſcant celeritatis momenta, certiſſimè inde demonſtrari poteſt ſpatia diverſis temporibus è quiete peracta eſſe inter ſe, ſicut temporum quadrata. Hoc autem experientiæ exactè convenit. Ergo recte illud aſſumptum eſſe conſtat. Exactè convenire experimenta Galilei, Riccioli, Noſtra comprobant; niſi quod aëris reſiſtentia pauxillum quid aberrare facit, ſed hoc eo minus, quo corpora plus gravitatis pro ſuperficiei magnitudine continent, quoque in minoribus ſpatiis periculum facimus. Unde credibile omnino eſt, niſi aëris reſiſtentia obeſſet, etiam in vaſtiſſimis ſpatiis eandem rationem perfectiſſimè obſervatum iri. Nunc autem, ſicut ex illa fit, ut ſphæra ex ſubere brevi eo perveniat, unde æquabili deinceps celeritate decidere pergat; quod de plumbea etiam neceſſario verum eſt, minuta adeo ut pro gravitate ſua tantam ſuperficiem habeat quantam ſuberea, hoc eſt, cujus diameter ſit ad diametrum illius, ſicut gravitas ſpecifica ſuberis ad gravitatem plumbi, ut aliàs oſtendi: ita de plumbea quoque quantumvis magna exiſtimo, ſi per aërem cadere pergat, perventuram quoque tandem ad æquabilem motum, poſt immenſum videlicet ſpatium peractum:

adeo ut accelerationis ratio hîc locum non ſit habitura, ac proinde revera nunquam præciſione exquiſitiſſima ſervetur. Veruntamen non propterea parum egregia atque utilis Galilei de hoc motu ſpeculatio cenſenda eſt, non magis hercle, quam mechanica omnis quæ circa pondera verſatur, quod falſo in illa præſumi ſoleat gravia parallelis inter ſe lineis deſcendere conari, quæ revera ad centrum terræ vergunt. Cæterum ad illorum demonſtrationem, quæ nos hic tractabimus, ſufficit in minimis quamlibet ſpatiis à quietis puncto accelerationem creſcere ſecundum impares numeros 1, 3, 5, 7, ut Galileus ſtatuit.

Vide Fig. 1. Itaque cum grave ex filo ſuſpenſum eſt, ideo trahitur filum, quoniam grave conatur recedere ſecundum lineam fili motu accelerato ejuſmodi.

Vide Fig. 2. Poteſt autem motu ſecundum dictam progreſſionem accelerato majus minuſve ſpatium eodem tempore confici: velut cum in plano inclinato AB grave ſuſtinetur filo CD ipſi plano æquidiſtanti. Nam & hic conatur grave progredi per lineam DC motu ſimiliter accelerato, ſed non ut tantundem ſpatii percurrat certa temporis particula, quantum percurreret eadem particula ſi à filo perpendiculari dimiſſum eſſet. Unde & minor conatus hic ſentitur, qui nempe tanto minor eſt altero illo conatu perpendiculari, quanto minus ſpatium eodem tempore in plano inclinato quam in perpendiculari grave tranſiturum eſſet.

Porro quoties duo corpora æqualis ponderis unumquodque filo retinetur, ſi conatum habeant, eodem motu accelerato, & quo ſpatia æqualia eodem tempore peractura ſint, ſecundum extenſionem fili recedendi, æqualem quoque attractionem iſtorum filorum ſentiri ponimus, ſive deorſum, ſive ſurſum, ſive quamcunque in partem trahantur. Neque referre qua ex cauſa conatus ejuſmodi oriatur, dummodo adſit; adeſt autem

autem idem conatus, ſi data facultate, ſeu non inhibito conatu, idem circa motum continget. Idque in initio motus tantum ſpectandum eſt, accepta parte temporis quamlibet exigua. Nam ex. gr. ſi globus B pendeat a filo AB, tangat autem a latere ſuperficiem cavam CD, verum ita, ut quæ a centro ſphæræ B ad contactum ducitur ſit & filo AB & tangenti curvam perpendicularis, ſcimus jam globum neutiquam à ſuperficie CD ſuſtineri, ſed æque valide trahere funem AB ac ſi planum CD non tangeret, ſed libere ſuſpenſus eſſet. Attamen ſi à fune ſeparetur decidatque, non deſcendet eodem modo, ac ſi libere ſuſpenſus fune excidiſſet, ſed per ſuperficiem CD devolutus ne quidem accelerationis proportionem ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7 accurate ſervabit. Itaque apparet non illud reſpiciendum quid aliquandiu poſt ſeparationem à fune gravi futurum ſit, ſed quamlibet minimam temporis particulam ab incepto motu conſiderandam, ſi vim conatus determinare velimus. Incipit autem hîc globus B, poſt ſeparationem à fune, ita moveri, quemadmodum ſi perpendiculariter decidiſſet; quoniam initio eam determinationem motus habet quæ eſt ſecundum rectam AB, quoniam hæc tangenti curvam in C parallela eſt. Nunc videamus quis quantuſque conatus ſit corporibus filo vel rotæ quæ circumgyratur alligatis, ut à centro recedant. Vide Fig. 111.

Sit rota BG quæ circa A centrum convertatur, horizontis plano æquidiſtans: globulus ad circumferentiam ligatus, ubi ad B punctum venerit, conatum habet pergendi ſecundum rectam BH, quæ rotam in B contingit: nam, ſi hic ab rota ſeparetur avoletque, rectam viam BH inſiſtet; nec relinquet eam niſi vi gravitatis deorſum trahatur, vel occurſu alterius corporis curſus ejus impediatur. Hoc vero primo intuitu difficile intellectu videtur, cur adeo tendatur filum Vide Fig. 4.

AB, cum globus conetur ire ſecundum BH rectam quæ ad AB perpendicularis eſt. Sed omnia hoc modo clara fient. Cogitemus maximam quampiam rotam hanc eſſe, ut hominem prope circumferentiam ei inſiſtentem in B, facile una ſecum deferat; verum ita affixum ut ne excuti ipſe poſſit; teneat autem manu ſua filum cum alligata ad caput alterum fili glande plumbea. Eodem igitur modo & æque valide filum tendetur ex vi vertiginis, ſive ita contineatur, ſive filum idem ad centrum uſque A porrigatur, ibique deligatum ſit: ratio autem ob quam tenditur manifeſtius jam percipi poterit. Sumantur arcus æquales BE, EF, exigui ratione totius circumferentiæ, puta partes centeſimæ vel minores etiam. Hoſce igitur arcus is quem diximus homo æqualibus temporibus pertranſit rotæ affixus, plumbum autem iiſdem temporibus decurreret, ſi dimitteretur, per rectas BC, CD, dictis arcubus æquales, quarum termini C, D, non quidem in eas rectas incidunt omnino, quæ ex centro A per puncta E, F, ducuntur, ſed minimum quid verſus B ab iis lineis diſtant. Apparet jam, ubi homo pervenerit in E, plumbum futurum in C, ſi in B puncto dimiſſum fuiſſet, ubi autem ad F ille pervenerit, futurum in D; unde hunc conatum ineſſe plumbo rectè dicemus.

Quod ſi jam puncta C, D, eſſent in rectis AE, AF productis, certum eſſet conari plumbum recedere ab homine per ipſam lineam quæ à centro per locum ejus ducitur; & quidem ita ut prima temporis parte removeatur ab eo ſpatio EC, ſecunda autem parte temporis diſtet ſpatio FD. Hæc autem ſpatia EC, FD & cætera deinceps ita creſcunt, ut quadratorum ſeries ab unitate 1, 4, 9, 16 &c. nam tanto ſanè exactius hanc ſeriem referunt, quanto minores particulæ BE, EF, acceptæ fuerint, ideoque in ipſo initio tanquam

tanquam nihil differrent conſideranda ſunt. Itaque ſimilem planè conatum hnnc fore conſtat illi qui ſentitur cum globus filo ſuſpenſus tenetur, quoniam tunc quoque conatur recedere ſecundum lineam ipſius fili, motu ſimiliter accelerato; ut nempe prima temporis parte exacta peregerit ſpatiolum 1, duabus temporis partibus ſpatiola 4, tribus 9 &c. Sic igitur ſe res haberet, ſi puncta C, D, eſſent in rectis AE, AF productis. Nunc autem quia parum verſus B à prædictis lineis recedunt, contingit inde ut globus non per rectam lineam è centro A venientem conetur ab homine recedere ſed per curvam quandam quæ rectam illam tangit eo loco ubi homo conſiſtit. Nempe ſi rotam contingat in B planum PQ, quod ei ſit affixum atque una cum ipſa circumferatur, globus B, ſi a rota ſeu plano dicto ſeparetur, deſcribet, reſpectu ejuſdem plani punctique B porro moveri pergentium, curvam BRS, quæ radium AB una tranſlatum productumque tanget in B: quam curvam ſi deſcribere velimus, tantum filum aliquod circumferentiæ BNM circumponendum eſt, ejuſque caput B ducendum verſus RS, ita ut ſemper extenſa maneat pars ea quæ circumferentiam BNM reliquit; hoc enim motu, extremo ſui puncto, dictam lineam BRS deſcribet; quod facile eſt oſtendere. Erit autem hæc lineæ proprietas, ut ſi ad quodlibet circumferentiæ punctum, ut N, ducatur tangens circumferentiam quæ occurrat curvæ in R, hæc ipſa NR æqualis ſit arcui NB; quod ex ortu perſpicuum eſt. Tangere autem ſe mutuo curvam rectamque AB in puncto B eſt oſtendendum. Sit NR tangens circvmferentiæ, parallela AB. Conſtat curvæ partem BR totam intra rectas parallelas AB, NR jacere; nam ſi quodvis in ea punctum, ut O, ſumatur, per quod tangens ad circumferentiam ducatur VOL, erit LO æqualis arcui LB, ideoque minor tangente ejuſdem

Vide Fig. 5.

dem arcus, quæ eſt LV: unde punctum O inter V & L cadere neceſſe eſt; atque idem de quocunque puncto in BR accepto oſtendi poteſt.

Jam vero ſi curvam BR dicatur non tangere recta BV in B, ergo poterit duci ex B recta quæpiam BK tam exiguo angulo ſuper BV inclinata ut curvam BR non ſecet: ſit ea BK. Ducatur AL radius parallelus BK, ſitque LH ad eandem BK perpendicularis, ideoque & ad AL. Eſt igitur LH æqualis ſinui arcus BL ideoque hoc arcu minor. Æqualis autem eidem arcui eſt recta LHO inter contactum L & curvam BR intercepta. Itaque pars aliqua curvæ BR in qua eſt punctum O cadet intra angulum VBK, quantumvis exiguus eſſe ponatur. Unde manifeſtum eſt rectam BK ſecare curvam, ideoque BV demum tangere eam in B.

Cum itaque globus cum rota circumactus curvam deſcribere conetur reſpectu radii in quo ſitus eſt, ac talem quidem quæ radium contingat, apparet conatu hoc filum, cui alligatus eſt, non ſecus tendi debere, quam ſi ſecundum ipſum radium productum globus ire conetur.

Vide Fig. 6. Sunt autem & ſpatia quæ in dicta curva globus peracturus eſſet temporibus æqualiter creſcentibus, ſicut ſeries quadratorum ab unitate 1, 4, 9, 16, &c. ſi videlicet principium motus ſpatiaque minima attendamus; quod appoſita figura oſtendit, ubi arcus æquales in circumferentia rotæ accepti ſunt BE, EF, FM; & in tangente BS rectæ dictis arcubus æquales BK, KL, LN; lineæ vero ex centro ſunt EC, FD, MS. Hic itaque ſi globus à circumeunte rota divelleretur in B; tum ubi punctum B perveniſſet in F globus eſſet in K, particulamque curvæ ſupra deſcriptæ percurriſſet EK; poſt ſecundum vero tempus exactum cum B veniſſet in F, globus in L reperiretur, jamque curvæ

væ partem FL percurriſſet: ſimiliterque cum B veniſſet in M, globus peregiſſet curvæ portionem MN. Hæ vero curvæ lineæ partes tanquam eædem cum rectis EC, FD, MS, quas contingunt, in principio ſeparationis globi ab rota, conſiderandæ ſunt; quoniam tam parvi arcus à puncto B accipi poſſunt, ut differentiola quæ eſt inter rectas curvaſque haſce, minorem rationem habeat ad ipſarum longitudinem, quavis ratione imaginabili.

Proinde igitur & ſpatia EK, FL, MN, tanquam creſcentia ſecundum ſeriem quadratorum ab unitate 1, 4, 9, 16, ſpectanda ſunt. Atque ita conatus globi in circumeunte rota retenti haud alius erit, ac ſi ſecundum rectam, quæ ex centro per ipſum ducitur progredi contenderet, idque motu accelerato quo æqualibus temporibus creſcentia percurreret ſpatia ſecundum numeros 1, 3, 5, 7, &c. ſufficit enim initio hanc progreſſionem obſervari; nam licet poſtea qualibet alia ratione vel motu feratur, id ad conatum, qui eſt ante inceptum motum, nihil prorſus attinet. Is autem, quem diximus, planè ſimilis conatus eſt ei, quo gravia ex filo pendentia deorſum pergere nituntur. Unde etiam concludemus, vires centrifugas mobilium inæqualium, ſed in circulis æqualibus æquali velocitate latorum eſſe inter ſe, ſicut mobilium gravitates, ſeu quantitates ſolidas. Sicut enim gravia omnia eadem celeritate conantur deorſum labi motuque ſimiliter accelerato; tanto autem amplius momenti habet hic eorum conatus quanto majora fuerint; ita in iis quoque, quæ a centro tendere nituntur, evenire debet, quorum conatus plane ſimilis eſt oſtenſus conatui, qui eſt ex gravitate. Cum autem ejuſdem globi idem ſemper ſit conatus ad deſcendendum quoties ex filo ſuſpenditur; contra verò globi in rota circumacti minor majorve conatus, prout tardius celeriuſve rota verſabitur;

 ſupe-

ſupereſt ut magnitudinem ſeu quantitatem conatus cujuſque in diverſis rotæ celeritatibus inquiramus. Et primo quidem illud inveſtigabimus, qua celeritate rotam propoſitam circumagi neceſſe ſit, ut æquè validè filum ſuum globus intendat, atque cum perpendiculariter ab illo eſt ſuſpenſus.

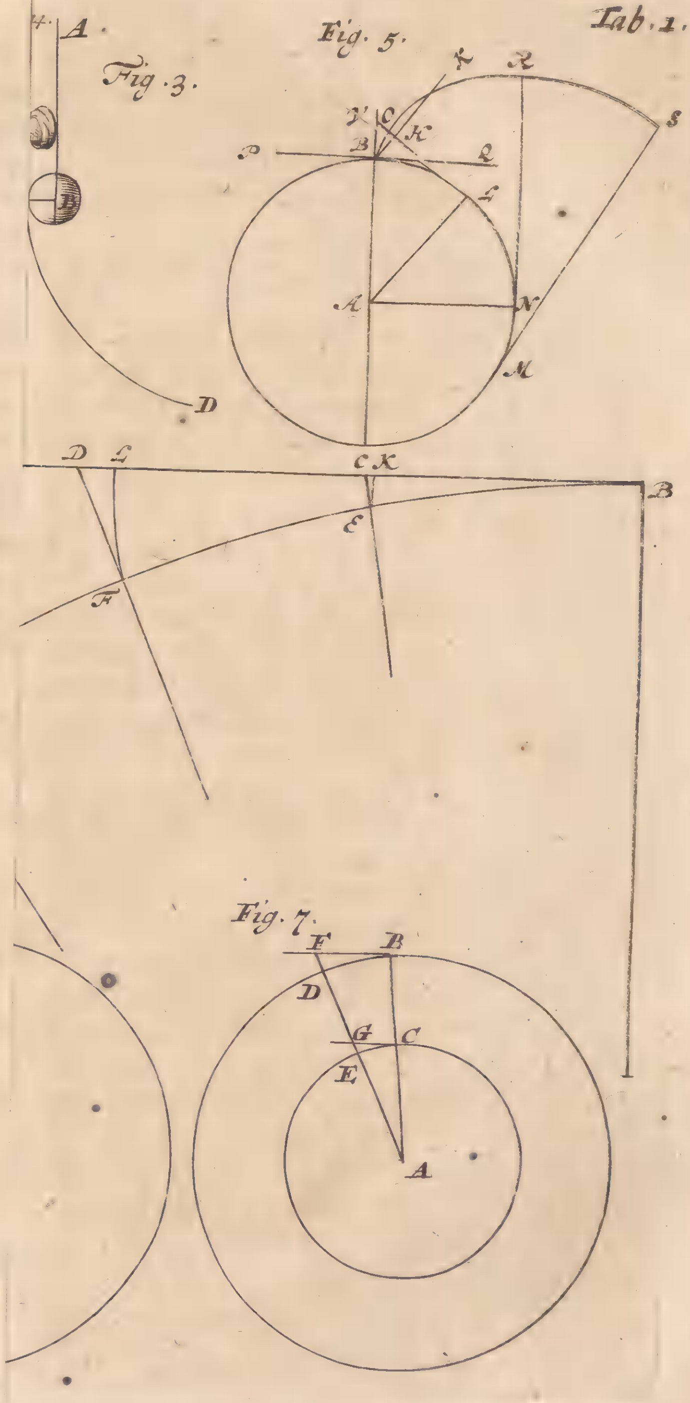
Propositio I.

Si mobilia duo æqualia æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri.

Vide Fig. 7. Sint circuli quorum radii AB, AC, per quos duo mobilia æqualia æqualibus temporibus circumferantur. Accipiantur in utroque arcus minimi ſimiles BD, CE; & in tangentibus ad puncta B & C ſumantur BF, CG, ſingulæ ſuis arcubus æquales. Mobile itaque in circulo BD circumlatum conatum habet recedendi a centro ſecundum extenſionem fili ſui motu accelerato naturaliter, eoque motu permeandi ſpatium DF, certa temporis parte: in circulo autem CE circumiens ſimilem quidem habet à centro recedendi conatum, ſed quo parte illa temporis eadem conficiat ſpatium EG. Itaque quanto major eſt DF quam EG, tanto majore vi trahitur filum in majori circulo quam in minori: patet autem eſſe FD ad GE ſicut BF ad CG, hoc eſt, eſt, ut BA ad AC. Erit ergo vis centrifuga in majori circunferentia, ad eam quæ in miminori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri. Quod erat demonſtrandum.

Pro-

Tab. 1.



Propositio II.

Si mobilia æqualia in iiſdem ſive æqualibus circulis rotiſve gyrentur celeritatibus inæqualibus, verum utraque motu æqualibi; erit vis recedendi à centro celerioris ad vim tardioris in duplicata ratione celeritatum. Hoc eſt, ſi fila, quibus illa retinentur, per centrum rotæ deorſum educantur, ſuſtineantque pondera, quibus vis mobilium centrifuga inhibeatur, atque exacte adæquetur, erunt hæc pondera inter ſe, ſicut velocitatum quadrata.

Sit circulus cujus centrum A, radius AB, in cujus circumferentia feratur primum mobile tardius celeritate, quam repræſentet linea N, deinde alterum celeritate majori, quæ ſit O. Sumtis jam arcubus minimis BE, BF, qui ſint inter ſe, ut N ad O, conſtat eadem temporis parte, qua mobile tardius abſolvet arcum BE, illud quod celerius eſt percurſurum arcum BF; ſint arcubus BE, BF ſingulis æquales in tangente poſitæ BC, BD. Itaque & conſtat, utrique mobili ineſſe conatum recedendi a centro ſecundum extenſionem fili ſui motu accelerato; ſed quo motu mobile, quod tardius fertur, receſſurum ſit à puncto circumferentiæ, cui incumbit, quantum eſt ſpatium EC; illud vero quod celerius eſt, tempore æquali per ſpatium FD. Quanto igitur major eſt DF quam CE, tanto validius trahit mobile celerius tardiore. At quoniam arcus BE, BF minimos ſumſimus, eadem cenſenda eſt ratio DF ad CE, quæ quadrati DB ad CB, ſecundum ea quæ paulo ante explicavimus; eſtque ut DB ad BC ita arcus FB ad BE, hoc eſt, ita O ad N; ergo erit ut quadratum O ad quadratum N, ita FD ad EC, atque ita proinde vis centrifuga celerioris mobilis ad vim tardioris. Q. E. D. Vide Fig. 8.

Propositio III.

Si duo mobilia æqualia in circulis inæqualibus æquali velocitate ferantur, erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum, ita ut in minori circumferentia dicta vis major exiſtat.

Vide Fig. 9. Sunto circa idem centrum A circuli inæquales, quorum radii AB, AC; & ferantur in circumferentiis eorum mobilia æqualia celeritate æquali, hoc eſt, ut quo tempore in majori circumferentia percurritur arcus aliquis BD, eodem tempore in minori percurratur arcus CF ipſi BD æqualis longitudine. Dico vim centrifugam mobilis quod in circumferentia BD circumfertur, fore ad eam quam habet circumlatum in circumferentia CF, ſicut radius AC ad AB. Ducatur radius AD ſecans minorem circumferantiam in E; & ſit duabus AC, AB tertia proportionalis AG, Porro intelligatur mobile quoddam utrivis duorum æquale circumferri in circumferentia CF ea celeritate, ut eodem tempore abſolvat arcum CE, quo duo alia arcus BD & CF. Illius igitur aſſumti mobilis celeritas ad celeritatem alterutrius horum erit, ut arcus CE ad arcum BD, hoc eſt, ut AC ad AB. Erit autem vis centrifuga mobilis, quod arcum BD percurrit, ad vim mobilis aſſumti, quod eodem tempore percurrit arcum CE, ut BA ad AC *. Sed vis centrifuga aſſumti mobilis, erit ad vim ejus, quod eodem tempore percurrit arcum CF, in duplicata ratione AC ad AB, hoc eſt, erit eadem quæ AC ad AG, quoniam celeritates eorum oſtendimus eſſe, ut AC ad AB. Ex æquali igitur erit vis centrifuga mobilis, quod percurrit arcum BD ad vim ejus quod eodem tempore percurrit arcum æqualem CF, ut BA ad AG, hoc eſt, ut AC ad AB; quod erat demonſtrandum.

* Prop. 1.

* Prop. 11.

Pro-

Propositio IV.

Si mobilia duo æqualia in circumferentiis inæqualibus circumlata vim centrifugam æqualem habuerint, erit tempus circuitus in majori circumferentia ad tempus circuitus in minori in ſubduplicata ratione diametrorum.

Sunto circuli inæquales BE, CF, circa idem centrum A, quorum radii AB, AC; & in utroque mobile gyretur, ita ut eadem ſit utrobique vis centrifuga; dico tempus, quo circumferentia circuli BE percurritur, eſſe ad tempus, quo percurritur circumferentia CF, in ſubduplicata ratione AB ad AC, hoc eſt, ſicut BA ad AD mediam proportionalem inter AB, AC. Si enim tertium mobile intelligatur aliis iſtis æquale, quod eodem tempore percurrat circumferentiam CF, quo alterum abſolvit circumferentiam BE, erit aſſumti mobilis vis centrifuga ad vim hujus ut AC ad AB *. Ponuntur autem mobilium duorum priorum vires centrifugæ æquales; ergo aſſumti mobilis vis centrifuga erit etiam ad vim ejus, quod in circumferentia CF currere poſitum eſt, ut AC ad AB; ſunt autem vires centrifugæ eorum quæ in eadem circumferentia moventur in duplicata ratione velocitatum *. Ergo velocitas aſſumti mobilis erit ad velocitatem ejus, quod primo poſitum eſt revolvi in circumferentia CF, ſicut AC ad AD, vel ut AD ad AB. Velocitatibus autem contraria ratione reſpondent tempora lationum per eandem circumferentiam; ergo tempus circuitus aſſumti mobilis, cui æquale eſt ex hypotheſi tempus circuitus mobilis euntis per peripheriam BE, erit ad tempus circuitus mobilis quod in circumferentia CF initio ferri dictum eſt, ut AB ad AD. Quod erat demonſtrandum.

Vide Fig. 10.

* Prop. I.

* Prop. II.

Propositio V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis, habebit conatum à centro recedendi æqualem ſuæ gravitati, hoc eſt, æque validè filum, quo retinetur, trahet, atque cum ex illo ſuſpenſum eſt.

Vide Fig. 11.

Eſto circulus centro A, radio AB horizonti parallelus, in cujus circumferentia feratur mobile æquabili motu, velocitate autem, quantam acquireret cadens perpendiculariter ex altitudine æquali dimidiæ AB, quæ ſit CB; dico vi centrifuga æquè validè tractum iri funem, quo mobile detinetur, ac ſi liberè ex eodem fune ſuſpenſum eſſet.

Sit circuli tangens BD æqualis radio AB.

Quoniam igitur mobile currit in circumferentia circuli ea celeritate, quam acquirit cadens ex altitudine CB, hoc eſt, qua tranſiret motu æquabili ſpatium BD ipſius BC duplum æquali tempore, quo decidit per CB; ſequitur, ſi in B dimittatur, percurſurum dicto tempore dictum ſpatium BD æquabili motu. Accipiatur ipſius BD pars minima quæpiam BE, & ducatur per centrum recta EAH ſecans circumferentiam in F. Sit porro ut quadratum DB ad quadratum BE, ita BC ad CG longitudine. Hinc igitur ſi tempus, quo cadit motu accelerato per CB, repræſentari ponamus lineâ BD, erit BE tempus motus accelerati per CG. Sed eadem BD erit quoque tempus, quo tranſiret ipſam BD motu æquabili, quantumque habet in circumferentia currens; nam hoc tempus ex hypotheſi æquale eſt tempori motus accelerati per CB. Itaque & BE tempus erit, quo tranſeat ipſum BE ſpatium

tium celeritate, quam habet vertiginis. Unde conſtat æquali tempore peragi ſpatium CG motu è quiete accelerato, & ſpatium BE motu æquabili cum celeritate, quam poſitum fuit habere mobile in circumferentia currens. Conſtat porro ſi mobile dimittatur in B, perventurum motu æquabili in E ſimul ac punctum circumferentiæ B acceſſerit ad F; nam recta BE ipſi arcui BF æqualis cenſenda eſt, eo quod BE infinitè parva intelligitur. Itaque conatum ei ineſſe motu accelerato naturaliter, (nam talem eſſe oſtenſum eſt) dicemus recedendi a puncto B, per ſpatium FE tempore eodem, quo celeritate ſuæ vertiginis tranſiret ſpatium BE motu æquabili, hoc eſt, tempore eo quo percurreret motu è quiete accelerato ſpatium CG. Quare ſi oſtenſum fuerit ſpatia CG & FE eſſe æqualia, conſtabit conatum mobilis ſuſpenſi ad deſcendendum motu accelerato, æqualem plane eſſe conatui ejuſdem mobilis, quo in circumferentia verſatum nititur a filo ſuo recedere motu ſimiliter accelerato; quoniam videlicet conatus ad motus acceleratos tunc æqualis eſt, cum ſpatia æqualia æqualibus temporibus iis motibus peragenda forent. Eſſe autem CG, FE æquales ſic oſtenditur: ut HE ad EB ita eſt EB ad EF, ideoque ſicut quadratum HE ad quadratum EB, ita eſt HE ad EF longitudine; unde ſumtis antecedentium ſubquadruplis erit, ſicut quadratum AF ad quadratum EB, ita pars quarta HE, cui æqualis cenſenda eſt $\frac{1}{4}$ HF, hoc eſt, BC ad FE; ſed ut quadratum AF ad quadratum BE, ſive ut quadratum DB ad quadratum BE, ita eſt ex conſtructione BC ad CG longitudine. Ergo erit BC ad CG ut eadem BC ad FE, ideoque FE, CG inter ſe æquales; quare conſtat propoſitum.

Pro-

Propositio VI.

Data altitudine quam certo tempore, puta ſecundi minuti unius, mobile emetitur, cadendo ex quiete perpendiculariter; invenire circulum in cujus circumferentia mobile circumiens horizontaliter, atque uno item ſecundo circuitum abſolvens, habeat vim centrifugam gravitati ſuæ æqualem.

Vide Fig. 12. Sit data altitudo AB, quam perlabitur mobile cadens ex quiete tempore v. gr. unius ſecundi. Fiat ut circumferentia circuli ad diametrum ſuam, ita AB ad lineam C, & ita hæc ad tertiam D: Et deſcribatur diametro æquali ipſi D circulus EFG, dico hunc eſſe eum qui poſtulabatur; dividatur enim radius EF bifariam in H. Mobile itaque in circulo FG ſi currat velocitate quam acquirit cadendo ex altitudine HF motuque æquabili, habebit vim centrifugam æqualem ſuæ gravitati *. Ideoque ſi tantum oſtenderimus dicta velocitate percurri ſemel circumferentiam totam FG tempore unius ſecundi, jam conſtabit circulum EFG propoſito ſatisfacere. Conſtat mobile motu æquabili atque ea celeritate quam acquiſivit in fine caſus per HF tranſiturum ſpatium ipſius HF duplum, eodem tempore quo cecidit per HF; ſi ergo dicta acquiſita celeritate feratur motu æquabili per circumferentiam FG, erit tempus quo eam abſolvet ad tempus caſus per HF, ſicut circumferentia FG ad duplam HF ſive ad EF. Et ſumtis conſequentium duplis erit tempus motus æquabilis per circumferentiam FG ad tempus duplum caſus HF, hoc eſt, ad tempus caſus per D (nam D eſt quadrupla HF) ſicut circumferentia FG ad duplam FE, ſive ad D; hoc eſt, ſicut C ad D (nam neceſſario C ipſi circumferentiæ

* Prop. V.

rentiæ FG æqualis eſt) hoc eſt, ſicut AB ad C. Sed ut AB ad C, ita eſt tempus caſus per AB, hoc eſt, tempus unius ſecundi ad tempus caſus per D; quoniam ſcilicet AB ad D duplicata eſt ratio ejus, quæ AB ad C; igitur tempus dictum motus æquabilis per circumferentiam FG erit ad tempus caſus per D, ut tempus unius ſecundi ad idem tempus caſus per D. Ergo dictum tempus per circumferentiam FG erit æquale tempori unius ſecundi; quod oſtendere neceſſe erat.

Quum calculus doceat altitudinem AB, quam uno ſecundo mobile cadens perlabitur, eſſe pedum Rhenoland. 15. $7\frac{1}{2}$ pollicum. Cumque ſit AB ad C ut circumferentia ad diametrum, hoc eſt, ut 22 ad 7, ſecundum Archimedem, atque ita quoque C ad D, ſive ad diametrum circuli FG; fiet hæc diameter 19 unciarum proximè; cujus dimidium unciæ 9. lin. 6. Itaque ſi mobile aliquod tempore ſecundi unius circuitus ſingulos abſolvat in circumferentia, cujus quæ ex centro eſt $9\frac{1}{2}$. unciarum, vis centrifuga ſuæ gravitati æquabitur. Vide Horol. oſcill. Pa. 4. Pr. 26.

LEMMA I.

Si pondus C ſuſtineatur in plano inclinato AB a pondere D libere pendente, ſitque funis CE horizonti parallelus; erit gravitas D ad gravitatem C, ſicut perpendicularis BF, ad baſin FA. Conſtat ex Mechanicis. Hinc ſi BF æqualis ponatur FA, debebit gravitas D ipſi C æqualis eſſe. Vide Fig. 13.

LEMMA II.

Si pondera æqualia ſuper planis diverſimode inclinatis ſuſtineantur retenta per lineas horizonti parallel- Vide Fig. 14.

rallelas, erunt potentiæ ſuſtinentes inter ſe, ſicut tangentes angulorum, quibus plana ad horizontis planum inclinantur.

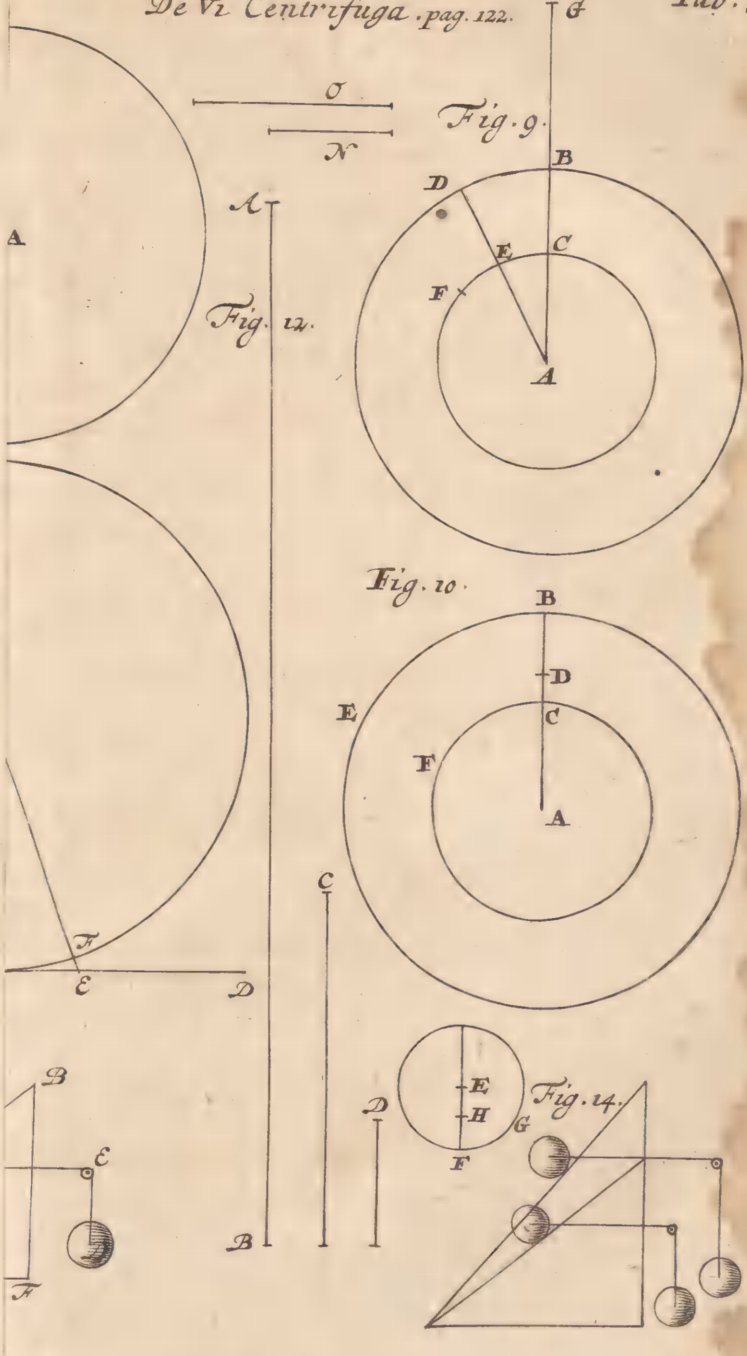
Propositio VII.

In curva ſuperficie conoidis Parabolici, quod axim ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis circumferentias Horizonti parallelas percurrentis, ſive parvæ, ſive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peragentur: quæ tempora ſingula æquantur binis oſcillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti Parabolæ genitricis.

Vide Fig 15. Sit Parabola HDB, cujus revolutione circa axim BK, fiat Conois Parabolicum. In illo axe ſumatur BA æqualis ¼ lateris recti, erit ordinatim applicata AD æqualis lateris recti dimidio. Ponatur autem corpus in D circa axim AB circumagi ea velocitate, ut vis centrifuga fiat gravitati æqualis; quæ vis ergo, cum angulus ADE ſit ſemirectus, corpus ſuſtinebit in puncto D *. Si vero corpus rotetur alibi, ut in H, centro K & intervallo KH, erit vis centrifuga, qua ſuſtinetur in puncto H, æqualis vi, qua mobile per rectam HK Horizonti parallelam detineri poterit in plano HF tangente Paraboloidem. Hæc autem vis ex primo Lemmate erit ad vim gravitatis, ut HG ad GF, ſive, propter triangula ſimilia, quoniam HL in HF normalis ponitur, ut HK ad KL, ſive, ut HK ad AD, cum ex natura Parabolæ KL ſemper æqualis ſit dimidio lateris recti. Vis ergo centrifuga, qua corpus rotando detinetur in H, eſt ad corporis gravitatem, ſive ad vim centrifugam in D, ut HK ad DA. Quare ex converſa primæ eodem tempore ſuas circumferentias abſolvent.

* Lemm. 2.

Tempus



O
N
Fig. 9.
G
B
D
C
E
F
A
A
Fig. 12.
Fig. 10.
B
D
E
C
F
A
F
E
D
C
B
E
B
D
E
H
G
F
Fig. 14.
F

Tempus autem quo circuitus peraguntur ita determinabitur. Quoniam ſuppoſuimus corpus D rotari, ita ut vim centrifugam habeat gravitati æqualem, rotabitur ea velocitate, quam acquireret caſu perpendiculari ex dimidia AD *. Sed ea velocitate, tempore hujus deſcenſus, abſolveret lineam DA motu æquabili. Tempus ergo gyrationis eſt ad tempus deſcenſus per dimidium DA, ut circumferentia circuli ad radium DA. Tempus autem oſcillationis minimæ eſt ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine *, ut circumferentia circuli ad diametrum, adeoque tempus duarum oſcillationum minimarum penduli DA, eſt ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia altitudine DA, ut circumferentia circuli ad radium, hoc eſt; ut tempus totius gyrationis ad idem tempus caſus perpendicularis per dimidiam DA. Tempus ergo gyrationis in conoide Parabolico æquatur tempori, quo binæ peraguntur oſcillationes penduli, cujus longitudo ſit DA, dimidium lateris recti Parabolæ genitricis. Q. E. D.

* Prop. V.

* Prop. XXV. P. 2. Horol. oſcil.

Propositio VIII.

Si mobilia duo ex filis inæqualibus ſuſpenſa gyrentur, ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente, fuerint autem conorum, quorum ſuperficiem fila hoc motu deſcribunt, axes ſive altitudines æquales, tempora quoque, quibus utrumque mobile circulum ſuum percurrit, æqualia erunt.

Sint fila AC, AD communi vertice A religata, habeantque mobilia ſingula adnexa in C & D, quæ gyrentur in circulis horizontalibus, quorum radii BC, BD: ſit autem AB axis idem utriuſque coni, quem fila

Vide Fig. 16.

fila AC, AD circuitu ſuo ambiunt; dico, tempora circulationum eſſe inter ſe æqualia. Ponantur primo mobilia eſſe æqualia; ſit CE perpendicularis in AC, & DF perpendicularis item in AD. Conſtat igitur vim centrifugam mobilium eſſe, quæ fila ita obliquè extenſa ſuſtineat; cumque mobile C conatum habeat ex gravitate ſua deſcendendi eundem, ac ſi plano CE incumberet; vis autem centrifuga, qua nititur recedere ab axe AB ſecundum BC, iſtum gravitatis conatum inhibeat, neceſſe eſt vim dictam centrifrugam æqualem eſſe potentiæ, qua mobile C ſuſtineretur in plano inclinato CE per lineam BC horizonti parallelam. Eadem ratione neceſſe eſt vim centrifugam, qua ſuſtinetur mobile D, eſſe æqualem potentiæ, qua hoc idem ſuſtineretur in plano DF per rectam item horizonti parallelam. Eſt autem hæc potentia ad priorem illam quæ ſuſtinere dicta eſt mobile C, ſicut tangens anguli BDF ad tangentem anguli BCE *, hoc eſt, ſicut tangens anguli DAB ad tangentem anguli CAB, hoc eſt, ut DB ad CB: ergo & vis centrifuga quam habet mobile D in circulo ſuo, erit ad vim centrifugam mobilis C in ſuo circulo, ut DB ſemidiameter ad CB ſemidiametrum. Unde ex Prop. 1. converſa, ſequitur tempora circulationum eſſe æqualia.

* Lemm. II.

Si vero inæqualia fuerint mobilia, nihilo ſecius eadem temporum æqualitas continget. Nam ſi ex gr. mobile C gravius ponatur, quam prius fuerat, tanto quoque majori potentia, quanto gravius eſt, indigebit, qua ſuſtineatur in plano inclinato CE per lineam horizonti parallelam, tantóque proinde majorem vim centrifugam requiret; hanc autem ut habeat, debet circulum percurrere eodem tempore, quo antea cum levius ponebatur; ut patet ex iis quæ ſupra diximus. Ergo conſtat propoſitum.

Pro-

Propositio IX.

Tempora lationum per circulos horizontales CD, BE, *angulo gyrationis* CAD *eodem exiſtente, ſunt in ſubduplicata ratione longitudinum filorum* AC *ad* AB.

Eadem enim vis centrifuga eſt in utraque hujuſmodi circulatione ad ſuſtinendam eandem fili obliquitatem; ſi autem dicta vis eſt eadem tunc ut quadrata temporum quibus circuli abſolvuntur, ita debent eſſe diſtantiæ ab axe circulationis per converſam IV. Ergo hic erunt, ſicut CF ad BG, hoc eſt, ut AC ad AB, ita quadrata temporum circulationum. Q. E. D. Vide Fig. 17.

Propositio X.

Si mobilia duo quælibet filis ſuſpenſa gyrando deſcribant circulos horizonti parallelos; erunt tempora circulationum in ſubduplicata ratione altitudinum conorum, quarum ſuperficies à filis deſcribuntur.

Sint fila AC, AD quibus annexa mobilia C & D circulos horizontales deſcribant, dum capita filorum in A immota manent. Et C quidem ducat filum AC ſecundum ſuperficiem conicam, cujus axis AB; D vero filum DA per ſuperficiem coni, cujus axis ſit AE; dico tempus circuitus mobilis C eſſe ad tempus circuitus mobilis D in ratione ſubduplicata AB ad AE. Intelligatur enim mobile aliud religatum ex filo AF, facere ſua circulatione conum, cujus latus AF axis AB. Ejus igitur circulationis tempus æquale eſt tempori circulationis à mobili C *, Eſt autem tempus circulationis Vide Fig. 18.

* Prop. VIII.

tionis mobilis F ad tempus circuitus mobilis D in ſubduplicata ratione AF ad AD *, ſive AB ad AE. Ergo & tempus circulationis mobilis C ad tempus mobilis D, erit in ſubduplicata ratione AB ad AE. Q.E.D.

* Prop. IX.

Propositio XI.

Si mobile filo ſuſpenſum, capite fili ſuperiore quieſcente, deſcribat motu ſuo circulos horizonti parallelos inæquales, erunt tempora lationum per dictos circulos in ſubduplicata ratione ſinuum angulorum, quibus filum ad planum horizontis inclinatur.

Vide Fig. 19.

Sit filum AB religatum ad A; mobile autem ex eo ſuſpenſum ac circumgyratum horizontaliter extendat ipſum primo ſecundum rectam AB; deinde vero ſecundum rectam AC; ducantur autem horizonti parallelæ BE, CD, occurrentes perpendiculari AD in E & D. Ergo quia AB, AC æquales ſunt, referet AE ſinum anguli ABE; AD vero ſinum anguli ACD; dico jam tempora lationum per circulos, quorum radii BE, CD fore inter ſe in ſubduplicata ratione AE ad AD; patet hoc manifeſto ex propoſitione ſuperiori.

Propositio XII.

Si pendulum motu conico latum circuitus minimos faciat; eorum ſingulorum tempora, ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia ſunt tempori duarum oſcillationum lateralium ejuſdem penduli minimarum.

Vide Fig. 20.

Sit filum AC religatum ad A, ex quo ſuſpenſum mobile circumgyrando deſcribat circulum Horizontalem,

lem, cujus radius DC, æqualis ipſi DA, ita ut angulus CAD ſit ſemirectus, erit vis centrifuga in C æqualis gravitati mobilis *, ideoque percurret circumferen- *Lemm. tiam radio DC deſcriptam, ea velocitate, quam ac- I. quireret mobile, caſu perpendiculari ex altitudine dimidiæ DC aut DA æquali *. Eſt autem DC ad CA * Prop. ut 1 ad $\sqrt{2}$, adeoque tempus caſus perpendicularis ex V. dimidia DC ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia CA, quæ tempora ſunt in ſubduplicata ratione DC ad CA, erit in ratione 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$. Unde tempus caſus perpendicularis ex dimidia DC, ad tempus quo cadit ex dupla CA, quod temporis caſus ex dimidia AC duplum eſt, erit, ut 1 ad $2\sqrt{\sqrt{2}}$, ſive ut radius quilibet, ad duplum ejuſdem radii ductum in $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Eſt autem tempus caſus perpendicularis ex dimidia DC, ad tempus gyrationis per circumferentirm radio DC deſcriptam, ut radius ad circumferentiam; tempus autem gyrationis per circumferentiam DC eſt ad tempus circuitus minimi, in ſubduplicata ratione AD ad AC * ſive ut 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$: tempus ergo caſus per- * Prop. pendicularis ex dimidia DC, eſt ad tempus circuitus I. minimi, ut radius ad circumferentiam ductam in $\sqrt{\sqrt{2}}$; tempus igitur circuitus minimi penduli AC ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, ut circumferentia ducta in $\sqrt{\sqrt{2}}$ ad duplum radii ductum in $\sqrt{\sqrt{2}}$, ſive ut circumferentia ad diametrum. Cum vero tempus oſcillationis minimæ lateralis penduli AC ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia AC, ſive ſumtis utriuſque duplis tempus duarum oſcillationum minimarum lateralium penduli AC ad tempus caſus perpendicularis ex dupla AC, etiam ſit, ut circumferentia ad diametrum, erit tempus circuitus minimi penduli AC, ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli AC altitudine, ut tempus duarum oſcillationum lateralium minimarum penduli AC ad idem

tempus

tempus caſus perpendicularis ex dupla AC. Erit ergo tempus circuitus minimi penduli AC æquale tempori duarum oſcillationum minimarum lateralium ejuſdem penduli AC. Q. E. D.

Propositio XIII.

Si mobile in circumferentia feratur, circuituſque ſingulos abſolvat eo tempore, quo pendulum longitudinem ſemi-diametri circumferentiæ ejus habens motu conico circuitum minimum abſolveret, vel duplicem oſcillationem minimam lateralem, habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem.

Vide Fig. 20. Sit filum AC æquale radio circuli, per quem mobile fertur, ita ut angulus CAD ſit ſemirectus; ſitque tempus gyrationis per CD, 1. erit tempus gyrationis minimæ ejuſdem penduli $\sqrt{\sqrt{2}}$ *. Idem autem ex hypotheſi eſt tempus gyrationis per circumferentiam, cujus radius AC; tempus ergo gyrationis per CD eſt ad tempus gyrationis per AC, ut 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$; ſive in ſubduplicatâ ratione CD ad AC, unde ex converſa 4æ, habebunt hæc duo mobilia ita circumlata, vim centrifugam æqualem, adeoque cum in CD vis centrifuga ſit æqualis gravitati, idem locum habebit, in gyratione per circulum, cujus radius AC. Q.E.D.

* Prop. XI.

Pro-

Propositio XIV.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori caſus perpendicularis ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili ad planum horizontis fuerit partium 2, ſcrup. 54, proxime. Exacte vero, ſi anguli dicti ſinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inſcriptum ad quadratum a circumferentia ejus.

Sit AD $=$ DC, a, AE, b; circumferentia circuli ad radium, ut c ad r; tempus caſus perpendicularis per dimidiam CD ſit 1, erit tempus caſus per dimidiam AC $\sqrt{\sqrt{2}}$. Eſt autem tempus per dimidiam AC ad tempus per AC, ut 1 ad $\sqrt{2}$ erit ergo tempus per AC, ut $\sqrt{\sqrt{8}}$. Sed tempus gyrationis per CD eſt ad tempus caſus per dimidiam CD, ut c ad r. Erit itaque tempus gyrationis per CD $= \frac{c}{r}$. Verum tempus gyrationis in C eſt ad tempus gyrationis in quolibet puncto B, in ſubduplicata ratione AD ad AE, ſive ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{b}$. Erit ergo tempus gyrationis in B $= \frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$; quod ſi nunc ponatur AE ſinum anguli ABE eſſe ad radium AB, ut quadratum circulo inſcriptum, ad quadratum circumferentiæ ejus, erit b ad $a\sqrt{2}$, ita $2rr$ ad cc, ſive $\frac{bcc}{arr} = 2\sqrt{2}$, vel $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\sqrt{8}}$: cumque $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$ ſit tempus gyrationis in B & $\sqrt{\sqrt{8}}$ tempus deſcenſus per AC, erit hoc tempus gyrationis in B, æquale tempori caſus perpendicularis ex altitudine penduli filo æquali. Vide Fig. 20.

Cum autem $2r$ ad c eſt, ut 7 ad 22, erit $4rr$ ad

cc ut 49 ad 484, ſive $2rr$ ad *cc* ut 49 ad 968. Hinc fiat, ut 968 ad 49 ita $a\sqrt{2}$ radius $=$ 100000 ad 5062 ſinum anguli ABE gr. 2. 54′, proxime. Q. E. D.

Propositio XV.

Si pendula duo pondere æqualia, ſed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila ſua intendent, in eadem ratione, quæ eſt filorum longitudinis.

Vide Fig. 21. Sint duo pendula AB, AC diverſæ longitudinis, ex quorum extremitatibus B & C ſuſpenſa duo pondera æqualia rotentur circa communem axim AD. Dico vim, qua tenditur filum AB, eſſe ad vim qua tenditur filum AC, in ratione filorum AB ad AC. Si enim ponamus pondus B in eo ſitu ſuſtineri per potentiam in A trahentem filum AB, & per potentiam aliam in G vi centrifugæ æqualem trahentem ſecundum rectam BG conſtat ex Mechanicis ducta BH horizonti perpendiculari & HL eidem parallela, fore vim in A tendentem filum AB ad gravitatem ponderis B ut LB ad BH, ſive ut AB ad AD. Itidem erit vis qua tenditur filum C ad gravitatem ponderis C, ſive ad gravitatem ponderis B, quod æquale ipſi C poſitum fuit, ut AC ad AD. Erit ergo vis qua gyrando tenditur filum AB, ad vim qua tenditur filum AC, ut AB ad AC. Q. E. D.

Pro-

Propositio XVI.

Si pendulum ſimplex oſcillatione laterali maxima agitetur, hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet, quam ſi ex illo ſimpliciter ſuſpenſum foret.

Si globus C ex A ligatus filo AC per quadrantem circumferentiæ CB deſcendat, ubi in B pervenerit triplo majori vi trahet filum AB, quam ſi ſimplici pondere ſuo ſuo ſuſpenſus eſſet. Primum enim velocitas, qua pergeret moveri ſecundum rectam lineam BD, ſi in B filum relinqueret, eadem eſt, atque ea quam haberet in puncto F, ſi perpendiculariter per CF, decidiſſet. Ibi autem tantam nactus eſſet celeritatem, ut ea ſpatium ipſius CF duplum conficeret motu æquabili pari tempore, quo ex C decidit in F. Ergo in B conatum habet globus tranſeundi lineam BD duplam AB, pari tempore, quo ex A caderet in B; nempe non conſiderata vi gravitatis ſuæ, qua deorſum quoque interim deſcenſurus eſſet & Parabolam aliquam deſcripturus. Sit BGE Parabola cujus ſemilatus rectum AB, vertex B. Quoniam ergo receſſus globi B à circumferentia BC, dum per rectam BD æquabili motu fertur, initio prope B punctum pro iiſdem habentur, cum receſſibus à Parabola BGE; conſtat vim centrifugam quam ex ſola circulatione habet globus in B, eſſe conatum recedendi à centro A, vel à circumferentia BC motu accelerato ſecundum numeros 1, 3, 5, 7, &c. ac proinde ſimilem eſſe ei conatui quo corpora deſcendere conantur, quem gravitatem appellamus. Eſt autem ille conatus in globo B tantus, quantus in corpore ſibi æquali quod motu accelerato Vide Fig. 22.

 confectu-

confectum ſit ſpatium DE, eodem tempore dum motu æquabili conficeret ſpatium BD, hoc eſt, æquali tempore illi quo globus accelerato itidem motu caderet ex A in B. Ergo quia DE eſt dupla BA conatus centrifugus globi in B duplus eſt ſuæ gravitatis. At vero conatus alius ex gravitate accedit hîc, quo globus B (pari tempore quo ex A ad B caderet) nunc quoque tantundem ſpatii motu naturaliter accelerato deorſum conficere nititur. Ergo utroque ſimul conatu, nititur conficere, motu accelerato ſecundum 1, 3, 5, 7, ſpatium æquale utriſque DE & AB; hoc eſt ipſius AB triplum; quamobrem etiam, erit vis, qua trahit in B puncto ex C deſcendens, tripla ejus, quæ fit ex ſimplici pondere globi B libere pendentis. Quod & ad amuſſim experientiæ conſentit.

Si cupiam ſcire qua vi trahatur funis AB deſcendente globo per arcum HB; ſit FN dimidiæ AB æqualis & fiat rectangulum BN, ducaturque HL parallela AB; dico vim tractionis quæſitam eſſe ad pondus ſimplex globi pendentis, ut HL ad LK. Unde ſi fuerit BH ſextans circumferentiæ erit iſta vis ponderis hujus dupla; eoque filo duplici opus erit ad perferendam ejus tractionis vim, cujuſmodi ſimplici globus ſuſpenſus retineri poteſt, &c.

Propositio XVII.

Globus filo ex centro circuli ad horizontem perpendicularis ſuſpenſus, per circumferentiam iſtius circuli rotari non poteſt, niſi filum ſextuplum ponderis appenſi ſuſtinere queat.

Vide Fig. 23. Sit circulus perpendiculariter ad horizontem erectus BCDE, ex cujus centro A ſuſpenſus ſit globus B, dico, ut hic circumgyrari poſſit per circumferentiam

BCDE,

BCDE, opus eſſe filo, quod ſextuplum ponderis B appenſum ſuſtinere poſſit. Ut enim filum extenſum maneat cum globus tranſit D punctum, perque arcum DE deſcendit, oportet velocitatem globi eam illic eſſe, quâ, ſi dimittatur, deſcripturus ſit parabolam DF, cujus ſemilatus rectum ſit AD. Quare tantam habere eum oportet, qualem in D habiturus eſſet decidens ex altitudine HD ipſius DA dimidia: ut igitur ei ex B per ſemi-circulum BCD aſcendenti ſuperſit dicta celeritas in D, neceſſe eſt celeritatem in B tantam eſſe, qua poſſit aſcendere perpendiculariter uſque ad H punctum. Hanc enim celeritatem in B habens, quacunque via perveniat ad altitudinem D, ſemper reſtabit ei tantum celeritatis, ut poſſit porro perpendiculariter, vel quacunque etiam via aſcendere ad H, hoc eſt, tanta ei ſupererit celeritas, quantam ex altitudine HD cadens acquireret, qua illi in D opus eſſe diximus. Celeritas porro, qua ex B ad H perpendiculariter aſcendere poſſet, ſive quam haberet ex HB decidens, eſt ad celeritatem quam acquireret ex AB cadens, in ratione ſubduplicata horum ſpatiorum, hoc eſt, ea quæ $\sqrt{10}$ ad 2. Eſt autem oſtenſum in præcedenti, ſi rotetur in circumferentia ea celeritate, quam acquirit cadens ex AB ſive per arcum EB, eſſe vim centrifugam ſolam duplam ponderis globi ſimplicis. Eſtque celeritas qua hîc in eadem circumferentia rotatur ad illam, $\sqrt{10}$ ad 2, ac proinde vis centrifuga in ratione duplicata, hoc eſt 10 ad 4, * ſive ut 5 ad 2. Ergo vis centrifuga hîc erit ad globi gravitatem ut 5 ad 1. Ad hanc vero vim centrifugam, cum globus tranſit in B, addenda eſt vis gravitatis, qua deorſum tendere conatur, quæ ad vim dictam centrifugam dicta eſt ſe habere, ut 1 ad 5. Ergo tota vis ſeu attractio quam ſentiet filum tranſeunte globo in B erit ſextupla globi gravitatis.

* Prop. 11.

Vide Fig. 24. Hinc invenio, ſi globus ex AB filo ligatus dimittitur ex C, ejuſdem cum A puncto altitudinis, dividatur autem AB in D, ut ſit DB $= \frac{2}{5}$AB, atque in D clavus figatur, cui filum occurrat, globo ex C cadente; ita demum globum circa clavum D convolvi poſſe, circulumque deſcribere; ſi vero altius figatur clavus D, non poſſe. Nam cum celeritas globi in B ad circulationem integram perficiendam debeat eſſe ad celeritatem quam acquireret cadens ex DB ut $\sqrt{10}$ ad 2. ut modo oſtenſum fuit. Hinc altitudines debebunt eſſe in duplicatâ ratione iſtius, nempe ut 10 ad 4 ſive 5 ad 2, ex quibus cadendo diverſas iſtas celeritates acquirat. Ergo AB ad DB ut 5 ad 2.

FINIS.

CHRI-

Fig. 22.

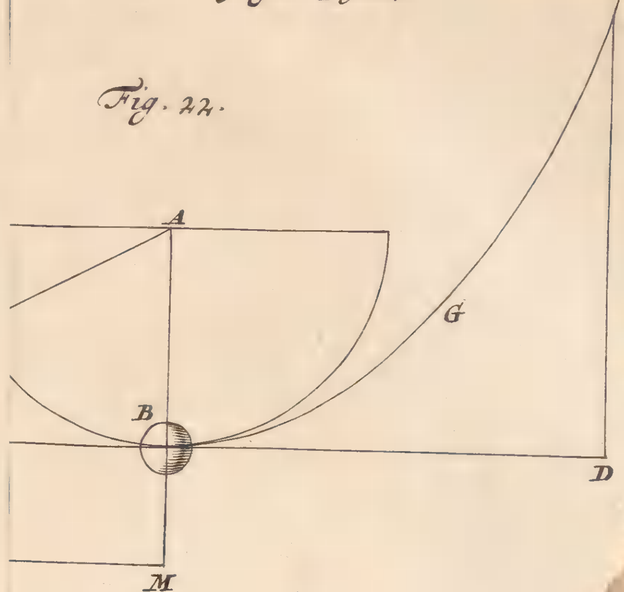


Fig. 24.

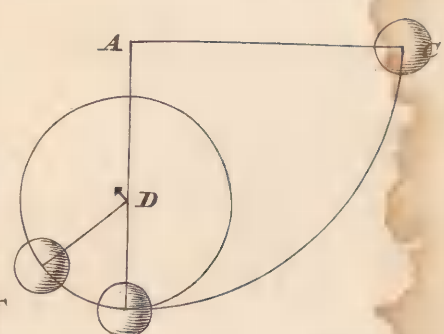
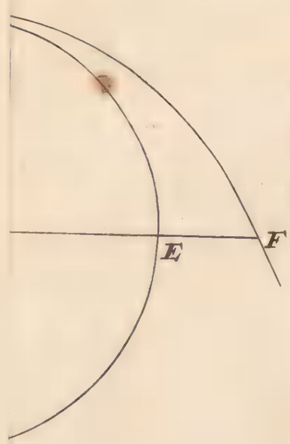


Fig. 23.



CHRISTIANI HUGENII

DESCRIPTIO

AUTOMATI PLANETARII.

CHRISTIANI HUGENII
DESCRIPTIO
AUTOMATI PLANETARII.

Rerum cæleſtium ſcientiam ante bis mille annos inchoatam, magniſque ingeniis excultam, noſtra demum ætate abſolutam, ut mihi videtur, perfectamque habemus; Idque ita, ut centum circiter his proximis annis plus profectum ſit, quam reliquo omni tempore. Quæ enim antea in hac arte præcipua erant, loca ſtellarum definire tum fixarum tum errantium, anni ac menſium ſpatia diſpeſcere, Eclipſes prædicere, ea omnia non ſolum multò melius planiuſque nunc facere didicimus; ſed, & quod majus eſt ac præclarius, ordinem, poſitum, proportionem & figuram orbium cæleſtium, quibus circa Solem Planetæ ac Tellus ipſa circumfertur, ſumma certitudine comprehenſa tenemus; ſtellas fixas innumeras, planetaſque alios Teleſcopii obſervationibus perceptos priorum numero addidimus. Quæ omnia ante Copernici ævum, quædam & in noſtrum uſque, profundis tenebris demerſa latebant. Itaque ſi quis cogitet, quantarum in arte ſua rerum cognitione veteres Aſtronomi caruerint, adeo ut nec partes Syſtematis ſingulas, nec formam totius habuerint perſpectam, facile quoque intelliget fieri non potuiſſe, ut inſtar ejus aut imaginem aliquam arte effingerent. Quare etſi plurimùm celebretur doctorum ſcriptis Archimedæa ſphæra

ac Poſſidonii illa, cujus apud Ciceronem mentio facta reperitur, certum tamen eſt, nullam iis nec archetypi cæleſtis ſimilitudinem ineſſe potuiſſe, nec verorum motuum imitationem, etſi ſummo ingenio, induſtriaque fabricatas fuiſſe credibile ſit. Ex eo vero tempore, quo reformata reſtitutaque in melius fuit Aſtronomia, ſicut facilius res eadem tentari potuit, ita a pluribus quoque ſuſceptam effectamque ſcimus; quorum & Machinationes quaſdam vidimus, vario artificio elaboratas. Nos vero, ab his omnibus diverſam viam ſecuti, tale fabricari curavimus Automatum, in quo exiguo rotarum continenter euntium numero effecimus, ut in tabulæ planæ ſuperficie, Planetarum quinque primariorum corpora circa Solem, Lunæ vero circa Terram, curſus ſuos abſolverent, iiſdem quibus in cælo temporibus, atque in iis orbibus excentricis, qui cæleſtium veram dimenſionem poſitumque exprimerent; ſervata quoque in ſingulis motuum inæqualitate, qua celerius feruntur in partibus a Sole minus remotis: & annotata denique exigua illa declinatione, qua ab Eclipticæ, ſive orbitæ Telluris plano evagantur. Adeo ut præter ſpectaculi elegantiam, etiam poſitus Planetarum non modo in præſens tempus, ſed & in futurum aut præteritum, tanquam ex perpetua quadam ephemeride hinc diſcere liceat, nec non conjunctiones oppoſitioneſque omnium, cum ad Solem, tum inter ſe; idque tanto exactius, quanto ampliore forma opus effectum fuerit. Quæ inventio cum a multis expetita ſit, qui vel cognoſcere, vel imitari eam cuperent, hoc libro cujuſmodi ſit exponemus. Incipiam vero a Machinæ conſtructione exteriori, quæ totum opus complectitur.

Itaque Octogonum eſt è ligno coagmentatum, bipedali diametro, profunditate pollicum ſex. Hoc ad parietem ita ſuſpenſum eſt, & cardinibus ſuis libratum, qui in ſiniſtro latere affixi ſunt, ut cum libuerit converti

verti machina poſſit, & averſa parte recludi, quo interiora conſpiciantur. Facie anteriori lamina ex ære aurata cernitur toti octogono prætenſa ac vitro ſpeculari tecta, in qua Planetarum orbes ſecundum Copernici ſyſtema, ſed Keplerianas proportiones, deſcripti ſunt ac penitus exciſi, adeo ut per rimas eas pinnulæ exiguæ commeent, quibus Planetarum globuli dimidiati ſupra laminam ac velut in ſuperficie ejus volvantur, Saturno quinos, Jove quaternos, Tellure unicum comitem, quæ Luna noſtra eſt, ſecum ferente; qui nimirum comites iiſdem orbiculis impoſiti ſunt, quibus Planetarum ipſorum corpuſcula. Nam & cæteris planetis qui comites nullos habent, ejuſmodi tamen orbiculos addidi, qui circumfuſum æthera referrent, ſimulque planetas efficerent viſibiliores. Ac Planetæ quidem primarii omnes, ut ſunt præter jam dictos, Mars, Venus, Mercurius, ita continue motus ſuos circa Solem immobilem peragunt, ut non tantum periodica tempora, ſed & anomaliæ leges exacte ſervent. Circa Terram vero Luna menſtruas revolutiones conficit. At in Saturni Joviſque comitibus idem perficere non licuit, cum ob machinæ parvitatem, tum ne æquo longius labor excreſceret. Itaque hi uno tantum orbiculo affixi tenentur, cujus primarius Planeta centrum occupat.

Vide Tab. I. Fig. I.

Porro omnes Orbitas Planetarias Eclipticæ circulus amplectitur, ſignis ſuis duodecim, gradibuſque 360 diviſus. In quo apparentia horum aſtrorum loca, facillime ſic inveſtigantur. Nempe ſi locum Planetæ ſecundum longitudinem, ut vocant, inquirere placet, tantummodo filum è Tellure ad planetam illum extenditur; eique filo alterum ex Solis centro, quod ibi fixum manet, Parallelum ducitur ad Eclipticæ diviſiones uſque; hoc enim Planetæ longitudinem oſtendet. Atque idem hoc parallelogrammo quodam filari ex ba-

cillis duobus æqualibus duo fila itidem æqualia innexa habentibus conſtante peragi poteſt, clauſo manente vitreo, quod ſupra indicavimus, operculo. Huic enim parallelogrammum imponitur, atque, oculo deſuper manente immoto, ita coaptatur, ut altero filo ſuper Terræ ac Planetæ centrum tranſeunte, alterum Soli immineat, quod ſimul in Eclipticæ circulo locum Planetæ ſecundum longitudinem indicabit; de latitudine vero cognoſcenda poſtea dicemus, poſtquam circulos in hunc uſum deſcribere docuerimus.

Inferiori parte Laminæ, inter Saturni Joviſque orbitas, foramina bina ſunt parvo intervallo diſtantia, binoſque pollices longa, dimidium lata, quorum ſuperiore dies Menſis, altero Annus Epochæ noſtræ comparet, itidem, ut cætera, ſuis orbibus delati & Automati motu volubiles, quorum ille 365 dierum æquales diviſiones habet, hic trecentorum annorum. Motus autem ab incluſo horologio oritur, quod idem horas quoque & ſcrupula prima indicat in ſemicirculari foramine inter Jovis ac Martis Orbes parte ſuperiori inciſo. In eo namque numerus horæ cujuſque ordine prælabens, particulas quoque ſexageſimas una opera demonſtrat.

Vide Tab 2. Fig 3.

Movetur autem & manu machina tota, cum vel ſpectaculi gratia Planetarum diſcurſus exigui temporis mora tranſigi placet, vel ad tempus datum, futurum præteritumve, poſitus eorum requiritur. Tunc enim lateri octogoni dextro manubrium inſeritur, quod levi manus motu converſum, qualibet circumductione annuum motum planetis univerſis ſuperaddit; vel contraria ratione agitatum tantundem illos in præcedentia retrahit, ut retrorſum quidem in centenos annos, in futurum ad ducenos, quæcunque fuit aut futura eſt cœli poſitura repræſentari queat. Pari vero facilitate omnia rurſus ad præſens tempus reducuntur, converſo manu-

manubrio, donec ad puncta dictorum foraminum media dies annuſque reſtituantur. Quo peracto, auferendum eſt manubrium, ut rurſus automatico motu omnia, ſicuti prius, ferantur.

Sed quæ hactenus expoſita ſunt, quo clarius percipiantur, figuram hanc Automati, quale extrinſecus apparet, adjicimus.

Explanatio

Tab. I. Fig. I.

V. V. *Ecliptica diviſa in ſigna 12, & gradus 360.*
B. *Sol.*
C. *Orbita Mercurii.*
D. *Mercurius.*
E. *Orbita Veneris.*
F. *Venus.*
G. *Orbita telluris.*
H. *Tellus cum Luna, quæ circa eam volvitur.*
I. *Orbita Martis.*
K. *Mars.*
L. *Orbita Jovis.*
M. *Jupiter cum quattuor ſatellitibus.*
N. *Orbita Saturni.*
O. *Saturnus cum quinque ſatellitibus.*
A. A. *Sunt loca Apogæi in ſingulis planetis.*
☊. ☋. *Denotant nodos in ſingulis planetis, illum aſcendentem, hunc deſcendentem.*
P. P. *Sunt circuli latitudinum in ſingulis planetis.*
Q. *Notat anni menſem, & menſis diem.*
R. *Notat annum Epochæ Chriſtianæ.*
S. *Monſtrat horas, & horarum minuta.*
T. *Figura, quæ denotat Planetarum ad Solem & inter*

inter ſe proportionem, quam Fig. 2. accurate exprimit.

F i g. 2.

Fig. 2. Exhibet veram proportionem magnitudinis Diſci Solaris, ad reliquorum omnium Planetarum Diſcos.

Cæterum fieri non poterat, ut ipſa Solis & Planetarum corpora ſuis proportionibus ad hunc orbitarum modulum exprimerentur; quippe quæ omnia viſu percipi ob exilitatem nequirent: idcirco ſeorſim eos omnes in tabulæ loco vacuo deſcribendos curavimus ea, quæ hìc ſignata eſt, magnitudine. Itaque major circulus Solem refert, reliqui, Planetas juxta Solem poſitos, ut vera eorum, tum inter ſe tum ad Solem, magnitudinis ratio appareat. Ea vero & ex diſtantiarum & ex diametrorum teleſcopio obſervatorum comparatione conſtituta eſt; quemadmodum in his, quæ de Saturni mirabilibus formis olim conſcripſimus, eſt explicatum. Sunt quidem hæc Planetarum corpuſcula ad Solis magnitudinem multo exiliora, quam ab Aſtronomis qui ante nos fuere ſunt prodita. E quibus priſci illi, qui nec orbium inter ſe rationem cognitam habebant, & nudo viſu atque indiligenter prorſus Planetarum diametros metiebantur, non mirum eſt ſi longiſſime aberrarunt; recentiores vero, quique invento jam teleſcopio ſcripſere, etiam hi non parùm ab hiſce menſuris noſtris diverſi abierunt. Quas equidem veriores eſſe adſeverare non vereor, quod & majoribus organis viſoriis hæc ſidera nos obſervavimus, & certiori ratione diametros dimenſi ſimus. Itaque, quæ Solem inter cæteroſque Planetas hic cernitur expreſſa ratio, ea

ea certa eſt, atque a vera vel nihil vel minimum quid diverſa. Una tantum Telluris minus liquido comperta eſt, quam nos hac ratione definivimus; ut ſicut loco inter Martis & Veneris ſtellas media eſt Tellus, ita ponatur & magnitudine; exinde diſtantia Solis circiter 12000 Terræ diametrorum efficitur, Terræque diameter ad Solarem ut 1 ad 110; quas tamen menſuras ſubtiliſſima illa parallaxium obſervatio a ſummis Aſtronomis poſtea adhibita, qua Veneris perigæi diſtantiam ad calculos revocarunt, egregie confirmavit.

Motus autem, qui in hoc Automato cernitur, ratio, converſo pegmate inſpectaque intus machina, cognoſcitur. Reducto enim quod hac parte eam claudit operculo, apparet intus lamina ex ære octogonum totum, uti anterior, occupans, atque ab illa anteriore pollicis unius intervallo remota, & columellis pluribus conſerta. Porro axis quidam ferreus hic apparet bipedalis tranſverſim objectus, ac totidem, quot ſunt Planetæ, rotis inſtructus, quarum unaquæque cochlea una per modiolum trajecta affigitur. Harum rotarum dentes, dentibus majorum rotarum Planetas ſingulos circumferentium, interque binas laminas jacentium, aptantur. Porro eidem axi communi alia præterea rota inſidet, circulo dierum ac menſium convertendo deſtinata; itemque cochleæ, quam infinitam vocant, particula, quæ circulum cum inſcriptis annis trecentis, totidem annorum ſpatio ſemel circumducit, intercedente axiculo quodam dentato. Vide Tab. 2. Fig. 3.

Poſitum vero axis ferrei quod attinet, is horizonti quidem parallelus eſt, non autem laminæ magnæ quam jam demonſtravimus, ſed parte ea, quæ inſpicienti dextra eſt, multo magis ab illa recedit, quod ita faciendum fuit, ut commodius unius axis converſio omnium planetarum diverſis motibus ſufficeret.

Dentium vero numeri certa ratione, quam mox exponemus,

ponemus, reperti ſunt, tamque exacte mediis motibus aptati, ut in annis viginti Saturnus tantum ſcrupulo 1, 34″ promovendus ſit. Jupiter 1′, 9″. Mars 24′, 0″. Venus gradibus 3. ſcrup. 37′. Mercurius 7′, 47″. Luna parte 1, ſcrup. 31′. Cæterum non tantum motus medios exhibuimus, ſed & cum inæqualitate ea quæ reipſa planetarum curſibus ineſt; idque ſecundum anomalias a Keplero excogitatas, quarum apud Aſtronomos maxima auctoritas. Quo pacto autem hæc inæqualitas conficiatur ſuo loco oſtendemus.

Porro etiam horologium Automaton hac parte conſpicitur paulo ſupra axem dictæ laminæ adfixum, cujus horologii vi axis ille magnus annuas converſiones facit, ac per eum omnia continuo motu cientur; tranſit enim motus ab horologio in rotam axi infixam, quam dierum ac menſium circulo aptari diximus, quemadmodum in adſcripto typo apertius liquebit. Interiora horologii percenſere nihil neceſſe eſt, cum vulgo notum ſit inventum, cujus nimirum vis a lamina in helicem convoluta. Hîc vero motus æqualitatem alia ἑλικώδει lamina adjuvimus, quæ libramento recurſus temperaret; quod alterum, poſt inventa pendula, remedium excogitavimus non æque tutum quidem, quod frigore & calore elatet vires ſuas, paulatim quid intendat ac remittat, ſed hîc aptius convenientiuſque. Intenditur autem lamina illa prior motus effectrix ſeptenis quibuſque diebus.

Explanatio

Tab. 2. Fig. 3.

A. A. *Sunt lamellæ quadratæ, quæ columellarum Fig. 4. Tab. 3. litteris* TT. *deſignatarum capita cochleis aſtringunt.*

C. B. *Eſt*

C. B. *Eſt axis bipedalis ferreus.*

D. *Eſt rota, quæ Mercurii rotas movet, conſtans dentibus* 121.

E. *Rota Veneris, conſtans dentibus* 52.

F. *Telluris, dentibus* 60.

G. *Martis, dentibus* 84.

H. *Jovis, dentibus* 14.

K. *Saturni, dentibus* 7.

L. *Rota dentium* 73. *movet circulum, cui menſes dieſque inſcripti ſunt.*

M. *Eſt cochleæ infinitæ particula, cujus convolutio annorum* 300 *circuitum efficit, intercedentibus binis rotulis, communi axiculo Tab.* 3. *deſignato* E *affixis; quibus ſingulis dentes* 6. *quarumque altera huic cochleæ convenit; altera interior rotæ annorum* 300. *dentibus inſeritur.*

N. *Horologium.*

V. *Rota eſt, per quam horologium movet axim* CB.

P. *Sunt dentes quatuor in extremitate axis rotæ* V.

O. *Rota, quæ a dentibus* P. *movetur, & dentes habet* 45.

Q. *Tympanum eſt axi rotæ* O. *inhærens, conſtans dentibus novem, quibus mouetur rota* L. *& per eam axis.*

R. *Eſt lamella ærea huic laminæ majori affixa, cujus orificio parvulo inhæret annulus dentatus* E *Tab.* 3.

In ſchemate adſcripto, quæ converſæ machinæ faciem, amoto operculo, exhibet, lamellæ quadratæ, quibus adſcriptum eſt A, reliquæque iis ſimiles, eæ columellarum capita cochleis adſtringunt, quibus columellis laminæ, quæ hic cernitur, connectitur anterior illa Planetarum orbibus in partes diſſecta. Vide Tab. 2. Fig. 3.

Axis bipedalis ferreus eſt CB, parte ea, qua C adſcriptum eſt, pollices binos a lamina diſtans.

In hoc axe defixæ rotæ orbes planetarum circumagunt, D quidem Mercurii, E Veneris, F Telluris, G Martis, H Jovis, K Saturni. Circulum vero, cui menſes dieſque inſcripti ſunt, rota L movet, ac denique annorum 300 circuitum efficit cochleæ M convolutio, intercedentibus rotulis binis communi axiculo affixis, quibus ſingulis dentes 6, quarumque altera cochleæ huic convenit, altera interior rotæ annorum magnæ dentibus inſeritur.

Per unum igitur axem CB annuas converſiones peragentem, (namque & rota L & cochlea M ipſi inhærent) tot motuum diverſitas perficitur; axis autem ab horologio hoc modo cietur. Eſt in horologio rota V, cujus hic particula tantum cernitur horis 96., ſingulas converſiones faciens. Hujus axi altero capite ad P dentes additi ſunt quaterni; hi inſeruntur rotæ O dentibus 45., cui rotæ in communi axi jungitur tympanum Q. novem dentibus inciſum; qui denique aptantur dentibus 73 rotæ L.

Oportet nunc, & interjectas utrique laminæ planetarum rotas inſpiciundas, dare, ut, quomodo conſtructæ ſint & quo pacto circumeant, appareat.

Explanatio

Tab. 3. Fig. 4.

A. *Rota Saturni, conſtans dentibus 206.*
B. *Brachiolum, cui Saturnus infigitur.*
C. *Rota eſt, cui anni trecenti inſcribuntur, ut annum deſignet, illo temporis ſpatio ſemel circumvoluta. Conſtat dentibus* 300. *Circumvolvitur*

tur autem ope cochleæ infinitæ, quæ in Tab. 2. Fig. 3. littera M *deſignatur, idque ope axiculi dentati* E.

D. *Rota, quæ menſem diemque menſis ſua circumvolutione oſtendit, conſtans dentibus* 219.

F. *Rota eſt, quæ circumducit Jovem brachiolo* G *infixum. Conſtans dentibus* 166.

H. *Rota Martis cum ſuo Brachiolo, conſtans dentibus* 158.

I. *Rota telluris ſimul cum Luna, quæ habet dentes* 60.

K. *Circulus dentatus, qui fixus inhæret anteriori laminæ totius machinæ, & qui, dum rota Telluris circumducitur, movet rotulas, quibus Tellus ſimul cum luna infigitur. Habet autem dentes* 137.

L *Rota Veneris, conſtans dentibus* 32.

M. *Rota Mercurii, dentes habens* 17.

N *Axis fixus, cui ab altera parte Sol infigitur.*

O. *Axiculus Mercurii una ex parte infixus axi Solis, ex altera columellæ* P *lamellæ Telluris immobili inſiſtenti. Habet autem ille duas rotulas, quarum illa* R, *quæ movet Rotam Mercurii, habet dentes* 7., *altera vero* Q *dentes* 12. *Hic autem axiculus ita ſupra planum hujus figuræ elevatus eſt, ut Rotæ Veneris & Mercurii ſub eo motus ſuos exercere queant.*

S. *Apertura per quam, lamina horas monſtrans, circumducitur.*

T. T. T. T. *Deſignant columellas, quibus hæc omnia, illi laminæ quam ſecunda Tabula Fig.* 3. *repræſentat, affiguntur cochleolarum ope.*

ab. Eſt annulus planus, quo Planeta circumvolvitur.

cd. Armilla dentibus inciſa.

ee. Repagula annulum planum in ambitu continentia.

lm. Brachiolum.

Singulis igitur Planetis, annulus planus ad orbitæ eorum amplitudinem dicatus eſt, cui armilla dentata rectis angulis inſiſtit, æqualiter undique ab annuli peripheria diſtans. Annulus iſte, Tabulæ octogonæ anteriori intus applicitus, globulum, Planetæ corpus referentem, circumfert, ſtylo exiguo ſibi infixum, quo extra laminam anteriorem tantillo promineat. In circumferentia annuli hujus, repagula quædam collocata ſunt, laminæque adfixa, intra quæ circulari motu ipſi moventur, ſimulque, ut ne a jam dicta lamina recedant, continentur. Horum in Planetis ſuperioribus, Saturno ac Jove, quina aut ſena adjecta ſunt propter annulorum magnitudinem, in reliquis quaterna aut trina ſufficiunt.

Vide Tab. 3. Fig. 4. In figura hic deſcripta, annulus planus eſt *ab*, ſuper hunc erecta armilla ac dentibus inciſa *cd*. Repagula, annulum planum in ambitu continentia *ee*. Hæc ſingula duabus partibus conſtant, inferiore quam extrema annuli circumferentia radit, quæque ſeorſim laminæ Planetariæ adfixa eſt; tum alia huic ſuperpoſita & cochleis conjuncta, quæ paulum ſupra annuli marginem protenditur, atque, ut ne excidere poſſit, impedit, ſicut in figura videre eſt.

Hujuſmodi itaque annulis ſinguli Planetæ feruntur, ac circulares orbitas percurrunt. Quod ſi Ellipticas voluiſſemus, nullo negotio id quoque efficere licebat, defixo ſcilicet Planeta, non in annulum ipſum *ab*, ſed in brachiolum *lm*, ipſi inhærens, quod movetur in axiculo *m*; in *l* vero Planetam tubulo inſertum gerit; qua parte annulus laxiori foramine perforandus, ſic enim facile per rimam Ellipticam planeta ducetur. Sed, cum parum adeo a circulis Ellipſes iſtæ differant, non ſatis cauſſæ viſum, ut eas adhiberemus. In Saturno autem ac Jove, quo liberius per rimas anguſtiores circuli laberentur, hac ipſâ ratione effecimus. Eſt autem his prorſus ſimilis ille, cui dierum diviſiones inſcrip-

tæ

tæ ſunt; at annorum circulus ſolum annulum planum habet, dentibus in circumferentia inciſis, qui quomodo motum accipiat, jam ante dictum. Et his quidem dierum & annorum annulis, locus repertus eſt, inter illos qui Saturni & Jovis Planetas vehunt; Eoque & foramina, quibus diviſiones illæ ſpectentur, inter iſtorum orbitas Planetarum in anteriore tabula ſunt inciſa.

Jam de menſtruo Lunæ motu oſtendendum, qua ratione ordinatus ſit. Inter Martis ac Terræ orbitas, quod interjacet laminæ Planetariæ ſegmentum, in eo intus defixus eſt annulus, interiore circumferentia dentes habens 137, quem in hoc ſchemate ſignificant inſcriptæ literæ AB. Circumferentia hæc dentata paulo major eſt orbita terræ annuâ, atque ipſe annulus AB paulum ſupra planum, cui affixus eſt, attollitur, ut ſub ipſo collocari queant repagula, intra quæ volvitur annulus Tellurem ferens, qui notatus eſt literis CD. Hic porro annulus axiculum circumfert ad rectos angulos ſibi inſiſtentem, rotulaſque utroque capite affixas habentem E, F, quarum inferior duodenos dentes habet, commiſſos dentibus annuli AB, ſuperior tredecim. Superioris dentes inſeruntur dentibus 12 rotulæ G juxta collocatæ, axemque itidem annulo CD infixum habenti, qui quidem axis cavitatem habet in partem anteriorem tabulæ Planetariæ patentem, in quam cavitatem defigitur ſtylus exiguus, ac lunari circello conjunctus. Cæterum nec retinaculum quoddam annulo CD affixum, & utroſque, quos diximus, axiculos parte ſuperiori detinens, uti nec armillam dentatam exprimendam duxi, ne quid rotularum EF conſpectum impediret.

Vide Tab. 3. Fig. 5.

Revoluto itaque annulo Terreſtri CD ſecundum ordinem literarum AEB, quæ revolutio anteriori tabulæ parte ſpectata, incedit ſecundum ordinem ſignorum Zodiaci; neceſſe eſt contrario motu circumire ro-

tulas E & F, atque huic rurſus contrario rotulam G, hoc eſt, in partem eandem cum annulo Telluris: diximus autem, in axem cavum rotulæ G ſtylum inſeri, cui cohæret orbiculus, Lunam in circumferentia gerens, Tellurem vero in centro; quare recte ordinatus eſt Lunæ circuitus. quam bene vero tempori menſis Periodici conveniat, inferius manifeſtum fiet.

Expoſitis hactenus ſingulis machinæ partibus, dicemus jam, quibus ſemidiametrorum inter ſe proportionibus, quibuſque centris orbitas Planetarum in tabula anteriore deſcripſerimus; item, ubi Apheliorum ac Nodorum puncta conſtituerimus; deinde quem dentium numerum rotæ cuique tribuerimus, ut mediorum motuum conſtaret ratio, deque ejuſmodi numerorum inventione; ac denique, qua dentium conſtructione debitas motuum anomalias expediverimus.

Igitur octogonæ laminæ ſtatuta hac magnitudine, ut, quæ ex centro in latus perpendicularis ducitur, ſit pollicum $11\frac{1}{2}$, centro eodem, ubi & Sol collocandus, circulum Eclipticæ ſignorum deſcripſimus radio pollicum $10\frac{2}{3}$. Hunc circulum in partes 360 partiti ſumus, Signaque 12 ſuis locis adſcripſimus, collocato Arietis ſigno in parte, quæ ſpectanti ad dextram eſt, ac pari cum centro altitudine.

Vide Tab. I. Fig. I.

Porro Apheliorum loca in laterculo adjecto notata, in quam partem uniuſcujuſque Planetariæ orbitæ centrum ſumptum fuerit, declarat. Ex proportione vero ſemidiametrorum juxta collocata, etiam menſura harum linearum intelligitur, ſi una ipſarum, quæ eſt orbitæ Telluris ſemidiameter, definita fuerit, quam quidem pollicis unius ſtatuimus, ſeu pedis Rhenolandici duodecimam partem; qualium enim hæc partes 100000 continere cenſetur, talium radii orbitarum cæterarum partes in laterculo deſcriptas habent. Earundem quoque partium ſunt excentricitates hic adnotatæ, quas

ex

ex centro Eclipticæ, ubi locus Solis, verſus Aphe-
liorum loca accipere oportet, atque ibi centra cujuſ-
que orbitæ ſignare.

Ita ex. gr. Saturni orbitam deſcripturus initio Anni Chriſti 1682., lineam ex Eclipticæ centro duco ad Sagittarii grad. 27, ſcr. 40′. In ea pono ex centro eodem particulas 54, qualium ſemidiameter orbitæ telluris, ſive pollex unus, 100 continet; non poſſumus enim in hac parvitate ulteriores minutias proſequi. Ita centrum orbitæ Saturni reperio. Tum deinde, accepto ſemidiametro partium earumdem 951, orbitam Planetæ deſcribo, cujus Aphelium ſigno litera A ad interſectionem rectæ ejus, quam ex centro ductam oſtendi. Cum vero orbitæ Planetariæ in cœlo omnes non nihil declinent a plano Eclipticæ, ſeu plano orbitæ telluris, quod planum hic ipſius tabulæ ſuperficies eſſe intelligitur; ut nimirum dimidiâ ſui parte ſupra attollantur, altera dimidiâ infra deſcendant, perſpicuum eſt, non eſſe ipſas Planetarum orbitas, quæ a nobis ſunt deſcriptæ, ſed lineas ejuſmodi in quas incidunt ductæ in Eclipticæ planum perpendiculares ex orbitarum quibuſlibet punctis, quas tamen lineas pro orbitis ipſis habemus, quod ſecundum illas, Planetæ motus in longitudinem examinetur; revera autem ſunt orbitæ ad Eclipticæ planum reductæ. Itaque puncta bina, quibus orbita quæque planum Eclipticæ interſecat (hi nodi vocantur) ſuis ſignis ☊ & ☋ notavimus, quorum illud nodo aſcendenti tribuitur, unde nimirum Planeta ad partes Eclipticæ Boreas feratur, quas ſupra tabulam exiſtere intelligendum; alterum nodo deſcendenti, quo præterito in partes Auſtrinas tranſeat. Hi vero in eadem linea recta, per Solis centrum ducta, oppoſitos locos obtinent communi Aſtronomorum conſenſu, etſi non plane ad amuſſim res ſeſe hoc modo habere videatur, ut ſuo loco amplius de-

declarabitur. Cæterum, loca nodorum aſcendentium; & quali angulo, plana orbitarum Planetarum, ad Eclipticæ planum inclinentur, in tabella hic expreſſimus; auctores eos ſecuti, qui maxime nobis probandi videntur; adeoque in Venere & Mercurio recentiſſimorum adhibitis obſervationibus, quibus in Sole ipſo hi Planetæ apparuerunt.

Anno 1682. Januarii 1mo.

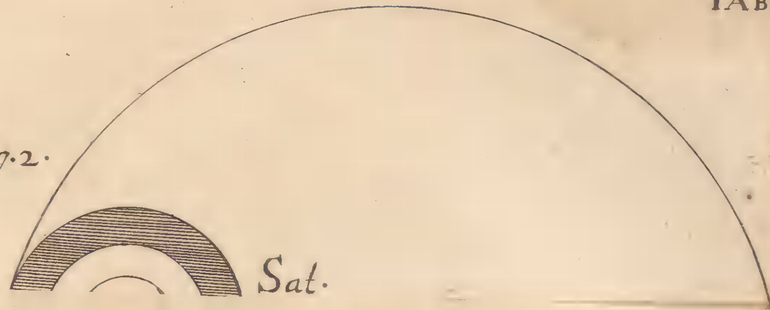
	Aphelia.	*Nodi aſcendentes.*	*Inclinationes.*	*Semid. orbium Planetarum.*	*Excentricitates in iiſdem partibus.*
	Gr. ′ ″	*Gr.* ′ ″	*Gr.* ′ ″		
Mercurii	15:11:19. ♐	14:29:47 ♉	6:54:0	38806	8149
Veneris	2:59:44 ♒	13:54:52 ♊	3:22:0	72400	500
Martis	0:30:17 ♍	17:38:12 ♉	1:50:30	152350	14115
Telluris	7: 7:20 ♑			100000	1800
Jovis	7:55:43 ♎	5:30:42 ♋	1:19:20	519650	25058
Saturni.	27:39:40 ♐	21:36:26 ♋	2:32: 0	951000	54207.

Diam. annuli Saturni	*ad diametr. Solis*	*ut* 11 *ad* 37	
Diam. annuli	*ad diametr. globi Saturn.*	*ut* 9 *ad* 4	
Diam. Iovis	*ad diametr. Solis*	*ut* 2 *ad* 11.	
Diam. Martis	*ad diametr. Solis*	*ut* 1 *ad* 166	
Diam. Terræ	*ad diametr. Solis*	*ut* 1 *ad* 110.	
Diam. Veneris	*ad diametr. Solis*	*ut* 1 *ad* 84	
Diam. Mercurii	*ad diametr. Solis*	*ut* 1 *ad* 308.	

Porro, ut apparentes Planetarum latitudines cognoſcere liceat ſuper linea recta, nodos oppoſitos jungente, arcus circumferentiæ circularis utrinque deſcripſimus, alterum extra orbitæ portionem boream, alterum intra portionem auſtralem, tanto intervallo ab ipſis portionibus, ubi maxime abſunt, recedentes, quanto orbita ipſa, ſupra atque infra planum Eclipticæ, iis ipſis in locis extare deberet; atque ibidem, angulos inclinatio-

TAB. I.

Fig. 2.



nis adſcripſimus. In quocunque vero orbitæ ſuæ reductæ puncto Planeta reperietur, ſi ab eo puncto ad adſcriptum arcum minima diſtantia accipiatur, ea quam proxime intervallum indicabit, quo ab Eclipticæ plano illic vera Planetæ orbita recedit, quod intervallum cum diſtantiâ Planetæ a Tellure comparando, ipſe quoque latitudinis angulus ex triangulorum doctrina facile inveſtigabitur; atque hæc de exteriore Automati forma, deque uſu ejus dixiſſe ſufficiat: Nunc ad interiorem fabricam pergamus.

Dentium in rotis numerus hoc modo a nobis inventus fuit. Motum Medium cujuſque ſub Ecliptica Planetæ annuum, ſeu dierum 365, ad Telluris Medium annuum motum, quales in Tabulis Aſtronomicis exhibentur, comparavimus; reductis ad tertios ſcrupulos arcubus eorum motuum integris. Numeri hinc orti, cum eam inter ſe proportionem habeant, quam arcus circulorum eodem tempore a Planeta, atque a Tellure in orbitis ſuis emenſi, ſequitur tempora utriuſque Periodica ejuſdem rationis contrariam continere; quam itaque, vel ſimilem minoribus numeris expreſſam, etiam dentium numeri habere debent, quibus nempe rota tum Planetaria, tum altera ipſi congruens, atque axi magno impoſita incidantur; ſingulis enim axis hujus converſionibus Tellus integram orbitam ſuam percurrit; quoniam æqualem dentium numerum rotæ Tellurem ferenti, itemque ei, quæ in axe magno reſpondet, attribuimus, ſexagenarium puta, vel alium pro lubitu, qui commode in rotas inducatur.

Huc itaque res tota recidit, ut, datis numeris duobus magnis certam inter ſe rationem habentibus, alii minores inveniantur rotarum dentibus multitudine ſua non incommodi, quique eandem proxime rationem ita exhibeant, ut nulli ipſis minores propius. Sed exemplo rem totam melius exponemus; Sunt igitur invenien-

di dentes in rota Saturni, inque minore illam moevnte, quæ axi magno eſt impoſita, quam indicabat ſuperius litera K.

Vide Tab. 2. Fig. 3.

Annuus Saturni motus (ſequor autem tum in hoc, tum in cæteris Riccioli recentiſſimas Tabulas) proditus eſt gr. 12, 13′, 34″, 18‴. Annuus Telluris, quem ille Solis vocat, gr. 359°, 45′, 40″, 31‴. Reductis igitur omnibus ad ſcrupula tertia, fit proportio 2640858 ad 77708431. Itaque, quam rationem habet poſterior horum numerus ad priorem, eam habet Saturni tempus Periodicum ad tempus, quo circa Solem Tellus convertitur, ac proinde & rotæ Saturniæ dentium numerus ad ſuæ motricis rotæ dentes hanc rationem quam proxime ſervare debet. Inveniendis igitur numeris minoribus, qui proxime rationem iſtam exprimunt, divido majorem per minorem, & rurſus minorem per eum qui a diviſione relinquitur, & hunc rurſus per ultimum reſiduum; atque ita porro continenter pergendo, invenio quod fit ex primâ diviſione,

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}} \text{ \&c.}$$

nempe numerum cum adjuncta fractione, cujus fractionis numerator eſt unitas; denominator vero rurſus fractionem adjunctam habet, cujus numerator unitas, denominator ſimiliter ac præcedens componitur; idque ita conſequenter; qua via, ſi, quo uſque poteſt, continuetur, eo devenitur, ut a diviſione tandem unitas ſuperſit.

Jam ab hac fractionum ſerie poſteriores aliquouſque præcidendo, velut hic $\frac{1}{5}$ cum cæteris deinceps ſequentibus, reliquaſque, cum numero ipſas præcedente, reducendo ad communem denominatorem, erit hujus ad nume-

numeratorem ratio propinqua ei, quam datorum numerorum minor habet ad majorem; adeo quidem ut minoribus numeris propius ad eam accedere non liceat. Reductionis modus facilis eſt; nempe poſteriores, unde hic incipimus fractiones, $\frac{1}{2+\frac{1}{1}}$, tantundem valent ac $\frac{1}{3}$, unde ad proxime præcedentem pergendo, ac reducendo $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, faciunt $\frac{3}{7}$; denique & numerum integrum includendo, ac reducendo $29+\frac{3}{7}$, fiunt $\frac{206}{7}$. Itaque numeri 7 ad 206, propinqua ratio eſt rationis 2640858 ad 77708431. Eoque rotæ Saturniæ dentes 206 dedimus, ipſam vero moventi dentes 7. Quod autem minores numeri non inveniuntur, qui propius rationem propoſitam exprimant, ita oſtendemus. Principio certum eſt numeros, hujuſmodi reductione factos, eſſe inter ſe primos, ex Prop. 1. l. 7. Elem. quia nihil aliud eſt diviſio noſtra continua quam ſubtractio illa Euclidea, quæ ſi numeris noſtris 206 & 7, reductione effectis adhibeatur, planum eſt unitatem tandem relinqui, quia fractionum iſtarum omnium numerator eſt unitas. Quod ſi jam duo quivis alii numeri propius ad proportionem magnorum accedunt, eos neceſſe eſt, facta continua diviſione majoris per minorem, donec unitas ſuperſit, quotientem efficere 29, cum fractionibus iiſdem, quæ ſupra, continue adjectis, atque ulterius continuatis quam unde reductionem incepimus, cum inveniremus numeros 7 & 206., alioqui enim ad primæ diviſionis quotientem, qui dictas fractiones omnes, quouſque poſſunt continuatas, adjectas habet, propius accedi nequit. Sic, quoniam continua diviſione 206 per 7 invenitur,

$$29+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}$$

neceſſe eſſet, diviſione ſimili numerorum propiorum, unam ſaltem inſuper fractionem iſtis adjici, vel $\frac{1}{3}$ vel aliam, qua propius ad quotientem univerſalem perveniatur,

tur, quam ſi ad $\frac{1}{1}$ ſubſiſtamus. Hinc vero facta reductione, manifeſtum eſt, numeros majores effici, quam ſi a citerori fractione cæptum fuiſſet, quandoquidem, acceſſione cujuſque fractionis reductæ, efficitur fractio conſtans numeris inter ſe primis, quæque propterea ad minores reduci nequit; quod examinanti manifeſtum fiet, ſi ad ſequens theorema attenderit demonſtratu facillimum: nempe, Propoſitis duobus numeris inter ſe primis, eorum alteruter, ad ſe ipſum vel ſui multiplicem altero numerorum auctum, primus erit. Si enim non, ergo ita compoſitum metietur, ſed & partem metitur, hoc eſt, ſe ipſum, vel ſui multiplicem; ergo & reliquum metietur; quod abſurdum, quandoquidem numeri inter ſe primi ponebantur. Itaque propiores numeri proportioni propoſitæ, non minores, ſed majores erunt inventis 206 & 7.

Porro facile intelligitur, reductionem fractionum ab ea utilius ſemper incipi, quam proxime inſequens fractio majorem denominatorem habebit vicinarum comparatione; ſicut & antecedenti exemplo inde reductionem incepimus, ubi $\frac{1}{5}$ ſequebatur.

Utilitas vero methodi ad alia multa porrigitur, ubi proportio quæpiam numeris comprehenſa, ad proxime æqualem aliis minoribus numeris eſt redigenda. Velut cum peripheriæ circuli ad diametrum ratio ad notas veras plures datur, nempe quæ 31415926535 ad 100000000000. Hîc facta diviſione fit,

$$3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$$

ubi ſi reductionem inchoaremus a fractione $\frac{1}{7}$, fit proportio Archimedea 22 ad 7; ſi vero ab $\frac{1}{1}$, fit alia multo propinquior quam Adr. Metius prodidit 355 ad 113; ſicut enim 113 ad 355, ita 10000000 ad 31415929 &c. Eodem modo alias ad verum propius accedentes rationes invenire licet; ſed hæc Metiana, cum ad uſum habilis eſt, tum pro numerorum parvitate eximia,

mia, ob exiguam particulam $\frac{1}{292}$ citra quam reductio cœpta eſt; Cujuſmodi non facile ſimilis reperitur ulteriores numeros tentanti. Sciendum vero, reductione hac noſtra, majorem proportionis terminum alternis majorem minoremve vero reperiri, prout a prima, tertia, quinta, aut alia deinceps impari fractione reductio inchoata fuerit. Ita, cum a tertia fractione, quæ eſt $\frac{1}{1}$, reductionem præcedentem inceperimus, fit proportio circumferentiæ ad diametrum, ut 355 ad 113 major verâ; at ſi a ſecunda quæ eſt $\frac{1}{15}$ incepiſſem, extitiſſet inde proportio 333 ad 106 minor verâ; rurſus, ſi a prima quæ eſt $\frac{1}{7}$ initium fiat, oritur proportio Archimedea 22 ad 7 major verâ; veram autem porportionem hic appello, quæ iis, qui adſumti ſunt, magnis numeris exprimitur, quam nimirum pro ipſa proportione circumferentiæ ad diametrum accepimus. Horum vero demonſtratio hoc fundamento nititur notiſſimo, Fractionem quamcunque, aucto denominatore, fieri minorem; imminuto, majorem.

Sit enim numerus ex prima diviſione ortus A, fractionibus vero deinceps deſcendentibus quotlibet BCDEF, & ad infimæ F denominatorem adjecta intelligatur fractio, quæ ex omnibus ulterioribus fractionibus reductis conficeretur, quæ dicatur Z. Cum itaque fractio, cui ſuperſcriptum F, ſit major verâ, quia denominatorem habet minorem vero denominatore, qui eſſet 1†Z, hinc augendo denominatorem fractionis E fractione F, fiet reducta fractio ex fractionibus E, F, minor verâ, ideoque rurſus augendo denominatorem fractionis D, iſta fractione reducta, fiet fractio ex DEF reductis major verâ; ac proinde rurſus augendo denominatorem fractionis C, iſta ultima fiet fractio, ex CDEF fractionibus reductis, minor verâ.

A B C D E F

3 † $\frac{1}{7}$ † $\frac{1}{15}$ † $\frac{1}{1}$ † $\frac{1}{292}$ † $\frac{1}{1}$

Cumque ita neceſſario fractiones, ex reductione fractio-

ctionum ſurſum tendendo effectæ, alternatim nunc majores, nunc minores evadant veris, ſitque infima, unde initium fit, ſemper verâ major, facile apparet, ſi hæc ſedem imparem obtineat, etiam ex omnium fractionum reductione effectam, verâ majorem fore, ideoque numero A additam, daturam terminum proportionis majorem vero. Si vero illa, unde initium fit, ſedem parem obtineat, tum, ex reductione omnium, exſtituram fractionem verâ minorem, ac proinde numero A additam, daturam terminum proportionis vero minorem. Quare patet popoſiti veritas. Sciendum porro, ſi omnes ordine terminos proximos datæ proportioni deſideremus, tunc & ab omnibus fractionibus imparium ſedium, & rurſus ab omnibus ſedium parium faciendam reductionem, idque ita, ut pro ſingularum fractionum denominatore, qui unitate major erit, ponantur ſeorſum denominatores omnes ab unitate ad illum uſque, & cum iis ſingulis reductio inchoetur perficiaturque. Hoc enim ſi fiat in fractionibus ſede impari locatis, omnes termini veris majores ordine exiſtent; ſi verò fiat in fractionibus ſedium parium, habebuntur ordine omnes termini veris minores. Ita in propoſito exemplo, ſi pro fractione prima $\frac{1}{7}$ ponantur ſingulatim $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, facta hinc reductione exiſtent proportiones verâ majores: 4 ad 1, 7 ad 2, 10 ad 3, 13 ad 4, 16 ad 5, 19 ad 6, 22 ad 7. deinde a fractione tertia D incipiendo fiet proxima ratio major 355 ad 113. Et ab quinta F incipiendo, fiet proxima ratio major 104348 ad 33215. Rurſus ſi pro fractione ſecunda $\frac{1}{15}$ ponantur ſingulatim 15 fractiones, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. Item pro quarta $\frac{1}{292}$ ponantur omnes ab unitate, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, uſque ad $\frac{1}{292}$; factis reductionibus, habebuntur ordine proportiones veris minores, quæ quidem ad fractionem E procedendo dari poſſint. Quod ſi denique, ſeriem continuam mixtam termino-

minorum, tam majorem quam minorem verâ proportionem exhibentium, velimus, quorum quique præcedentibus ad veram propius accedant, tunc hoc obſervandum, ut in fractionibus quibuſvis, quarum denominator unitate major erit, ponantur, non ut modo factum, omnes deinceps minores denominatores ab unitate, ſed ab ea incipiendo, quæ dimidio illius denominatoris proxime major erit.

Hac igitur ratione in cæteris quoque Planetis uſi, rotæ Jovis dedimus dentes 166, rotæ vero ipſam moventi dentes 14, rotæ Martis dentes 158, ipſam vero moventi dentes 84. Rotæ Veneris dentes 32, ei quæ movet dentes 52; qui numeri ſunt inter ſe ferme, ut 70 ad 43. Quibus numeris ſi uſi eſſemus, & Rotæ Veneris dediſſemus dentes 43, rotæ vero hanc in axe magno agitanti 70, aliquantulum perfectius vero Veneris motui reſpondiſſet Machina. Priores enim numeri, quos adhibuimus, efficiunt, ut Venus poſt 20 annos a vero loco deficiat gr. 3, 37′. cum poſteriores in iiſdem 20 annis tantillulum ultra verum locum Venerem promoveant, ſed exceſſu 15′. non plene æquante.

Nec multum diſſimili ratione inveniuntur dentes rotularum, quæ Mercurium movent. Aſſumta enim Periodo telluris ſub Ecliptica dierum 365. hor. 5. 49′. 15″. 46‴., Mercurii vero ſub eadem dierum 87. hor. 23, 14′, 24″, aut facilitatis ergo aſſumta illa d. 365. hor. 5. 50′, & hac dierum 87. hor. 23. 15′., invenietur ratio revolutionum Mercurii ad illas Telluris, ut 105190 ad 25335, ſive 21038 ad 5067; quorum diviſione, eo, quo dictum, modo, inſtituta,

$$\frac{21038}{5067} \Big| 4+\frac{1}{6}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7} \text{ \&c.}$$

&

& neglecta ultima fractione, reliquis ad communem denominatorem deductis, fiet $\frac{847}{204}$, qui numeri proportioni motuum, quibus hi Planetæ moventur, quam proxime reſpondent. Verum, cum 847 fiat ex ductis in ſe numeris 121 & 7, & 204 ex ductis in ſe numeris 12 & 17, rotæ annuæ, quæ eſt in axe communi, inditi ſunt dentes 121, & axiculus interpoſitus rotatilis circa duo puncta fixa, quorum alterum eſt in axe per Solem & annulum Mercurii tranſeunte, alterum in columella inhærente lamellæ fixæ Telluris. Sunt autem hæc puncta ita remota ab ipſis orbitis Mercurii & Veneris, ut dentes rotarum Veneris & Telluris, libere ſub axiculo tranſeuntes, ab eo in motu ſuo non impediantur; Hic autem axiculus duas rotulas habet, circa unamquamque extremitatem unam, quarum altera, cujus dentes committuntur rotæ annuæ, eſt dentium 12; altera vero, quæ armillæ dentatæ Planetam vehenti committitur, dentium 7, cum ipſa armilla habeat dentes 17. quo ipſo, inter motum axis communis, & rotæ Mercurium vehentis, eandem proportionem ſervari, quæ eſt 204 ad 847, manifeſtum eſt.

Vide Tab. 3. Fig. 4.

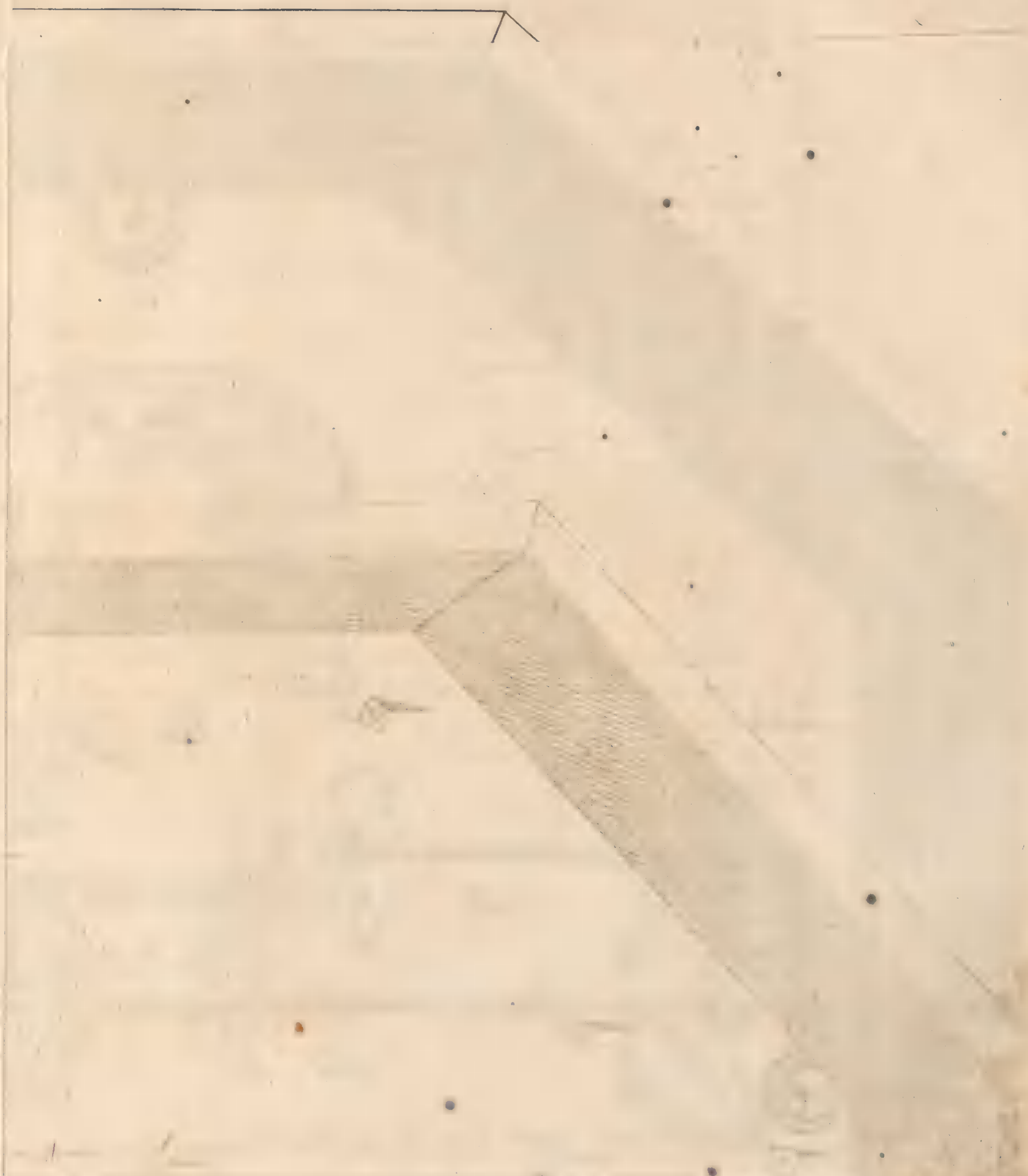
Rotularum, quæ Lunam vehunt, dentes ut inveniantur, aſſumto eodem motu annuo d. 365. hor. 5. 50′, & Lunari motu d. 29 hor. 12, 44′, 3″ ſive ſcrupulorum 45, ob faciliorem calculum invenietur ratio revolutionum Lunæ ad eas Telluris, ut 105190 ad 8505, ſive 21038 ad 1701: quibus numeris, ut prius, diviſis fit

$$\frac{21038}{1701} \Big| \; 12 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Quod ſi pro ultima fractione ſumatur $\frac{1}{6}$, & præcedentes

tomato. pag 180.

TAB·2·



tes ad eundem denominatorem deducantur, fient numeri 1546 & 125, quorum cum prior nullas partes aliquotas habeat, præter 2 & 773; hic autem nimium dentium numerum faciat, præſtabit ſi loco fractionis $\frac{1}{6}$ proxime minorem ſumamus $\frac{1}{7}$, quo facto orientur numeri 1781 & 144, quorum prior fit ex 137 & 13, poſterior ex 12 in 12. Ex quibus, deſcripta ratio dentium, tum in majori rota, tum in minoribus axiculis dentatis, facile conſtabit.

Ex ipſa autem hac inventione numeri dentium, qui, tum in axe communi, tum in rotis ſingulos Planetas deferentibus, incidi debent, manifeſtum eſt non poſſe has circumvolutiones ita fieri, quin tractu temporis aliquantulum ab ea ratione, quam motus telluris ad motum uniuſcujuſque Planetæ ex obſervatis habere aſſumſimus, aberret; Cujus tamen aberrationis quantitatem, quantula ſit, facile eſt determinare. Nam, ut exacte in machina eadem ratio veri motus obſervaretur, neceſſum foret, ut ratio motus præciſe numero dentium in rotulis reſpondeat. Nimirum in Saturni, ut hoc exemplo res plana fiat, rota, quæ in axe communi eſt, dentes ſunt 7, in ea vero, quæ Saturnum vehit, dentes 206. Neceſſum igitur eſt, ut tempore 206 annorum Saturnus periodum ſuam abſolvat ſepties; Verum, cùm ratio motus Telluris ad Saturnum ſit, ut 7708431, ad 2640858, invenietur, Saturnum, ſpatio 206 annorum, abſolvere periodum ſuam non præciſe ſepties, ſed circiter $7\frac{1}{1346}$. Singulis ergo 206 annis Saturnus in motu ſuo in hac machina retardatur $\frac{1}{1346}$ ſui circuli, ſingulisque annis tantundem uniuſcujuſque dentis, & annis 1346 retardabitur ejus motus unico dente, quo igitur poſt id tempus rota Saturni promovenda erit. Hæc autem rota cum conſtet dentibus 206, qui integrum circulum 360 graduum conſtituunt, unicuique denti præterpropter reſpondebunt 105 ſcrupuli, per

quos itaque promovendus erit Saturnus poſt exactos annos 1346, adeoque poſt 20 annos 1′: 34″. Eademque ratio eſt in cæteris.

Reſtat explicemus quanam ratione, ex harum rotarum revolutione, debitæ motuum anomaliæ ſequanntur. Hunc in finem ſit ANP orbita Planetæ, cujus centrum C, Sol S; ſumaturque in SC punctum E ad lubitum, fiatque, ut excentricitas SC ad radium CA, ita CE ad ED, quo radio ac centro E deſcribatur circulus DM. Intelligatur porro, circulo AL ſuper centro ſuo C mobili, affixum eſſe immobiliter circulum DM inciſum dentibus æqualibus ſuper circuli plano erectis, qui proinde circulus, neceſſario quoque, circa centrum C movebitur. Ponatur autem moveri verſatione æquabili tympani KH axem ad C directum habentis, cujuſque dentes congruant dentibus rotæ DM. Satis enim convenient, etſi ob excentricitatem hujus rotæ non ſemper tympano ad rectos ſubjiciantur: dico hoc motu Planetam inæqualiter ferri in ſua orbita, idque ita, ut ejus motus hypotheſi Keplerianæ proxime æquipolleat.

Vide Tab. 4. Fig. 7.

Sumto enim in circulo DM, centro E deſcripto, quolibet arcu DO, ponatur ejus arcus dentes verſatione tympani HK pertranſiiſſe rectam CD, erit neceſſario recta CO in recta CAD, etſi non ita, ut punctum O ſit in D, ſed interius in R, cum CD, quæ æqualis eſt duabus CE, EO, major ſit, quam CO. Quantus igitur eſt angulus OCD, tantus quoque erit angulus, quo recta CAD mota erit circa Centrum C; ideoque ſi faciamus angulum DCT æqualem angulo DCO, erit CT recta, in quam promota erit CAD, adeo ut Planeta proceſſerit ex A in punctum N, ubi recta CT ſecat circumferentiam AN centro C deſcriptam. Circulus autem DM centro E promoto in F, factoque FT æquali ED, habebit ſitum circuli TR. Apparet autem ob eandem angulorum OCD, DCT æqualitatem,

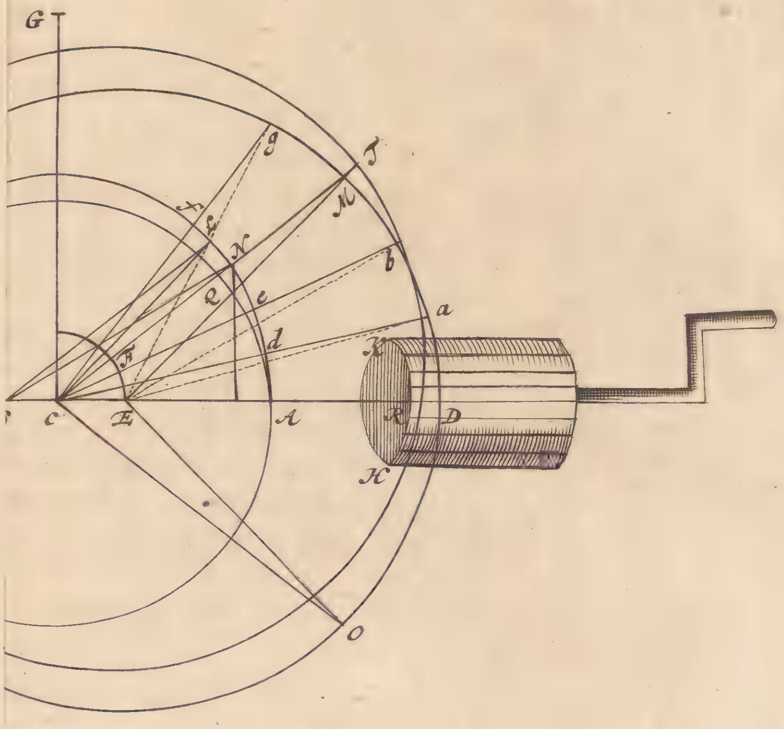
tem, arcum DM, quem recta CT abſcindit in circumferentia ODM, eſſe æqualem arcui DO. Unde juncta ME, erit & angulus MED æqualis DEO. Itaque ſi fiat arcus AL totidem graduum, quot continet arcus DM, jungaturque CL, erit hæc parallela EM. In triangulis igitur CEM, SCL, erunt anguli LCS, MEC æquales, & circa hos æquales angulos latera proportionalia. Eſt enim ex conſtructione SC ad CL, ita CE ad EM, quoniam CL ipſi CA, & EM ipſi ED eſt æqualis. Erunt ergo æquales etiam anguli MCE & LSC, ac proinde latera CM, SL parallela. Hac igitur rotatione circulorum DM, AL Planetam in A poſitum ita moveri per circulum AL, ut ejus motus quam proxime reſpondeat *Hypotheſi Kepleri*, ita oſtendetur: Ponatur Planeta motus ab A verſus N, erit ſpatium NSA anomalia ejus media; atqui propter lineas parallelas SL, CN erit triangulum NSC æquale triangulo CLN, quod inſenſibili diſcrimine differt a ſectore CLN. Spatium itaque CLA, adeoque & arcus AL, reſpondebit anomaliæ mediæ; promoto Planeta ex A in N. Quod ſi ponamus AQP eſſe ellipticam Kepleri orbitam, erit quidem Planeta in Q, ubi ſcilicet NQ perpendicularis in AP Ellipſin AQP ſecat, non in N, ſed hæ Ellipſes tam parum a circulis recedunt, ut differentia in machina animadverti nequeat. Erit itaque N locus Planetæ debitus medio motui AL, qui arcus tot gradus, ac arcus DO, ſive DM complectitur. Quod ſi tympanum ponatur quovis alio loco velut in G æque diſtante a centro C verſus quod tympanum dirigitur, collocetur vero punctum D, quod in rota ODM maxime a Centro C diſtat ſub tympano, & Planeta rurſus in A loco Aphelii ſui, apparet, æquali verſatione tympani in G atque in D, eoſdem angulos tranſire circa centrum C. Quare ubicunque collocetur tympanum, eodem ritu mo-

tus Planetæ inæqualis fiet, licet dentes rotæ DM æquales ponantur, modo dentes tympani K directe ſpectantis ad punctum C aliquam habeant longitudinem, qua committi queant dentibus circuli DM aliis, & aliis in punctis ſecantis rectam DC; & ſimul obſervetur, ut poſita recta longiſſima, quæ a centro C ad circulum DM duci poteſt directe ſub tympano K, Planeta ponatur in Aphelio circuli ANL. Verum, cum noſtra in machina omnia tympana in uno eodemque axe ſint poſita, non poterit ille niſi ad duorum Planetarum centra debite collocari; quare porro conſiderandum eſt, qui idem per inæquales dentes perfici queat. Quem in finem ſupponamus, circulum DMP in partes æquales D*a*, *ab*, *b*M, M*g* ſectum eſſe, & ad illas ſingulas duci ex puncto C rectas, C*a*, C*b*, CM, C*g*, illæ in partes inæquales *Ad*, *de*, *e*N, N*f* ſecabunt orbitam Planetæ ANL. Qua ratione invenientur in circulo ANL totidem dentes inæquales, quot æquales poſiti ſunt in circulo DM. Quibus ſi nunc porro tympanum K applicetur, (ſatis enim convenient, licet alibi minores, alibi vero majores paulo evadant,) cum eodem numero dentium tympani K, quo tranſiere prius dentes arcus DM, jam tranſeant dentes arcus AN, fiet, ut ſimul eadem motus Planetæ oriatur inæqualitas, quam Hypotheſi Keplerianæ proxime reſpondere oſtendimus.

F I N I S

to . pag. 184.

Tab. 4.



00

FOR REFERENCE
BOSTON COLLEGE LIBRARY
CHESTNUT HILL, M.
MATH. DEPT.
NOT TO BE TAKEN FROM THIS ROOM

160200

~~[illegible]~~
160200

BOSTON COLLEGE LIBRARY
UNIVERSITY HEIGHTS
CHESTNUT HILL, MASS.

Books may be kept for two weeks and may be renewed for the same period, unless reserved.

Two cents a day is charged for each book kept overtime.

If you cannot find what you want, ask the Librarian who will be glad to help you.

The borrower is responsible for books drawn on his card and for all fines accruing on the same.

BOSTON COLLEGE SCIENCE LIBRARY

7154.